

УДК 512.541+512.553

А.Р. Чехлов

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ Е-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП¹

Приведены различные примеры Е-нильпотентных и Е-разрешимых абелевых групп.

Ключевые слова: кольцо эндоморфизмов, полугрупповое кольцо, коммутаторно инвариантная подгруппа, Е-нильпотентная группа, Е-энгелева группа.

Все группы в статье предполагаются абелевыми, кольца – ассоциативными. Пусть A – группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов. $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ – аддитивная группа (или кольцо) целых чисел. $Z(R)$ – центр кольца R . Подгруппа G группы A называется *чистой* (или *сервантной*), если $G \cap nA = nG$ для каждого $n \in \mathbf{N}$; *инвариантной*, если $fG \subseteq G$ для каждого автоморфизма f группы A .

Напомним, что если R – кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b . Если $a_1, \dots, a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$.

Подгруппу H группы A назовем *коммутаторно инвариантной* (обозначение $H \leq ki A$), если $[f, \psi]H \subseteq H$ для всех $f, \psi \in E(A)$. Коммутаторно инвариантные подгруппы изучались в [1 – 4].

Группу A назовем *Е-нильпотентной класса n* , если $[\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}] = 0$, эквивалентно $[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in Z(E(A))$, для любых $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1, \dots, n+1$, и $[\beta_1, \dots, \beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_j \in E(A)$, $j = 1, \dots, n$.

Группу назовем *Е-энгелевой, класса $\leq n$* , если $[\underbrace{\alpha, \beta, \dots, \beta}_n] = 0$ для любых ее эндоморфизмов α, β .

Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны.

Предложение 1 [4, предложение 1.2]. В Е-энгелевой группе A все ее прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(A)$ нормальное.

Группы с нормальным кольцом эндоморфизмов изучались в [4].

Свойства аддитивной группы R^+ кольца R приписываются самому кольцу. Так, кольцо R называется *редуцированным*, если редуцирована группа R^+ .

Для удобства ссылок приведем следующий результат.

Теорема 2 (теорема Корнера [5, теорема 110.1]). Всякое счетное редуцированное кольцо без кручения с единицей изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторой счетной редуцированной группы без кручения.

Как хорошо известно, коммутатор $[x, y]$ является билинейной знакопеременной функцией от x, y ; справедливы тождества Якоби $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ и $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, а также

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

$$1. [a, b, c, d] + [b, a, d, c] + [c, d, a, b] + [d, c, b, a] = 0.$$

Ряд других свойств приведены в [1 – 4]. Отметим еще

$$2. [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-2}]x_{n-1}, x_n] - [x_{n-1}[x_1, \dots, x_{n-2}], x_n]; \quad 3. [x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n] = -[x_1, \dots, x_i, \dots, x_n];$$

$$4. [[a, b], [c, d]] = [a, b, c, d] + [b, a, d, c].$$

В частности, $[[c, d], [a, b]] = [c, d, a, b] + [d, c, b, a]$. Из последних двух равенств получается свойство 1. Кроме того, из 4 следует, что у Е-нильпотентной группы класса ≤ 3 перестановочны любые два коммутатора ее эндоморфизмов.

$$5. [[a, b, c, d]] = [[a, b]c, d] - [c[a, b], d].$$

В 6 предполагается, что x_i – любые элементы кольца R .

6. Для кольца R с единицей следующие условия эквивалентны:

$$а) [x_1, \dots, x_{n-1}] \in Z(R);$$

$$б) [x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = [x_n, x_{n-1}, [x_1, \dots, x_{n-2}]];$$

$$в) [[x_1, \dots, x_{n-2}]x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}[x_1, \dots, x_{n-2}], x_n];$$

$$г) [[x_1, \dots, x_{n-1}]x_n, x_{n+1}] = [x_1, \dots, x_{n-1}][x_n, x_{n+1}].$$

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Обозначим $a = [x_1, \dots, x_{n-2}]$, тогда в силу тождества Якоби

$$[a, x_{n-1}, x_n] + [x_{n-1}, x_n, a] + [x_n, a, x_{n-1}] = 0.$$

Здесь $[a, x_{n-1}, x_n] = 0$ и $[x_{n-1}, x_n, a] = -[a, x_n, x_{n-1}] = 0$. Значит, $[x_{n-1}, x_n, a] = 0$, т.е. выполнено б). Эквивалентность а) и в) вытекает из свойства 2 коммутаторов.

$$а) \Rightarrow г). \text{ Если } a = [x_1, \dots, x_{n-1}], \text{ то } [ax_n, x_{n+1}] = ax_n x_{n+1} - x_{n+1} ax_n = a[x_n, x_{n+1}].$$

При $x_n = 1$ в г) получаем $[x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}] = 0$, т.е. г) $\Rightarrow$ а).

б) $\Rightarrow$ а). Обозначим $a = [x_1, \dots, x_{n-2}]$. Из $[a, x_{n-1}, x_n] = [x_n, x_{n-1}, a]$ после сокращения получаем

$$x_{n-1}x_n a + ax_n x_{n-1} - x_{n-1}ax_n - x_n ax_{n-1} = 0 \text{ или } [x_{n-1}, [x_n, a]] = 0,$$

что в силу произвольности элементов влечет а).

Из п. г) свойства 6 следует, что кольцо R с единицей удовлетворяет тождествам $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$ и $[x_1, x_2, x_3] = 0$ тогда и только тогда, когда $c[a, b] \in Z(R)$ для любых $a, b, c \in R$.

7. Если кольцо R с единицей удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2, x_3] = 0$, то $[a, b][c, d] = [a, d][b, c] = [a, c][d, b]$ для любых $a, b, c, d \in R$. В частности, если b перестановочен с a или c , то $[a, c][b, d] = 0$. Поэтому если кольцо R не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то оно коммутативно.

Доказательство. Действительно из 6, п. г) имеем $[a, b][c, d] = [[a, b]c, d] = [a[b, c] + [ac, b], d] = [[b, c]a, d] = [b, c][a, d]$. Оставшиеся утверждения доказываются аналогично.

8. Пусть R – кольцо и $[a, b] \in Z(R)$ для некоторых $a, b \in R$. Тогда множество $N_{a,b} = \{c \in R \mid c[a, b] \in Z(R)\}$ является подкольцом в R , содержащим $Z(R)$. Кроме того, если $x, y \in N_{a,b}$, то $R[x, y]R \subseteq N_{a,b}$.

Доказательство. Пусть $c, d \in N_{a,b}$. Допустим, что $cd[a, b] \notin Z(R)$. Тогда $[cd[a, b], x] \neq 0$ для некоторого $x \in R$. Так как $[a, b] \in Z(R)$, то $[cd[a, b], x] = [a, b][cd, x]$. Имеем

$$xcd[a, b] = x(d[a, b])c = ([a, b]c)xd = cxd[a, b].$$

Откуда

$$[cd, x][a, b] = (cdx - cxd)[a, b] = c[d, x][a, b].$$

Но $[a, b][d, x] = [[a, b]d, x] = 0$ в силу условия $[a, b]d \in Z(R)$. Противоречие. Аналогично показывается, что $[x, s] \in N_{a,b}$ для любых $s \in R$ и $x \in N_{a,b}$, т.е. $N_{a,b}$ является идеалом $\mathbf{Z}$ -алгебры Ли, ассоциированной с R . Пусть теперь $x, y \in N_{a,b}$.

Если $r, s \in R$, то

$$[x, y]s = (xy - yx)s = x(yx - ys) - (yx)x - y(xs - sx) = [x, y]s - y[x, s], \text{ т.е. } [x, y]R \subseteq N_{a,b}.$$

Откуда следует, что

$$r[x, y]s = [x, y]sr + r[x, y]s - [x, y]sr = [x, y]sr + [r, [x, y]s] \in [x, y]R + [R, N_{a,b}] \subseteq N_{a,b}.$$

Е-центром группы A назовем следующую ее подгруппу:

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi, \psi \in E(A)\}.$$

Подгруппу $A' = \langle [\varphi, \psi]A \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$ назовем Е-коммутантом группы A . Ясно, что коммутативность $E(A)$ эквивалентна любому из равенств $Z(A) = A$, $A' = 0$. Если $a \in A$, то через $[\varphi, \psi]a$ обозначим коммутатор элемента a .

Очевидно, что если $H \leq \text{ki } A$ и $H \cap A' = 0$, то $H \subseteq Z(A)$. Поэтому если H – минимальная ki -подгруппа, то $H \subseteq A'$ или $H \subseteq Z(A)$. В частности, если A порождается минимальными ki -подгруппами, то $A = A' + Z(A)$.

Определим по индукции $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = A'$, ..., $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ и $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho < \alpha} A^{(\rho)}$ при предельном ординале α .

Группу A назовем Е-разрешимой, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Такое наименьшее n назовем классом Е-разрешимости группы A . Прямые слагаемые Е-разрешимой группы являются Е-разрешимыми группами.

Различные свойства и описание Е-центров и Е-коммутантов групп из ряда классов получены в [1 – 4].

Пример 1. Пусть $X = \{a, b\}$ – полугруппа левых нулей, т.е. $xu = x$ для всех $x, u \in X$. Присоединим к X единицу 1 и ноль 0, $S = X \cup \{0, 1\}$ и рассмотрим на S целочисленное полугрупповое кольцо K . Элементами K служат всевозможные конечные суммы вида $\alpha = n \cdot 1 + m \cdot a + s \cdot b + u \cdot 0$, где $n, m, s, u \in \mathbb{Z}$. Если $\beta = k \cdot 1 + l \cdot a + r \cdot b + v \cdot 0$, то $[\alpha, \beta] = (mr - ls)(a - b)$. Поэтому $[\alpha, \beta] \neq 0$ при $mr \neq ls$. Если $[\gamma, \delta] = t(a - b)$, то $[\gamma, \delta][\alpha, \beta] = t(mr - ls)(a - b)^2 = 0$. По теореме Корнера (теорема 2) существует группа без кручения A , кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K , A является Е-разрешимой группой класса 2. Далее, $[\alpha, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_n] = (mr - ls)(r + l)(a - b) \neq 0$ при

$r \neq l$, $mr \neq ls$, поэтому A не является Е-энгелевой.

Е-центр группы без кручения – чистая подгруппа, а Е-коммутант может не быть чистой подгруппой.

Пример 2. Пусть $n > 1$ – натуральное число и K – кольцо всех матриц вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & nb & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Если } \beta = \begin{pmatrix} x & ny & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \text{ то } \alpha\beta - \beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(bt - yd) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(K). \text{ По теореме}$$

Корнера существует группа без кручения, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K ; эта группа Е-нильпотентна класса 2, коммутант которой не является чистой подгруппой.

Легко привести примеры, когда подгруппы и факторгруппы Е-нильпотентной группы не являются Е-нильпотентными. Так, пусть $A = B \oplus C$, где B и C – вполне инвариантные подгруппы с коммутативными кольцами эндоморфизмов группы без кручения A и $pB \neq B$, $pC \neq C$. Кольцо $E(A)$ также коммутативно, поэтому A – Е-

нильпотентная группа. Однако для любых $0 \neq b \in B$ и $0 \neq c \in C$ подгруппа $\langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$ и фактор-группа $A/pA \cong (B/pB) \oplus (C/pC)$, как это следует из предложения 1, не являются Е-нильпотентными.

Пример 3. Пусть $K = T_2(\mathbf{Z})$ – кольцо целочисленных треугольных матриц порядка 2. Коммутатор любых двух матриц из K имеет вид $a = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $u \in \mathbf{Z}$. Поэтому произведение любых двух коммутаторов есть 0 кольца K . Согласно теореме Корнера, существуют группы A с кольцом эндоморфизмов K , эти группы будут Е-разрешимыми группами класса 2. Если $b = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in K$, где $x \neq z$, то $ab - ba = \begin{pmatrix} 0 & u(z-x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Откуда $[a, \underbrace{b, \dots, b}_n] \neq 0$ для любого n , т.е. A не будет Е-энгелевыми.

Отметим, что для каждого n существуют Е-разрешимые группы класса n , не являющиеся Е-нильпотентными.

Пример 4. Пусть $\mathbf{Z}[i] = \{m + ki \mid m, k \in \mathbf{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $(\mathbf{Z}[i])[x, -]$, состоящее из многочленов от x с коэффициентами из $\mathbf{Z}[i]$, для которых выполняется равенство $xa = \bar{a}x$, где $\bar{a}$ – комплексное число из $\mathbf{Z}[i]$, сопряженное к a . Пусть теперь $K_n = (\mathbf{Z}[i])[x, -]/(x^n)$, где (x^n) – идеал, порожденный x^n . Тогда $[f, g] = fg - gf \in xK_n$ для любых $f, g \in K_n$. Поэтому $[f_{2n-1}, f_{2n}] \dots [f_1, f_2] = 0$ для всех $f_i \in K_n$ при $i = 1, \dots, 2n$. Аддитивная группа кольца K_n является счетной редуцированной группой без кручения. Как и в примере 2 в качестве A можно взять группу, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K_n . Поскольку, например, $[x, \underbrace{i, \dots, i}_n] = (-2i)^n x \neq 0$, то A не является Е-энгелевой. Если рассмотреть

подкольцо в K_n , состоящее из многочленов $f(x) = a_0 x^m + \dots + a_m$ со свободным коэффициентом $a_m \in \mathbf{Z}$, то группа с соответствующим кольцом эндоморфизмов будет Е-нильпотентной.

Пусть R – кольцо со свойством $[x, y, z] = 0$ для любых $x, y \in R$. Тогда $0 = [x, y+z, y+z] = [x, y, z] + [x, z, y]$. Согласно тождеству Якоби, $[x, z, y] = [x, y, z] + [y, z, x]$. Откуда $2[x, y, z] + [y, z, x] = 0$. Из $0 = [y, z+x, z+x] = [y, z, x] + [y, x, z]$ получаем $[y, z, x] = -[y, x, z] = [x, y, z]$. Поэтому $3[x, y, z] = 0$. Аналогичным образом, используя свойство 1 и уже доказанное равенство $3[x, y, z] = 0$, можно показать, что $[x, y, z, t] = 0$ для любых $x, y, z, t \in R$.

Как и для абелевых групп, можно определить Е-разрешимые, Е-нильпотентные и Е-энгелевы модули. Из вышеприведенных рассуждений следует, что всякий Е-энгелев модуль M класса ≤ 2 является Е-нильпотентным класса ≤ 3 , а если для каждого $m \in M$ из $3m = 0$ следует $m = 0$, то M – Е-нильпотентным класса ≤ 2 . Если же M – абелева группа и M имеет ненулевую 3-компоненту, то $M = B \oplus C$, где B – неразложимая 3-группа и $E(B)$ – коммутативное кольцо. Из предложения 1 следует, что C не имеет элементов порядка 3. Поэтому в силу вышесказанного всякая Е-энгелева группа класса ≤ 2 является Е-нильпотентной класса ≤ 2 .

Если $H \leq \text{ki } A$ и $R = E(A)$, то положим $Z_R(A/H) = \{\bar{a} \in A/H \mid [\alpha, \beta]\bar{a} = 0 \text{ для всех } \alpha, \beta \in R\}$. Ясно, что если $A' \subseteq B \leq A$, то $B \leq \text{ki } A$.

Если $H \subseteq A$, то через $N_R(H) = \{a \in A \mid [\alpha, \beta]a \in H \text{ для всех } \alpha, \beta \in R\}$ обозначим Е-нормализатор подмножества H в группе A . Индекс R иногда будем опускать.

Инвариантность подгруппы H влечет инвариантность $N(H)$. Ясно, что $H = N(H)$ для $H \leq A$ в точности тогда, когда $H \leq \text{ki } A$ и A/H – коммутаторно точная фактор-группа, т.е. для любого $0 \neq \bar{a} = a + H \in A/H$ найдутся $\varphi, \psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi, \psi] \bar{a} \neq 0$ (факт, отмеченный в [1]). Отсюда несложно вывести, что для прямого слагаемого H выполняется равенство $H = N(H)$ тогда и только тогда, когда H вполне инвариантно и $Z(C) = 0$ для каждого (эквивалентно – для некоторого в силу их изоморфизма) дополнительного прямого слагаемого C .

Ряд $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots \subseteq A_{i+n} \subseteq \dots$ подгрупп A_i ($i \in I$) группы A назовем *Е-центральный*, если $A_i \leq \text{ki } A$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_R(A/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_R(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \leq \text{ki } A$ для всех $i \in I$, то ряд назовем *Е-нормальный*.

Если A – группа, $R = E(A)$, то положим по индукции $Z_0(A) = 0$, $Z_1(A) = Z(A)$, ..., $Z_i(A)/Z_{i-1}(A) = Z_R(A/Z_{i-1}(A))$ и $Z_\alpha(A) = \bigcup_{\rho < \alpha} Z_\rho(A)$ при предельном ординале α .

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(A)$. Ряд $0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_\alpha \subseteq \dots$ назовем *верхним Е-центральным* рядом группы A . Подгруппы Z_α назовем *Е-гиперцентрами* группы A . Все Е-гиперцентры являются вполне инвариантными подгруппами. В группе без кручения все Е-гиперцентры являются чистыми подгруппами, поэтому все факторы верхнего Е-центрального ряда также группы без кручения.

Если $H \subseteq A$, то подгруппу $\langle [\varphi, \psi]h \mid h \in H, \varphi, \psi \in E(A) \rangle$ назовем *Е-коммутантом* подмножества H в A и обозначим через $[H, A]$. Если $H \leq \text{ki } A$, то $[H, A] \leq \text{ki } A$, а если $H \leq \text{fi } A$, то $[H, A] \leq \text{fi } A$. Всегда $[B+C, A] = [B, A] + [C, A]$ для $B, C \subseteq A$. Обозначим

$$[H, A]_1 = H + [H, A] \text{ и } [H, A]_{n+1} = [H, A]_n + [[H, A]_n, A] \text{ при } n \geq 1.$$

Тогда $\bar{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [H, A]_n$ – наименьшая ki -подгруппа, содержащая H . Действительно, $\bar{H} \leq \text{ki } A$ и всякая ki -подгруппа, содержащая H , содержит и $\bar{H}$. Инвариантность H влечет инвариантность $\bar{H}$. Заметим, что если $H \subseteq A'$, то $\bar{H} \subseteq A'$.

Положим по индукции $L_1(A) = A$, $L_{i+1}(A) = [L_i(A), A]$ и $L_\alpha(A) = \bigcap_{\rho < \alpha} L_\rho(A)$, если α – предельное порядковое число. Отметим, что $L_n(A) = A^{(n-1)}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $L_\alpha(A) \leq \text{fi } A$ для каждого ординала α .

Заметим, что

$$L_{n+1}(A) = \langle [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \dots [\alpha_1, \alpha_2] a \mid a \in A, \alpha_i \in E(A), i = 1, \dots, 2n \rangle,$$

$$\text{а } Z_n(A) = \{a \in A \mid [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \dots [\alpha_1, \alpha_2] a = 0, \alpha_i \in E(A), i = 1, \dots, 2n\}.$$

Е-разрешимые группы класса n являются подклассом класса BL_n -групп – групп A со свойством $[\varphi, \psi]^n = 0$ для всех $\varphi, \psi \in E(A)$. Группы из класса BL_2 изучались в [2–4].

Если $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$ – Е-центральный ряд, то получаем включения $A_i \subseteq Z_i$ и $L_i \subseteq A_{n-i+1}$, где $L_i = L_i(A)$. Ряд $L_1(A) \supseteq L_2(A) \supseteq \dots$ назовем *нижним Е-центральным* рядом группы A . Из вышеприведенных включений следует, что в Е-разрешимой группе верхний и нижний Е-центральные ряды обрываются, причем их длины равны классу Е-разрешимости группы. В частности, в Е-разрешимой группе все ее Е-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом Е-разрешимости группы.

Хотя верхний и нижний Е-центральные ряды Е-разрешимой группы имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать. Так, в вышеприведенном примере Е-разрешимой группы $A = B \oplus C \oplus D$ верхний Е-центральный ряд имеет вид $0 \subset C \oplus D \subset A$, а нижний $0 \subset \text{Hom}(B, C)B \subset A$.

І. Пусть R – такое кольцо, что соотношение $2a = 0$ влечет за собой $a = 0$, U –

коммутативное подкольцо в R , являющееся идеалом $\mathbf{Z}$ -алгебры Ли, ассоциированной с R . Тогда если $x \in U$, $s \in R$ то $([x, s]t)^3 = 0$ и $(t[x, s])^3 = 0$ для любого $t \in R$.

Доказательство. Имеем $y = [x, s] \in U$. Поэтому $[x, s]^2 = xs(xs - sx) - s(xs - sx)x = (xs - sx)xs - (xs - sx)sx$. Откуда $2[x, s]^2 = x^2s^2 - xs^2x - xs^2x + s^2x^2 = x(xs^2 - s^2x) - (xs^2 - s^2x)x = 0$, так как x перестановочен с $xs^2 - s^2x$. Значит, $y^2 = [x, s]^2 = 0$. Аналогично $[y, t]^2 = 0$. Далее $[y, t]^2 = (yt - ty)(yt - ty) = (yt)^2 - yt^2y + (ty)^2$. Поэтому $(yt)^3 = 0$ и $(ty)^3 = 0$.

Будем говорить, что кольцо R удовлетворяет условию (*), если для любого $0 \neq \alpha \in R$ найдется такой $\beta \in R$, что $\alpha\beta$ или $\beta\alpha$ не является нильпотентным элементом.

II. Пусть A – Е-нильпотентная группа класса ≤ 3 . Тогда если кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию (*), то оно является коммутативным.

Доказательство. Согласно предложению 1, прямые слагаемые группы A вполне инвариантны. Поэтому если A имеет ненулевую 2-компоненту, то $A = B \oplus C$, где B – неразложимая 2-группа, а 2-компонента группы C нулевая. Следовательно, можно предполагать, что 2-компонента группы A является нулевой, т.е. кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию (*). Согласно замечанию после свойства 4, коммутаторы эндоморфизмов группы A перестановочны, поэтому они порождают коммутативное подкольцо в $E(A)$. Из I следует, что если $x \in U$, $s \in E(A)$ то $[x, s] = 0$, т.е. A – Е-нильпотентная группа класса ≤ 2 . Если $[\alpha, \beta] \neq 0$ для некоторых $\alpha, \beta \in E(A)$, то $[\alpha, \beta] \in Z(E(A))$. Поэтому ввиду свойства 7 $([\alpha, \beta]\gamma)^2 = 0$ для любого $\gamma \in E(A)$, что противоречит условию на $E(A)$. Это доказывает утверждение.

Пример 5. Пусть M – множество всех натуральных чисел, не делящихся на квадраты. Каждому $m \in M$ сопоставим циклическую группу $\langle a_m \rangle$ порядка 2 и обозначим через B прямое произведение всех $\langle a_m \rangle$, т.е. B состоит из функций $f: M \rightarrow \bigcup_{m \in M} \langle a_m \rangle$ с условием $f(m) \in \langle a_m \rangle$ и конечным носителем $\{m \in M \mid f(m) \neq e\}$,

где e – единица соответствующей группы.

Каждому простому числу p сопоставим эндоморфизм φ_p группы B , задаваемый на порождающих следующим образом:

$$a_m^{\varphi_p} = \begin{cases} a_{m/p} & \text{при } p \mid m \\ a_m & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_p^2 = \varphi_p$ и $\varphi_p \varphi_q = \varphi_q \varphi_p$, так что полугруппа Φ , порожденная всеми φ_p , коммутативна. Пусть G – полугруппа, состоящая из элементов $\{\varphi a \mid \varphi \in \Phi, a \in B\}$ с умножением $\varphi a \cdot \psi b = \varphi \psi a^\psi b$. Под носителем элемента $g = \varphi a \in G$ будем понимать носитель элемента a в B . Пусть, далее, K – целочисленное полугрупповое кольцо, заданное на G , т.е. элементами K служат всевозможные конечные суммы вида $x = n_1 g_1 + \dots + n_k g_k$, где $n_i \in \mathbf{Z}$, $g_i \in G$. Некоммутативность полугруппы G влечет некоммутативность кольца K . Всякий коммутатор элементов из K имеет вид $[x, y] = s_1 [\]_1 + \dots + s_m [\]_m$, где $s_i \in \mathbf{Z}$, $[\]_i = [g_i, g_i]$ для некоторых $g_i, g_i \in G$. Заметим, что $[g_1, g_2]g[g_1, g_2] = 0$ для любых $g, g_1, g_2 \in G$. Действительно, если $g = fc$, $g_1 = \varphi a$, $g_2 = \psi b$, то $[\varphi a, \psi b] = \varphi \psi a^\psi b - \varphi \psi b^\varphi a$. Откуда

$$\begin{aligned} [g_1, g_2]g[g_1, g_2] &= (\varphi \psi a^\psi b - \varphi \psi b^\varphi a)(fc)(\varphi \psi a^\psi b - \varphi \psi b^\varphi a) = \\ &= (\varphi \psi a^\psi b - \varphi \psi b^\varphi a)(f\varphi \psi c^{\varphi \psi} a^\psi b - f\varphi \psi c^{\varphi \psi} b^\varphi a) = \\ &= f\varphi \psi a^{\varphi \psi} b^{\varphi \psi} c^{\varphi \psi} a^\psi b - f\varphi \psi a^{\varphi \psi} b^{\varphi \psi} c^{\varphi \psi} a^\psi b - f\varphi \psi a^{\varphi \psi} b^{\varphi \psi} c^{\varphi \psi} a^\psi b + f\varphi \psi a^{\varphi \psi} b^{\varphi \psi} c^{\varphi \psi} a^\psi b = 0. \end{aligned}$$

Значит, $[x, y]^{m+1} = (s_1 [\]_1 + \dots + s_m [\]_m)^{m+1} = 0$.

Пусть теперь $u = []_1 \dots []_k \neq 0$ и $N \subset M$ – такое конечное подмножество, что носитель каждого элемента $g \in G$, входящего в произведение u , содержится в N . Если p, q – такие простые числа, что $p, q \nmid m$ для каждого $m \in N$, $[\varphi_p c, \varphi_q d] \neq 0$, и носители элементов c, d содержатся в $M \setminus N$, то $u[\varphi_p c, \varphi_q d] \neq 0$.

Пусть теперь $a = a_p$, $\psi = \varphi_p$, а $b^p = b$, $b^\psi = b$. Тогда $a^\psi = e$ и

$$0 \neq [\varphi a, \underbrace{\psi b, \dots, \psi b}_n] = \begin{cases} \varphi \psi a - \varphi \psi e & \text{при } n = 2m, \\ \varphi \psi b - \varphi \psi ba & \text{при } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Если A – группа, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K , то $A \in \text{BL}$, но не является ни E-разрешимой, ни E-энгелевой. Отметим, что в [6 – 9] автор изучал проективно инвариантные подгруппы. Близкие вопросы исследовались в [10 – 46].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чехлов А.Р. О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85 – 99.
2. Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
3. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520 – 539.
4. Чехлов А.Р. Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59 – 71.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
6. Чехлов А.Р. Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76 – 82.
7. Чехлов А.Р. О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31 – 36.
8. Чехлов А.Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211 – 218.
9. Чехлов А.Р. Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 942 – 953.
10. Чехлов А.Р. Пересечение прямых слагаемых абелевых p -групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 240 – 244.
11. Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1984. С. 137 – 152.
12. Чехлов А.Р. Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Абелевы группы и модули. Томск, 1985. С. 117 – 127.
13. Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Изв. вузов. Матем. 1985. № 8. С. 82 – 83.
14. Чехлов А.Р. Абелевы CS-группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1988. С. 131 – 147.
15. Чехлов А.Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1988. № 6. С. 80 – 83.
16. Чехлов А.Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1989. С. 139 – 153.
17. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 93 – 99.
18. Чехлов А.Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. вузов. Матем. 1989. № 10. С. 84 – 87.
19. Чехлов А.Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. № 3. С. 84 – 87.
20. Чехлов А.Р. О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. № 4. С. 58 – 67.

21. Чехлов А.Р. Об абелевых разложимых QCPI-группах без кручения p -ранга $\geq 2^{\aleph_0}$ // Абелевы группы и модули. Томск, 1990. С. 125 – 130.
22. Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p -ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. Томск, 1991. С. 157 – 178.
23. Чехлов А.Р. Об абелевых QCS-группах без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1994. С. 240 – 245.
24. Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. Томск, 1994. С. 3 – 52.
25. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения конечного p -ранга // Изб. докл. Межд. конф. «Всесиб. чтения по матем. и механ.» Томск, 1998. С. 240 – 245.
26. Чехлов А.Р. О вполне транзитивных системах групп без кручения // Исслед. по матем. анализу и алгебре. Томск, 1998. С. 240 – 245.
27. Чехлов А.Р. О вполне транзитивных системах групп без кручения, 2 // Исслед. по матем. анализу и алгебре. Томск, 2000. С. 181 – 190.
28. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 587 – 592.
29. Чехлов А.Р. Пересечения прямых слагаемых абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. С. 117 – 118.
30. Чехлов А.Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714 – 719.
31. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944 – 949.
32. Чехлов А.Р. Вполне транзитивные группы конечного p -ранга // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 6. С. 698 – 715.
33. Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики. 2001. Т. 7. № 2. С. 194 – 207.
34. Чехлов А.Р. О квазиполных смешанных группах // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 4. С. 1215 – 1224.
35. Chekhlov A.R. On Mixed cs-Groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 75 – 85.
36. Чехлов А.Р. О слабо квазисервантно инъективных группах // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 3. С. 434 – 447.
37. Chekhlov A.R., Krylov P.A. On L. Fuchs' problems 17 and 43 // J. of Math. Sci. 2007. V. 143. No 5. P. 3517 – 3602.
38. Чехлов А.Р. Упражнения по основам теории групп. Томск, 2004.
39. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р. Задачи по теории колец, модулей и полей. М.: Факториал Пресс, 2007.
40. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р. Упражнения по группам, кольцам и полям. Томск, 2008.
41. Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.
42. Чехлов А.Р. О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85 – 99.
43. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 64 – 67.
44. Чехлов А.Р. О нильгруппах p -ранга 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 53 – 58.
45. Chekhlov A.R. On Projective Invariant Subgroups of Abelian Groups // Journal of Math. Sci. 2010. V. 164. No 1. P. 143 – 147.
46. Чехлов А.Р. О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1163 – 1174.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 25.05.2010 г.