МАТЕМАТИКА

УДК 519.718
DOI 10.21685/2072-3040-2017-1-1

М. А. Алехина

НАДЕЖНОСТЬ ДВОЙСТВЕННЫХ СХЕМ В P_k [1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Увеличение сложности современных систем переработки, передачи и хранения информации выдвигает на первый план требование к надежности и контролю различных управляющих и вычислительных систем. Актуальной проблеме построения надежных схем, реализующих функции из P_k, при произвольных неисправностях элементов в полном конечном базисе посвящена эта статья. Ранее при $k = 2$ доказано, что ненадежность схемы, реализующей булеву функцию *f*, равна ненадежности двойственной схемы, построенной из элементов двойственного базиса B^* и реализующей функцию, двойственную функции *f*. Это свойство дает возможность переносить результаты о ненадежности схемы, реализующей булеву функцию f, в базисе B при заданных неисправностях элементов в другой, двойственный базис B^* для двойственной схемы, реализующей двойственную функцию f^* при определенных неисправностях. Например, результаты о ненадежности, доказанные для схемы, реализующей булеву функцию f в базисе B, при однотипных константных неисправностях типа 0 на выходах элементов справедливы для двойственной схемы, реализующей функцию f^* в базисе B^*, при однотипных константных неисправностях типа 1 на выходах элементов. Цель работы – получить ответы на вопросы: «Имеет ли место подобное свойство в P_k ($k \geq 3$)?», «Если “да”, то для каких базисов, функций и неисправностей?».

Материалы и методы. В работе используются ранее известные методы синтеза схем из ненадежных элементов.

Результаты. Доказано, что ненадежности двойственных (относительно перестановки, которую задает функция, называемая отрицанием Лукашевича) схем равны для функций k-значной логики. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, неисправности элементов.

M. A. Alekhina

RELAIBILITY OF DUAL CIRCUITS IN P_k

Abstract.

Background. Increasing complexity of modern data processing, transferring and soring systems highlights a demand for reliability and control of various controlling

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00451.

and computing systems. The article is devoted to a topical problem of constructing reliable circuits realizing functions from P_k at random gate failures in a complete finite basis. It has been proved earlier at $k = 2$ that reliability of a circuit, which realizes Boolean function *f*, equals unreliability of a dual circuit, built from gates of dual basis B^* and realizing a function that is dual to function *f*. This property makes it possible to transfer unreliability results of a circuit that realizes Boolean function f in basis B with given gate failures into another dual basis B^* for a dual circuit that realizes dual function f^* with given failures. For example, unreliability results, proved for a circuit that trealizes Boolean function f in basis B, with similar constant failures of type 0 at gate outputs are fair for a dual circuit that realizes function f^* in basis B^* with similar constant failures of type 1 at gate outputs. The goal of the work is to find answers to the following questions: «Does this property occur in P_k ($k \geq 3$)?», «If "yes", for what bases, functions and failures?».

Materials and methods. The study employed well-known methods of synthesis of circuits containing unreliable gates.

Results. It has been proved that unreliabilities of dual (in relation to a permutation, set by the function known as the Likasiewicz's negation) circuits are equal for functions of *k*-valued logic. The results obtained may be used in technical systems design to improve their relaibility.

Key words: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, failures of gates.

Пусть $n \in N$, $k \geq 2$, $E_k = \{0,1,...,k-1\}$, а P_k – множество всех функций k-значной логики, т.е. функций $f(x_1, ..., x_n): \{E_k\}^n \to E_k$. Рассмотрим реализацию функций из P_k схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе $B = \{e_1, \ldots, e_q\}$ ($q \geq 1$).

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – произвольная функция, а S – любая схема, ее реализующая в базисе B. Обозначим $\tilde{x}^n = (x_1, ..., x_n)$.

Ранее при $k = 2$ [1, 2] доказано, что ненадежность схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, равна ненадежности двойственной схемы S^*, построенной из элементов базиса $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_q^*\}$ и реализующей функцию $f^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, двойственную функции $f(\tilde{x}^n)$ (здесь e_j^* – булева функция, двойственная булевой функции e_j).

Это свойство дает возможность переносить результаты о ненадежности схемы S, реализующей булеву функцию f, в базисе B при заданных неисправностях элементов в другой, двойственный базис B^* для схемы S^*, реализующей двойственную функцию f^* при определенных [1, 2] неисправностях. Например [3–10], результаты о ненадежности, доказанные для схемы, реализующей булеву функцию f в базисе B, при однотипных константных неисправностях типа 0 справедливы для двойственной схемы, реализующей функцию f^* в базисе B^*, при однотипных константных неисправностях типа 1.

Возникают вопросы: «Имеет ли место подобное свойство в P_k ($k \geq 3$)?», «Если “да”, то для каких базисов, функций и неисправностей? А главное – относительно какой перестановки рассматривать двойственность?».

Ответы на эти вопросы для функций k-значной логики ранее были неизвестны и впервые получены в этой работе. Но прежде чем доказывать результаты, касающиеся надежности схем, введем понятие двойственной функции в P_k.

Функцию $f^*(x_1,...,x_n) = N(f(Nx_1,...,Nx_n))$ (здесь функция $Nx = (k-1) - x$ – отрицание Лукашевича) назовем функцией, ***двойственной*** функции $f(x_1,...,x_n)$ относительно перестановки на множестве $\{0,1,...,k-1\}$, которую задает функция Nx.

Замечание 1. В P_k понятие двойственной функции вводится относительно перестановки на множестве E_k (например, см. [11, с. 41]), но поскольку других перестановок, кроме той, что задает функция Nx, в этой статье мы не рассматриваем, далее будем говорить о двойственности схем, не упоминая перестановку.

Обозначим $N(\tilde{x}^n) = (Nx_1,...,Nx_n)$. Нетрудно доказать теорему о суперпозиции двойственных функций.

Теорема 1. Если $F(\tilde{x}^n) = f(f_1(\tilde{x}^n),...,f_p(\tilde{x}^n))$, то

$$F^*(\tilde{x}^n) = f^*(f_1^*(\tilde{x}^n),...,f_p^*(\tilde{x}^n)).$$

Действительно,

$$F^*(\tilde{x}^n) = (f(f_1(\tilde{x}^n),\ ...,f_p(\tilde{x}^n)))^* = Nf(f_1(N\tilde{x}^n),\ ...,f_p(N\tilde{x}^n)) =$$

$$= Nf(N(Nf_1(N\tilde{x}^n)),\ ...,N(Nf_p(N\tilde{x}^n))) = Nf(Nf_1^*(\tilde{x}^n),\ ...,Nf_p^*(\tilde{x}^n)) =$$

$$= f^*(f_1^*(\tilde{x}^n),\ ...,f_p^*(\tilde{x}^n)).$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что $(x)^* = N(Nx) = x$.

Теперь рассмотрим реализацию функций из P_k схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе $B = \{e_1,\ldots,e_q\}$. Без ограничения общности будем предполагать, что все базисные функции e_j ($j \in \{1,\ldots,q\}$) зависят не более чем от m ($m \geq 2$) переменных. Считаем, что схема реализует функцию $f(x_1,\ ...,\ x_n)$, если она реализует f при отсутствии неисправностей. Предполагается, что неисправности элементов произвольные и статистически независимые, т.е. все элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Как и в [12], вводятся понятия вероятности ошибки на выходе схемы, вероятности правильного значения на выходе схемы, надежности схемы и ненадежности схемы.

Функционирование m-входового базисного элемента E_j ($j \in \{1,2,...,q\}$) с приписанной ему функцией $e_j(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ можно задать табл. 1, в которой $p_0, p_1, \ldots, p_{k-2}$ и p_{k-1} – вероятности появления 0, 1,…, $k-2$ и $k-1$ на выходе элемента E_j (числа $\alpha_{i,l} \ge 0$, $i \in E_k$, $l \in \{0,1,\ldots,k^m-1\}$).

Базисный элемент E_j^* с приписанной ему функцией $e_j^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ назовем двойственным элементу E_j с функцией $e_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если он функционирует согласно табл. 2.

Две схемы S и S^* назовем двойственными, если одна получается из другой заменой всех элементов на двойственные им элементы соответственно. Очевидно, что если схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, то схема S^* реализует двойственную функцию ей функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n) = N(f(Nx_1, \ldots, Nx_n))$ (см. теорему 1).

Теорема 2. Пусть S – любая схема с n входами и одним выходом, $f(x_1, \ldots, x_n)$ – функция, которую реализует схема S. Тогда для любого $i \in E_k$ и для любого входного набора $\tilde{a}^n$ схемы S верно равенство

$$P_i(S, \tilde{a}^n) = P_{Ni}\left(S^*, N(\tilde{a}^n)\right),$$

где S^* – схема, двойственная схеме S; $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ – функция, двойственная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, которую реализует схема S^*; $N(\tilde{a}^n) = (Na_1, \ldots, Na_n)$.

Доказательство теоремы 2 нетрудно провести методом математической индукции по l – числу элементов в схеме S, аналогично тому, как это сделано в [2].

При $l = 0$ в схеме S нет функциональных элементов, а поскольку у нее один выход, она реализует переменную, приписанную полюсу. В этом случае схема S^* есть схема S (см. замечание 2), а все вероятности ошибок на выходе схем S и S^* равны нулю, а вероятности верных значений равны 1. Поэтому утверждение теоремы верно.

Пусть $l \ge 1$. При $l = 1$ утверждение теоремы следует из табл. 1 и 2.

Предположим, что утверждение теоремы верно для двойственных схем, число элементов в которых не более $(l-1)$.

Пусть схема S содержит l элементов и реализует некоторую функцию f. Выделим элемент E, содержащий выход схемы S. Обозначим через A схему, полученную из схемы S удалением элемента E, а выходы схемы A занумеруем числами 1,…, r слева направо.

Пусть $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы A, $i \in E_k$. Вычислим вероятность появления значения i на выходе схемы S и получим:

$$P_i(S, \tilde{a}^n) = p_{00\ldots0}\alpha_{i,0} + p_{00\ldots1}\alpha_{i,1} + \ldots$$
$$\ldots + p_{k-1k-1\ldots k-2}\alpha_{i,k^m-2} + p_{k-1k-1\ldots k-1}\alpha_{i,k^m-1}, \qquad (1)$$

где $p_{00\ldots0}, p_{00\ldots1}, \ldots, p_{k-1k-1\ldots k-2}, p_{k-1k-1\ldots k-1}$ – вероятности появления наборов $(0,0,..0) = \tilde{0}^r$, (0,0,…,1), (k – 1, k – 1, …, k – 2) и $(k-1, k-1, \ldots, k-1) = \tilde{k}^r$ длины r на выходах схемы A соответственно.

Таблица 1

x_1	x_2	…	ε	$e_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$	$1-\varepsilon$	$1-\varepsilon$	…	ε	$1-\varepsilon$
p_2	$x_1 \& x_2$	…	0	$e_j(0, 0, \ldots, 0)$	$E_{\&}^2$	$1-\varepsilon$	…	ε	$1-\varepsilon$
$1-\varepsilon$	0	…	1	$e_j(0, 0, \ldots, 1)$	ε	p_2		$x_1 \vee x_2$	ε
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$k-1$	$k-1$	…	$k-2$	$e_j(k-1, k-1, \ldots, k-2)$	$1-\varepsilon$	p_1	…	$E_{\vee}^0$	$\varepsilon > 0$
$k-1$	$k-1$	…	$k-1$	$e_j(k-1, k-1, \ldots, k-1)$	$(x_1 \vee x_2)^* = x_1$	$x_1 \vee x_2 = \max($	…	$\overset{*}{B}$	$\overset{*}{B}$

Таблица 2

x_1	x_2	…	x_m	$\overset{*}{e}_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$	p_0	p_1	…	p_{k-2}	p_{k-1}
0	0	…	0	$Ne_j(k-1, k-1, \ldots, k-1)$	α_{k-1, k^m-1}	α_{k-2, k^m-1}	…	α_{1, k^m-1}	α_{0, k^m-1}
0	0	…	1	$Ne_j(k-1, k-1, \ldots, k-2)$	α_{k-1, k^m-2}	α_{k-2, k^m-2}		α_{1, k^m-2}	α_{0, k^m-2}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$k-1$	$k-1$	…	$k-2$	$Ne_j(0, 0, \ldots, 1)$	$\overset{*}{A}$	$\overset{*}{A}$	…	$i \in E_3$	$E_{\&}^0$
$k-1$	$k-1$	…	$k-1$	$Ne_j(0, 0, \ldots, 0)$	$\overset{*}{A}$	A	…	$E_{\&}^2$	$E_{\&}^0$

По схеме S построим двойственную схему S^* и выделим элемент E^*, содержащий выход схемы S^*. Обозначим через A^* схему, получаемую из схемы S^* удалением элемента E^*, а ее выходы также занумеруем числами 1,…, r слева направо.

Для входного набора $N(\tilde{a}^n)$ вероятность появления Ni на выходе схемы S^* равна

$$P_{Ni}(S^*, N(\tilde{a}^n)) = p^*_{00\ldots0}\alpha^*_{Ni,0} + p^*_{00\ldots1}\alpha^*_{Ni,1} + \ldots$$

$$\ldots + p^*_{k-1k-1\ldots k-2}\alpha^*_{Ni,k^m-2} + p^*_{k-1k-1\ldots k-1}\alpha^*_{Ni,k^m-1}, \quad (2)$$

где $p^*_{00\ldots0}, p^*_{00\ldots1}, \ldots, p^*_{k-1k-1\ldots k-2}, p^*_{k-1k-1\ldots k-1}$ – вероятности появления наборов

$$\left(0,0,..0\right) = \tilde{0}^r,\ (0,0,\ldots,1),\ (k-1,\ k-1,\ \ldots,\ k-2) \text{ и } \left(k-1, k-1, \ldots, k-1\right) = \tilde{k}^r$$

длины r на выходах схемы A^* соответственно; $\alpha^*_{Ni,y}$ – вероятность появления значения Ni на выходе схемы при поступлении на входы элемента E^* k-ичного набора, которому соответствует число $y \in \{0,1,\ldots,k^m-1\}$.

Поскольку $\alpha^*_{Ni,y} = \alpha_{i,k^m-1-y}$ (см. табл. 1 и 2), из (2) получаем равенство

$$P_{Ni}(S^*, N(\tilde{a}^n)) = p^*_{00\ldots0}\alpha_{i,k^m-1} + p^*_{00\ldots1}\alpha_{i,k^m-2} + \ldots$$

$$\ldots + p^*_{k-1k-1\ldots k-2}\alpha_{i,1} + p^*_{k-1k-1\ldots k-1}\alpha_{i,0}, \quad (3)$$

К каждому из r выходов схем A и A^* применимо индуктивное предположение, согласно которому $P_i^t(A, \tilde{a}^n) = P_{Ni}^t(A^*, N(\tilde{a}^n))$ (t – номер выхода схем, $t \in \{1,\ldots,r\}$). Тогда вероятность появления набора $\tilde{b}^m = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ($b_1, b_2, \ldots, b_m \in E_k$) на выходах схемы A и вероятность появления набора $N(\tilde{b}^m) = (Nb_1, Nb_2, \ldots, Nb_m)$ на выходах схемы A^* равны как произведения равных множителей. Поэтому

$$p^*_{00\ldots0} = p_{k-1k-1\ldots k-1},\ p^*_{00\ldots1} = p_{k-1k-1\ldots k-2}, \ldots,$$

$$p^*_{k-1k-1\ldots k-2} = p_{00\ldots1},\ p^*_{k-1k-1\ldots k-1} = p_{00\ldots0}. \quad (4)$$

Из формул (1)–(4) получаем равенство

$$P_i(S, \tilde{a}^n) = P_{Ni}(S^*, N(\tilde{a}^n)).$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. Ненадежности двойственных схем S и S^* равны, т.е. верно равенство $P(S) = P(S^*)$.

Таким образом, надежности двойственных (относительно перестановки, определяемой функцией Nx) схем также равны для функций k-значной логики.

В частности, например, утверждение о надежности схемы, реализующей k-значную функцию f, в базисе B:

– при однотипных константных неисправностях типа 0 на выходах элементов справедливо для надежности двойственной схемы, реализующей функцию f^*, в базисе B^* при однотипных константных неисправностях типа $(k-1)$ на выходах элементов;

– при инверсных неисправностях [13] на выходах элементов справедливо для надежности двойственной схемы, реализующей функцию f^*, в базисе B^* при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Покажем, как можно использовать теорему 2.

Пример 1. Пусть $k=3$, полный конечный базис содержит функции $x_1 \& x_2 = \min(x_1, x_2)$ и $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ (например, базис Россера – Туркетта $B = \{0,1,2,J_0(x_1),J_1(x_1),J_2(x_1),x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$).

Нетрудно проверить, что $x_1 \& x_2 = N((Nx_1) \vee (Nx_2))$, $x_1 \vee x_2 = N((Nx_1) \& (Nx_2))$, т.е. $(x_1 \vee x_2)^* = x_1 \& x_2$, $(x_1 \& x_2)^* = x_1 \vee x_2$.

Пусть базисные элементы с вероятностью ε ($\varepsilon > 0$) подвержены неисправностям типа 0. С помощью табл. 3 и 4 покажем, как при таких неисправностях функционируют элемент $E^0_\&$ с функцией $x_1 \& x_2$ (табл. 3) и элемент $E^0_\vee$ с функцией $x_1 \vee x_2$ (табл. 4).

Таблица 3

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	p_0	p_1	p_2
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	2	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
1	2	1	ε	$1-\varepsilon$	0
2	0	0	1	0	0
2	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
2	2	2	ε	0	$1-\varepsilon$

Теперь пусть базисные элементы с вероятностью ε ($\varepsilon > 0$) подвержены неисправностям типа 2. С помощью табл. 5 и 6 покажем, как при таких неисправностях функционируют элемент $E^2_\&$ с функцией $x_1 \& x_2$ (табл. 5) и элемент $E^2_\vee$ с функцией $x_1 \vee x_2$ (табл. 6).

Из табл. 3 и 6 видно, что элементы $E^0_\&$ и $E^2_\vee$ являются двойственными, а из табл. 4 и 5 видно, что элементы $E^0_\vee$ и $E^2_\&$ являются двойственными.

Таблица 4

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	p_0	p_1	p_2
0	0	0	1	0	0
0	1	1	ε	$1-ε$	0
0	2	2	ε	0	$1-ε$
1	0	1	ε	$1-ε$	0
1	1	1	ε	$1-ε$	0
1	2	2	ε	0	$1-ε$
2	0	2	ε	0	$1-ε$
2	1	2	ε	0	$1-ε$
2	2	2	ε	0	$1-ε$

Таблица 5

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	p_0	p_1	p_2
0	0	0	$1-ε$	0	ε
0	1	0	$1-ε$	0	ε
0	2	0	$1-ε$	0	ε
1	0	0	$1-ε$	0	ε
1	1	1	0	$1-ε$	ε
1	2	1	0	$1-ε$	ε
2	0	0	$1-ε$	0	ε
2	1	1	0	$1-ε$	ε
2	2	2	0	0	1

Таблица 6

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	p_0	p_1	p_2
0	0	0	$1-ε$	0	ε
0	1	1	0	$1-ε$	ε
0	2	2	0	0	1
1	0	1	0	$1-ε$	ε
1	1	1	0	$1-ε$	ε
1	2	2	0	0	1
2	0	2	0	0	1
2	1	2	0	0	1
2	2	2	0	0	1

Возьмем два элемента $E_{\&}^0$, один элемент $E_{\vee}^0$ и построим схему A, соединив выходы элементов $E_{\&}^0$ со входами элемента $E_{\vee}^0$. Построим также схему A^*, двойственную схеме A, заменив в схеме A элементы $E_{\&}^0$ на элементы $E_{\vee}^2$, а элемент $E_{\vee}^0$ на элемент $E_{\&}^2$. По теореме 2 при всех $i \in E_3$ равны вероятности:

$$P_i(A, \tilde{a}^4) = P_{Ni}(A^*, N(\tilde{a}^4)),$$

а следовательно, ненадежность схемы A при неисправностях типа 0 равна ненадежности схемы A^* при неисправностях типа 2: $P(A) = P(A^*)$.

Аналогично нетрудно проверить, что при неисправностях типа 1 на выходах базисных элементов ненадежности (а также надежности) схем A и A^* равны.

Библиографический список

1. **Алехина, М. А.** Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов : дис. … д-ра физ.-мат. наук / Алехина М. А. – Пенза, 2004. – 169 с.
2. **Алехина, М. А.** О надежности двойственных схем в полном конечном базисе / М. А. Алехина, П. Г. Пичугина // Синтез и сложность управляющих систем : материалы XVIII Междунар. школы-семинара имени академика О. Б. Лупанова (г. Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. – С. 10–13.
3. **Алехина, М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59–74.
4. **Алехина, М. А.** Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов / М. А. Алехина // Математические вопросы кибернетики. – 2002. – № 11. – С. 193–218.
5. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях элементов / М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2005. – Т. 12, № 2. – С. 3–11.
6. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – № 6 (21). – 2005. – С. 36–41.
7. **Алехина, М. А.** Верхние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при инверсных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина, А. В. Шилов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. : Физико-математические науки. – 2006. – № 5. – С. 4–6.
8. **Алехина, М. А.** Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисе $\{\&, \vee, -\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / М. А. Алехина, В. В. Чугунова // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, № 4. –С. 3–17.
9. **Алехина, М. А.** Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с ненадежностью 2ε / М. А. Алехина, А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2010. – № 5. – С. 79–82.
10. **Алехина, М. А.** О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, № 3. – С. 17–24.
11. **Марченков, С. С.** Функциональные системы : учеб. пособие / С. С. Марченков. – М. : МАКС Пресс, 2012. – 47 с.
12. **Алехина, М. А.** Синтез схем из ненадежных элементов в P_k / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 3–10.
13. **Барсукова, О. Ю.** Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик : дис. … канд. физ.-мат. наук / Барсукова О. Ю. – Пенза, 2014. – 87 с.

References

1. Alekhina M. A. *Sintez, nadezhnost' i slozhnost' skhem iz nenadezhnykh funktsional'nykh elementov: dis. d-ra fiz.-mat. nauk* [Synthesis, reliability and complexity of circuits containing unreliable functional gates: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Penza, 2004, 169 p.
2. Alekhina M. A., Pichugina P. G. *Sintez i slozhnost' upravlyayushchikh sistem: materialy XVIII Mezhdunar. shkoly-seminara imeni akademika O. B. Lupanova (g. Penza, 28 sentyabrya – 3 oktyabrya 2009 g.)* [Synthesis and complexity of control systems: proceedings of XVIII International school-seminar named after academician O.B. Lupanov (Penza, 28th September – 3rd October 2009)]. Moscow: Izd-vo mekh.-mat. f-ta MGU, 2009, pp. 10–13.
3. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, pp. 59–74.
4. Alekhina M. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. 2002, no. 11, pp. 193–218.
5. Alekhina M. A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 1* [Discrete analysis and study of operations. Series 1]. 2005, vol. 12, no. 2, pp. 3–11.
6. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Estestvennye nauki* [University proceedings. Volga region. Natural sciences]. 2005, no. 6 (21), pp. 36–41.
7. Alekhina M. A., Shilov A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2006, no. 5, pp. 4–6.
8. Alekhina M. A., Chugunova V. V. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 1* [Discrete analysis and study of operations. Series 1]. 2006, vol. 13, no. 4, pp. 3–17.
9. Alekhina M. A., Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2010, no. 5, pp. 79–82.
10. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, no. 3, pp. 17–24.
11. Marchenkov S. S. *Funktsional'nye sistemy: ucheb. posobie* [Fucntional systems: tutorial]. Moscow: MAKS Press, 2012, 47 p.
12. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 3–10.
13. Barsukova O. Yu. *Sintez nadezhnykh skhem, realizuyushchikh funktsii dvuznachnoy i trekhznachnoy logik: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Synthesis of reliable circuits realizing fucntions of 2-valued and 3-valued logic: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Penza, 2014, 87 p.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Пензенский государственный технологический университет (Россия, г. Пенза, проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1)

E-mail: ama@sura.ru

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of mathematics, Penza State Technological University (1a/1 Baydukova lane/Gagarina street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Надежность двойственных схем в P_k / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 1 (41). – С. 3–13. DOI 10.21685/2072-3040-2017-1-1