

УДК 519.148

МОЗАИКИ ИЗ ВЫПУКЛЫХ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ

О. Г. Багина

TILING THE PLANE WITH CONVEX PENTAGONS

O. G. Bagina

Обсуждается задача классификации пятиугольников, покрывающих плоскость ребро к ребру. Доказывается, что в любом таком покрытии плоскости имеется пятиугольник, набор степеней вершин которого может быть одним из следующих: (3,3,3,3,3), (3,3,3,3,4), (3,3,3,3,5), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4). Это дает возможность организовать перебор, который в конечном счете приводит к исчерпывающей классификации таких пятиугольников.

We consider the problem of classifying the convex pentagons that tile the plane edge-to-edge. It is proved that in each such tiling of the plane by pentagons, there exists a tile whose set of vertex degrees can be one of the following: (3,3,3,3,3), (3,3,3,3,4), (3,3,3,3,5), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4). This provides the possibility of searching which finally leads to exhaustive classification of such pentagons.

Ключевые слова: выпуклый пятиугольник, мозаика, плоскость.

Keywords: convex pentagon, tiling the plane, plane.

1. Введение

Многоугольник P покрывает плоскость, если существует покрытие плоскости многоугольниками, конгруэнтными данному, такое, что никакие два многоугольника не имеют общих внутренних точек. Такую плоскость называют мозаикой, а сам многоугольник P – плиткой этой мозаики.

Известно, что выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, выложить плоскость невозможно. Легко видеть, что любым треугольником и четырехугольником можно выложить плоскость. Мозаики из шестиугольников были исследованы в 1918 г. Рейнхардом – **Ошибка! источник ссылки не найден.**

Он перечислил все выпуклые шестиугольники, которыми можно выложить плоскость. Их оказалось 3 типа.

Проблема построения исчерпывающей классификации выпуклых пятиугольников, которыми можно выложить плоскость, остается до сих пор нерешенной. Было найдено 14 типов таких пятиугольников. Но нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Некоторые мозаики из выпуклых пятиугольников были известны еще в древности. В 1918 г. Рейнхард в своей докторской диссертации **Ошибка! источник ссылки не найден** перечислил пять типов таких пятиугольников. В 1968 г. Кершнер нашел еще три типа пятиугольников, покрывающих плоскость [1]. Десятый тип таких пятиугольников был найден Джеймсом в 1975 г. Типы 9, 11 – 13 из приведенного ниже списка найдены Райс в 1976 – 1977 гг. Последний 14 тип в 1985 г. открыл Штейн.

Мозаика называется мозаикой ребро к ребру, если для любых двух плиток мозаики выполняется одно из следующих условий: 1) плитки не имеют общих точек; 2) плитки имеют ровно одну общую вершину; 3) плитки имеют ровно одно общее ребро.

На сегодня известно 14 различных типов выпуклых пятиугольников, покрывающих плоскость, 13 типов таких пятиугольников

перечислила Шаттштейнер в **Ошибка! источник ссылки не найден.**

Обозначим последовательные вершины пятиугольника X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 , его углы – соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Известны следующие типы пятиугольников, покрывающих плоскость:

1. $x_0 + x_1 = 180^\circ$;
2. $x_0 + x_2 = 180^\circ$, $C_1 = C_3$;
3. $x_0 = x_2 = x_3 = 120^\circ$, $C_0 = C_1$, $C_3 = C_2 + C_4$;
4. $x_0 = x_2 = 90^\circ$, $C_0 = C_1$, $C_2 = C_3$;
5. $x_2 = 2x_0 = 120^\circ$, $C_0 = C_1$, $C_2 = C_3$;
6. $x_1 + x_3 = 180^\circ$, $x_0 = 2x_3$, $C_0 = C_1 = C_2$, $C_3 = C_4$;
7. $x_0 + 2x_3 = 360^\circ$, $x_2 + 2x_1 = 360^\circ$, $C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_0 = 360^\circ$, $x_2 + 2x_3 = 360^\circ$, $C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
9. $x_1 + 2x_4 = 360^\circ$, $x_2 + 2x_3 = 360^\circ$, $C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
10. $x_4 = 90^\circ$, $x_0 + x_3 = 180^\circ$, $2x_1 - x_3 = 180^\circ$, $2x_2 + x_3 = 360^\circ$, $C_0 = C_4 = C_1 + C_3$;
11. $x_0 = 90^\circ$, $x_2 + x_4 = 180^\circ$, $2x_1 + x_2 = 360^\circ$, $C_3 = C_4 = 2C_0 + C_2$;
12. $x_0 = 90^\circ$, $x_2 + x_4 = 180^\circ$, $2x_1 + x_2 = 360^\circ$, $2C_0 = C_3 = C_2 + C_4$;
13. $x_0 = x_2 = 90^\circ$, $2x_1 = 2x_4 = 360^\circ - x_3$, $C_2 = C_3$, $2C_2 = C_4$;
14. $x_3 = 90^\circ$, $x_0 + x_2 = 180^\circ$, $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$, $C_0 = 2C_2 = 2C_4$.

В работе рассматривается задача перечисления всех выпуклых пятиугольников, которые покрывают плоскость ребро к ребру. Однако некоторые из таких пятиугольников могут также покрывать плоскость и не ребро к ребру.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пятиугольник, покрывающий плоскость ребро к ребру, относится к одному из следующих типов:

- 1) $x_0 + x_1 = 180^\circ$, $C_0 = C_2$ или $C_3 = C_4$;
- 2) $x_0 + x_2 = 180^\circ$, $C_1 = C_3$, $C_0 = C_2$;
- 3) $x_0 = x_2 = 90^\circ$, $C_0 = C_1$, $C_2 = C_3$;
- 4) $x_2 = 2x_0 = 120^\circ$, $C_0 = C_1$, $C_2 = C_3$;
- 5) $x_1 + x_3 = 180^\circ$, $x_0 = 2x_3$, $C_0 = C_1 = C_2$, $C_3 = C_4$;
- 6) $x_0 + 2x_3 = 360^\circ$, $x_2 + 2x_1 = 360^\circ$, $C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;

$$7) x_1 + 2x_0 = 360^\circ, x_2 + 2x_3 = 360^\circ, C_0 = C_1 = C_2 = C_3;$$

$$8) x_1 + 2x_4 = 360^\circ, x_2 + 2x_3 = 360^\circ, C_0 = C_1 = C_2 = C_3;$$

2. Предложение о центральной плитке

Пусть P – произвольная ребро к ребру мозаика из пятиугольников. P – ее плитка.

Степенью вершины P называется число сходящихся в ней пятиугольников. Степень любой вершины не может быть меньше трех.

Пусть $(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ – строка, в которой $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_4$, и каждое из чисел является степенью одной из вершин P . Такие строки будем называть набором степеней. Доказательство теоремы основывается на следующем предложении.

Предложение 1. В любой ребро к ребру пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин может быть одним из следующих: $(3,3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,3,5)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$.

Такой пятиугольник мозаики будем называть центральным.

Лемма. Пусть P – произвольная мозаика. Тогда в ней существует бесконечная последовательность множеств U_i – объединение конечного числа многоугольников из P , $i = 1, 2, \dots$ таких, что:

$$(1) \Gamma_i \rightarrow \infty,$$

$$(2) \gamma_i/\Gamma_i \rightarrow 0,$$

$$(3) \chi_i = 1 \text{ при } i = 1, 2, \dots,$$

где Γ_i – число внутренних многоугольников в U_i , γ_i – число граничных многоугольников для U_i , χ_i – эйлерова характеристика U_i .

Доказательство этой леммы приведено в **Ошибке! источник ссылки не найден, Ошибка! источник ссылки не найден.**

Доказательство предложения. Предположим, что в выбранной пятиугольной мозаике каждая плитка имеет набор степеней вершин, отличный от перечисленных в теореме.

Пусть U_i – указанные в лемме множества. Γ_i – число внутренних плиток, γ_i – число граничных плиток. Подсчитаем эйлерову характеристику $-\chi_i$ по «вкладам» отдельных плиток: если какая-нибудь вершина принадлежит α плиткам из U_i , то вклад в χ_i каждой из этих плиток для этой вершины равен $1/\alpha$. Каждая внутренняя плитка для U_i имеет одного соседа для каждой стороны, значит плитка «вносит» $1/2$ часть каждой стороны. Для k -й плитки в j -ой вершине сходится α_k^j плиток из U_i . Вклад каждой внутренней плитки в χ_i равен:

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{\alpha_k^0} + \dots + \frac{1}{\alpha_k^4} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha_k^0} + \dots + \frac{1}{\alpha_k^4},$$

где набор $(\alpha_k^0, \dots, \alpha_k^4)$ может быть разным для разных плиток покрытия. Обозначим:

$$\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_4) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha_0} + \dots + \frac{1}{\alpha_4}.$$

Тогда вклад всех внутренних плиток равен

$$\sum \Delta(\alpha_k^0, \dots, \alpha_k^4),$$

где сумма берется по всем внутренним плиткам. Вклад всех граничных плиток равен $\gamma_i(1+5\theta_i)$, $|\theta_i| < 1$,

где $5\theta_i$ – это разность между вкладами вершин и ребер всех граничных плиток.

Так как $\chi_i = 1$, то

$$\sum \Delta(\alpha_k^0, \dots, \alpha_k^4) + \gamma_i(1+5\theta_i) = 1.$$

Поделим обе части на Γ_i :

$$\frac{1}{\Gamma_i} \sum \Delta(\alpha_k^0, \dots, \alpha_k^4) = \frac{1}{\Gamma_i} - \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} (1+5\theta_i). \quad (1)$$

Для перечисленных в предложении наборов степеней имеем:

$$\Delta(3,3,3,3,3) >$$

$$\Delta(3,3,3,3,4) > \Delta(3,3,3,3,5) > \Delta(3,3,3,3,6) > \Delta(3,3,3,4,4) \geq 0.$$

Заметим, для любого другого набора степеней вершин $(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ справедливо неравенство

$$\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_4) \leq -1/42.$$

Действительно, если $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$, $\alpha_4 \geq 7$, то

$$\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_4) = -\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{\alpha_4} = -\frac{1}{6} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_4} \leq -\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = -\frac{1}{42}.$$

Если $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\alpha_3 \geq 4$, $\alpha_4 \geq 5$, то

$$\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_4) \leq -\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < -\frac{1}{42}.$$

Если $\alpha_0 = \alpha_1 = 3$, $\alpha_2 \geq 4$, $\alpha_3 \geq 4$, $\alpha_4 \geq 4$, то

$$\Delta(\alpha_0, \dots, \alpha_4) \leq -\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < -\frac{1}{42}.$$

Поскольку, по предположению, в мозаике нет плиток с указанными в предложении наборами степеней вершин, то для левой части равенства (1) имеем:

$$\frac{1}{\Gamma_i} \sum \Delta(\alpha_k^0, \dots, \alpha_k^4) \leq \frac{1}{\Gamma_i} \sum \left(-\frac{1}{42} \right) = -\frac{1}{42}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma_i} - \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} (1+5\theta_i) \leq -\frac{1}{42}.$$

Так как в силу леммы $\Gamma_i \rightarrow \infty$, $\gamma_i/\Gamma_i \rightarrow 0$, то $0 \leq -1/42$, противоречие. Предложение доказано.

3. Определения и обозначения

Пусть P – центральный пятиугольник мозаики P .

В дальнейшем будем обозначать вершины и стороны пятиугольника цифрами от 0 до 4.

Пусть v_i – степень i -й вершины пятиугольника P , $v(P) = v_0v_1v_2v_3v_4$ – последовательность степеней вершин P . Например, запись $v(P) = 33344$ означает, что $v_0 = v_1 = v_2 = 3$, $v_3 = v_4 = 4$. Как доказано выше, $v(P)$ может принимать с точностью до порядка цифр одно из пяти значений: 33333, 33334, 33335, 33336, 33344. С учетом всех возможных перестановок мы имеем для $v(P)$ 26 значений.

Будем считать, что стороны i, j в P одинакового типа, если их длины равны. Типы сторон будем нумеровать цифрами от 1 до 5. Пусть $\delta(i)$ – это тип i -й стороны пятиугольника P . Обозначим

$\delta(P) = \delta(0)\delta(1)\delta(2)\delta(3)\delta(4)$ – тип пятиугольника P . Тогда, например, запись $\delta(P) = 11212$ означает, что $C_0 = C_1 = C_3$, $C_2 = C_4$.

Учитывая, что нумерацию можно начинать с любой вершины и менять направление, имеется ровно 12 различных типов $\delta(P)$: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

Обозначим T_i – множество пятиугольников, углы и стороны которых удовлетворяют соотношениям, перечисленным в i -м пункте теоремы из введения, $i = 1, \dots, 8$.

Два пятиугольника мозаики, имеющие общую вершину или ребро, назовем смежными пятиугольниками. Фигура, состоящая из P и всех пятиугольников, смежных с P , называется короной для пятиугольника P **Ошибка! источник ссылки не найден**.

Очевидно, что для существования мозаики из пятиугольников, необходимо существование короны для каждого пятиугольника мозаики. Поиск корон для P осуществляется последовательно для каждого типа $\delta(P)$.

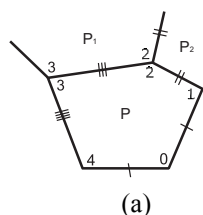
Предложение 2. Если тип пятиугольника $\delta(P)$ один из следующих: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, то он принадлежит одному из множеств T_i , $i = 1, 2, 3, 4$, либо не имеет ни одной короны, либо имеет один из четырех наборов углов:

$$x_0 = 180^\circ - x_4, x_1 = 90^\circ + x_4/2, x_2 = 180^\circ - x_4, x_3 = 90^\circ + x_4/2;$$

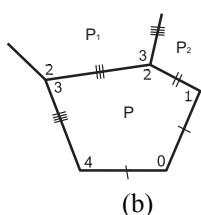
$$x_0 = 90^\circ, x_1 = 135^\circ, x_2 = x_4 = 112,5^\circ, x_3 = 90^\circ;$$

$$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 150^\circ, x_3 = 45^\circ, x_4 = 105^\circ;$$

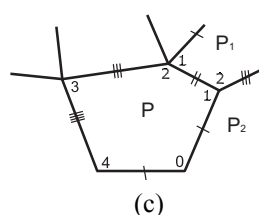
$$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 160^\circ, x_3 = 40^\circ, x_4 = 100^\circ.$$



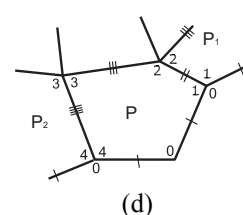
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 2. К лемме 2

Пусть $v_2 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 3 плитки P . Если плитки P и P_1 ориентированы противоположно, то плитка P_2 имеет две смежные стороны типа 2 (рис. 2a). Пусть плитки P и P_1 ориентированы одинаково. Тогда плитка P_2 имеет две смежные стороны типов 2 и 4 (рис. 2b). В обоих случаях получаем противоречие. Аналогично рассуждаем в случае $v_3 = 3$.

Пусть $v_2 = v_3 = 4$. Тогда $v_1 = v_4 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 2 плитки P . Если плитки P и P_1 имеют одинаковые ориентации, то плитка P_2 имеет две смежные стороны типов 1 и 3 (рис. 2c), что не так. Пусть плитки P и P_1 имеют противоположные ориентации. Пусть плитка P_2 приложена к стороне 4 плитки P . Если эти плитки имеют одинаковые ориентации, то плитка,

Во всех четырех случаях корона не может быть продолжена до покрытия плоскости.

Доказательство этого утверждения – содержание пунктов 4 и 5. Отметим, что тип 11111 рассмотрен в **Ошибка! источник ссылки не найден**. По оставшимся типам 11122, 11112 публикация готовится. Доказательство теоремы из введения будет получено после рассмотрения двух последних типов пятиугольников.

4. Первые девять типов

Лемма 1. Если $\delta(P) = 12345$, то плитка P не имеет ни одной короны.

Доказательство. Пусть P имеет корону. Достаточно рассмотреть случай, когда, например, $v_0 = 3$. Если плитки P и P_1 ориентированы одинаково, то плитка P_2 (рис. 1a) имеет две одинаковые стороны. Если плитки ориентированы противоположно, то плитка P_2 (рис. 1b) имеет две смежные стороны типов 2 и 5. В обоих случаях получаем противоречие. Лемма доказана.

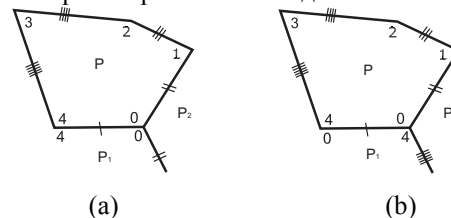


Рис. 1. К лемме 1

Лемма 2. Если $\delta(P) = 11234$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1$.

Доказательство. Пусть P имеет корону. Так как $v(P)$ содержит, по меньшей мере, три тройки, достаточно рассмотреть три случая: $v_2 = 3$, $v_3 = 3$, $v_2 = v_3 = 4$.

приложенная к стороне 0 плитки P , имеет две смежные стороны типов 1 и 3, что не так. Пусть плитки P и P_2 имеют противоположные ориентации (рис. 2d).

$$\text{Тогда } x_0 + 2x_1 = 360^\circ, x_0 + 2x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_4 \Rightarrow x_0 + x_1 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $\delta(P) = 11232$, то плитка P не имеет ни одной короны, либо $P \in T_1$.

Доказательство. Пусть P имеет корону. Достаточно рассмотреть три случая: $v_2 = 3$, $v_3 = 3$, $v_2 = v_3 = 4$.

Пусть $v_2 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 3 плитки P . Тогда плитка P_2 имеет две

смежные стороны типа 2 (рис. 3а), противоречие. Аналогично рассуждаем в случае $v_3 = 3$.

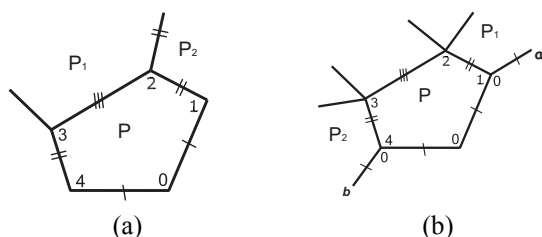


Рис. 3. К лемме 3

Пусть $v_2 = v_3 = 4$. Тогда $v_1 = v_4 = 3$. Пусть плитки P_1 и P_2 приложены к сторонам 2 и 4 плитки P соответственно (рис. 3б). Ясно, что $\delta(a) = \delta(b) = 1$.

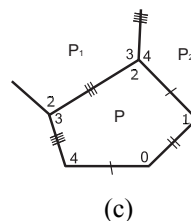
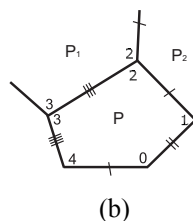
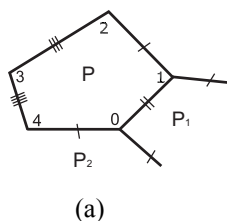


Рис. 4. К лемме 4

Пусть $v_0 = v_1 = 4$. Тогда $v_2 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 3 плитки P . Если плитки имеют разные ориентации (рис. 4б), то плитка P_2 имеет две смежных стороны типа 1, что не так. Если плитки имеют одинаковые ориентации (рис. 4с), тогда $x_2 + x_3 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $\delta(P) = 12123$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1 \cup T_2$.

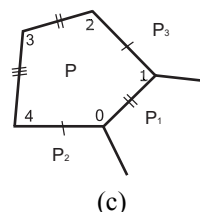
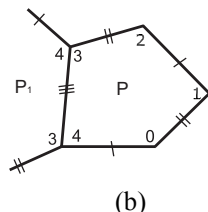
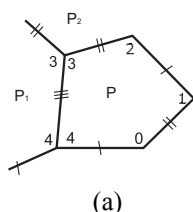


Рис. 5. К лемме 5

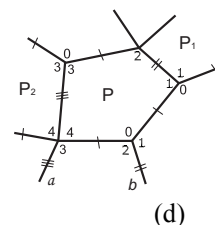
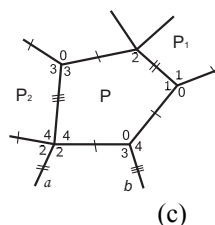
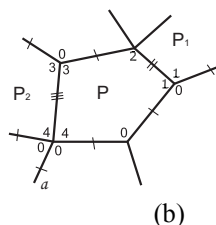
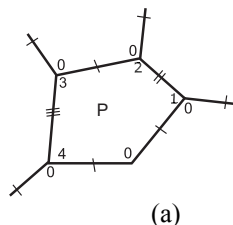


Рис. 6. К лемме 6

Пусть $v_3 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 4 плитки P . Если плитки имеют противоположные ориентации (рис. 5а), то плитка P_2 имеет две смежных стороны типа 2, противоречие. Пусть плитки имеют одинаковую ориентацию (рис. 5б). Тогда в вершине 3 плитки P

Тогда либо $x_0 + x_1 + x_4 = 360^\circ$, либо $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, либо $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$.

В любом случае $x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $\delta(P) = 12134$, то плитка P не имеет ни одной короны, либо $P \in T_1$.

Доказательство. Пусть P имеет корону. Достаточно рассмотреть три случая: $v_0 = 3$, $v_1 = 3$, $v_0 = v_1 = 4$.

Пусть $v_0 = 3$ (рис. 4а). Пусть плитка P_1 приложена к стороне 1 плитки P . Тогда плитка P_2 имеет две смежных стороны типа 1, противоречие. Аналогично рассуждаем в случае $v_1 = 3$.

Доказательство. Пусть P имеет корону. С учетом «симметрии» достаточно рассмотреть два случая: $v_3 = 3$, $v_3 = v_4 = 4$. Здесь и далее под «симметрией» мы понимаем возможность перенумерации вершин. В нашем случае $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, при этом типы сторон 1 и 2 меняются ролями.

возможны тройки углов $3,4,0$; $3,4,1$; $3,4,2$. Тогда либо $x_1 + x_2 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$; либо

$$x_0 + x_2 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_2;$$

$$\text{либо } x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1.$$

Аналогично рассуждаем в случае $v_4 = 3$.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$ (рис. 5с). Тогда $v_0 = v_1 = 3$. Пусть плитка P_1 приложена к стороне 1 плитки P . Тогда плитка P_2 или P_3 имеет две смежные стороны типа 1, что не так. Лемма доказана.

Лемма 6. Если $\delta(P) = 11213$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1$, либо $x_0 = 180^\circ - x_4$, $x_1 = 90^\circ + x_4/2$, $x_2 = 180^\circ - x_4$, $x_3 = 90^\circ + x_4/2$.

Доказательство. Пусть P имеет корону и $P \notin T_1$. Если $v_i = 3$ для некоторого $i = 1, 2, 3, 4$ (рис. 6а), то $x_0 + 2x_i = 360^\circ$.

Поскольку из четырех вершин две обязательно имеют степень 3, учитывая «симметрию», нам достаточно рассмотреть 4 случая:

- 1) $v_2 = v_3 = 3$ невозможно (рис. 6а).
- 2) $v_1 = v_2 = 3$. Тогда $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.
- 3) $v_1 = v_4 = 3$. Следовательно, $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.
- 4) $v_1 = v_3 = 3$. Следовательно, $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_3 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 + x_4 = 180^\circ$.

Тогда $v_2 = v_4 = 4$, $v_0 = 3$, иначе, попадаем в условия одного из предыдущих случаев.

Рассмотрим по очереди три случая: $\delta(a) = 1, 2, 3$ (рис. 6 b,c,d).

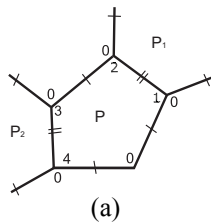
Пусть $\delta(a) = 1$ (рис. 6b).

Тогда $x_0 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow x_0 = 180^\circ - x_4$,

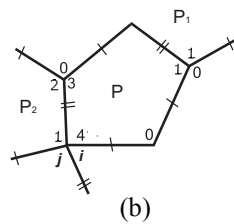
$x_1 = 90^\circ + x_4/2$, $x_2 = 180^\circ - x_4$, $x_3 = 90^\circ + x_4/2$.

Пусть $\delta(a) = 2$. Тогда $\delta(b) = 3$ (рис. 6с), иначе плитка, приложенная к стороне 1, будет иметь три смежные стороны типа 1.

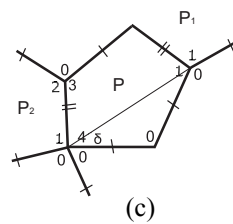
Тогда $x_0 + x_3 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 + x_2 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.



(a)

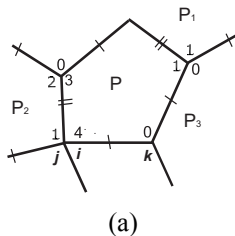


(b)

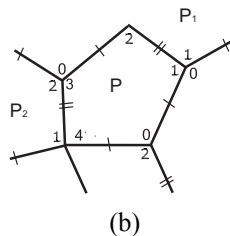


(c)

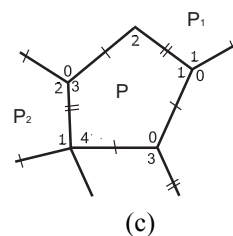
Рис. 7. К лемме 7



(a)



(b)



(c)

Рис. 8. К лемме 7

Пусть $i \neq 0$. Тогда для угла k (рис. 8а) возможны следующие варианты:

- а) $k = 0$, следовательно, плитка P_3 имеет три смежные стороны типа 1;
- б) $k = 2$ (рис. 8б), тогда

Пусть $\delta(a) = 3$ (рис. 6d).

Тогда $\delta(b) = 2 \Rightarrow x_0 + x_1 + x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $\delta(P) = 11212$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1 \cup T_2$.

Доказательство. Пусть P имеет корону и к сторонам 2 и 4 плитки P приложены плитки P_1 и P_2 соответственно.

Если $v_i = 3$, то либо $P \in T_1 \cup T_2$;

либо $x_0 + 2x_i = 360^\circ$, $i = 1, 4$; либо $x_0 + 2x_i = 360^\circ$ или $x_1 + x_4 = 180^\circ$, $i = 2, 3$ (рис. 7а).

Из четырех вершин v_1, v_2, v_3, v_4 две обязательно имеют степень 3. Учитывая симметрию, нам достаточно рассмотреть 4 случая:

- 1) $v_2 = v_3 = 3$ невозможно (рис. 7а).
- 2) $v_1 = v_2 = 3$. Тогда $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.
- 3) $v_1 = v_4 = 3$. Тогда $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.
- 4) $v_1 = v_3 = 3$. Тогда $v_2 = v_4 = 4$, $v_0 = 3$. Если $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_3 = 360^\circ$, то $x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_2$.

Если $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_1 + x_4 = 180^\circ$, то вершине 4 имеет место равенство $x_1 + x_4 + x_i + x_j = 360^\circ$ (рис. 7б), где $x_i + x_j = 180^\circ$.

Если $i = j = 0$, то $x_0 = 90^\circ$, $x_1 = 135^\circ$, $x_4 = 45^\circ$ (рис. 7с). В равнобедренном прямоугольном треугольнике при вершине 0 угол δ при основании равен 45° . Но у нас $x_4 = 45^\circ$. Противоречие.

либо $x_0 + x_1 + x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$;

либо $x_0 + x_2 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_2$;

в) $k = 3$ (рис. 8с), тогда

либо $x_0 + x_1 + x_3 = 360^\circ \Rightarrow x_2 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_2$;
 либо $x_0 + x_3 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 + x_2 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.
 Лемма доказана.

Лемма 8. Если $\delta(P) = 11223$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1 \cup T_3 \cup T_4$.

Доказательство. Пусть P имеет корону и плитка P_1 приложена к стороне 4 плитки P . Пусть плитки ориентированы противоположно.

Учитывая симметрию, достаточно рассмотреть следующие случаи: $v_3 = v_4 = 3$; $v_0 = v_4 = 3$; $v_3 = v_4 = 4$; $v_0 = v_3 = 4$.

1) $v_3 = v_4 = 3$ (рис. 9а).

Тогда $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$, $x_2 + 2x_3 = 360^\circ$.

Пусть $\alpha = (180^\circ - x_0)/2$, $\beta = (180^\circ - x_2)/2$. Тогда должно выполняться неравенство $\alpha + \beta < x_1$.

Но $\alpha + \beta = x_3 + x_4 - 180^\circ$. Учитывая, что сумма всех углов P равна 540° , получим $x_1 = \alpha + \beta$. Противоречие.

2) $v_0 = v_4 = 3$. Тогда $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$ и $\delta(a) = 2$ или $\delta(a) = 3$.

Пусть $\delta(a) = 2$ (рис. 9б).

Тогда $x_0 + 2x_1 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

Пусть $\delta(a) = 3$. Если $v_1 = 3$, то $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$ (рис. 9с). Следовательно, $P \in T_1$.

Пусть $v_2 = 3$, $v_1 = v_3 = 4$. Если $\delta(b) = 3$ (рис. 9д), то $x_2 + 2x_3 = 360^\circ$. Тогда, как и в случае (1), приходим к противоречию. Если $\delta(b) = 1$ (рис. 10а), то $x_2 + x_3 = 180^\circ$ $P \in T_1$. Если $\delta(b) = 2$, то $x_2 = 120^\circ$ и в вершине 3 возможны наборы смежных углов: $3, 1, 1, 3$; $3, 3, 3, 3$.

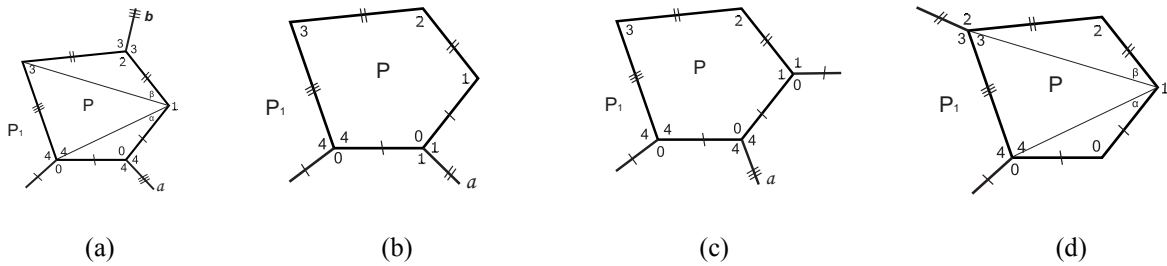


Рис. 9. К лемме 8

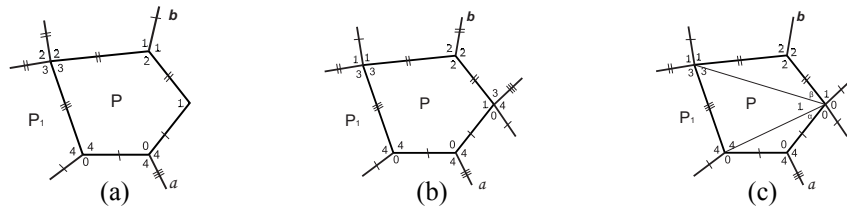


Рис. 10. К лемме 8

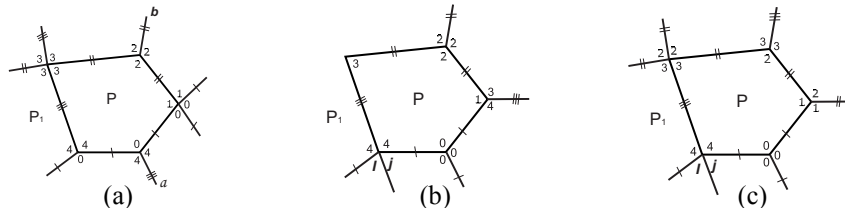


Рис. 11. К лемме 8

В первом случае $x_0 = x_2 = x_4 = 120^\circ$ и в вершине 1 либо $x_0 + x_1 + x_3 + x_4 = 360^\circ$ – противоречие (рис. 10б); либо $2x_0 + 2x_1 = 360^\circ$ (рис. 10с), тогда $x_1 = 60^\circ \Rightarrow x_1 = \alpha + \beta$ – противоречие.

Во втором случае (рис. 11а) $x_3 = 90^\circ$, и далее $x_4 = 150^\circ$, $x_1 = 120^\circ$, $x_0 = 60^\circ$, $P \in T_4$.

3) $v_3 = v_4 = 4$ (рис. 11б,с).

Пусть $i = j = 4$ или $i = j = 1 \Rightarrow x_4 = 90^\circ$ или $x_1 + x_4 = 180^\circ$. В обоих случаях $x_0 = 120^\circ$. Тогда в вершине 1 либо $x_1 + x_4 + x_3 = 360^\circ$ (рис. 11б) $\Rightarrow x_0 + x_2 = 180^\circ \Rightarrow x_2 = 60^\circ$, но $x_2 = 120^\circ$, противоречие; либо $2x_1 + x_2 = 360^\circ$ (рис. 11с) $\Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ$, $P \in T_1$.

Пусть $i = j = 0$. Тогда $x_0 + x_4 = 180^\circ$.

4) $v_0 = v_3 = 4$. Тогда $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$ и в вершине 0 для углов i, j, k (рис. 12а) возможны следующие значения:

Пусть $i = 4, j = 3, k = 1$ или $i = 1, j = 3, k = 4$. Тогда $x_2 = 180^\circ$.

Пусть $i = 4, j = 4, k = 0$. Тогда $x_0 + x_4 = 180^\circ$, $P \in T_1$.

Пусть $i = 1, j = 1, k = 0$. Тогда $x_0 + x_1 = 180^\circ$. В вершине 1 либо $x_1 + x_4 + x_3 = 360^\circ$ (рис. 12б) $\Rightarrow x_0 + x_2 = 180^\circ$. Так как $x_2 = 120^\circ \Rightarrow x_0 = 60^\circ$, $P \in T_4$;

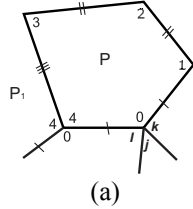
либо $2x_1 + x_2 = 360^\circ$ (рис. 12с) $\Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ$, $P \in T_1$.

Пусть $i = 1, j = 2, k = 1$. Так как $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$ и $x_0 + 2x_1 + x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_2 = 0^\circ$.

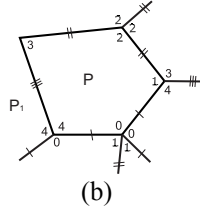
Пусть плитки P и P_1 ориентированы одинаково. Достаточно рассмотреть следующие два случая: $v_4 = 3; v_3 = v_4 = 4$.

1) $v_4 = 3$. Тогда $x_4 + x_3 + x_1 = 360^\circ \Rightarrow x_0 + x_2 = 180^\circ$.

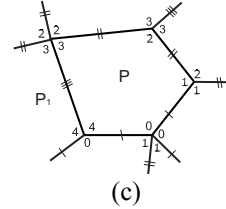
Пусть $v_0 = 3$ (рис. 13а). Тогда $x_0 = 120^\circ$,



(a)

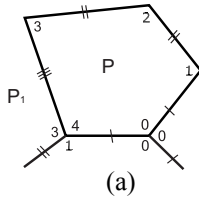


(b)

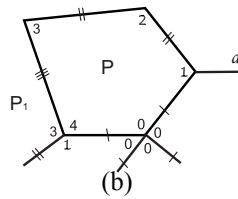


(c)

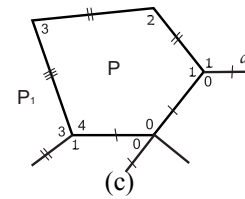
Рис. 12. Лемма 8



(a)

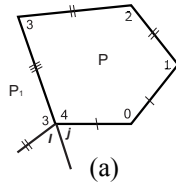


(b)

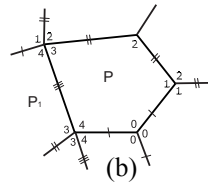


(c)

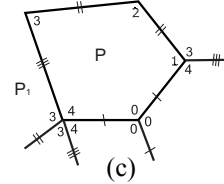
Рис. 13. Лемма 8



(a)

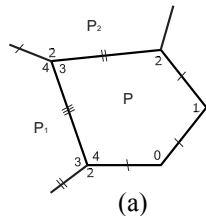


(b)

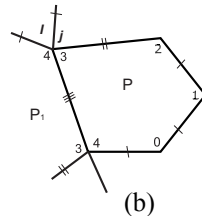


(c)

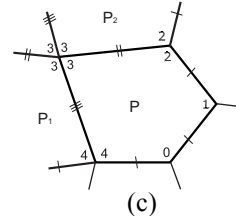
Рис. 14. Лемма 8



(a)



(b)



(c)

Рис. 15. Лемма 9

2) $v_3 = v_4 = 4$. В вершине 4 для углов i, j (рис. 14а) возможны следующие значения:

Пусть $i = 3, j = 4$. Тогда $x_3 + x_4 = 180^\circ, x_2 = 120^\circ$.

В вершине 1 либо $x_1 + x_4 + x_3 = 360^\circ$

(рис. 14б) $\Rightarrow x_1 = 180^\circ$; либо $2x_1 + x_2 = 360^\circ$

(рис. 14с), то в вершине 3 получаем равенство

$x_3 + x_4 + x_1 + x_2 = 360^\circ \Rightarrow x_0 = 180^\circ$.

Пусть $i = 1, j = 0$ или $i = 2, j = 1$. Тогда $x_2 = 180^\circ$ или $x_0 = 180^\circ$. Лемма доказана.

Лемма 9. Если $\delta(P) = 11123$, то плитка P не имеет ни одной короны либо $P \in T_1$, либо имеет один из следующих наборов углов:

$x_0 = 90^\circ, x_1 = 135^\circ, x_2 = x_4 = 112,5^\circ, x_3 = 90^\circ$;

$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 150^\circ, x_3 = 45^\circ, x_4 = 105^\circ$;

$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 160^\circ, x_3 = 40^\circ, x_4 = 100^\circ$.

$x_2 = 60^\circ \Rightarrow P \in T_4$.

Пусть $v_0 = 4, v_1 = 3$. Если $\delta(a) = 2$ или $\delta(a) = 3$

(рис. 13б), то $x_0 = 90^\circ, P \in T_3$. Если $\delta(a) = 1$

(рис. 13с), то либо $x_0 = 0^\circ$,

либо $x_0 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

Доказательство. Пусть P имеет корону и плитка P_1 приложена к стороне 4 плитки P . Пусть P и P_1 ориентированы одинаково.

Если $v_4 = 3$ (рис. 15а), то $x_4 + x_3 + x_2 =$

$= 360^\circ \Rightarrow x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$. Аналогично рассуждаем, если $v_3 = 3$.

Пусть $v_3 = v_4 = 3$. Если $i = 0, j = 2$ (рис. 15б), то $x_1 = 180^\circ$. Если $i = 1, j = 2$, то $x_0 = 180^\circ$.

Если $i = 4, j = 3$, то $x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

Этим случай, когда плитка P_1 ориентирована одинаково с P , исчерпан.

Пусть P и P_1 имеют разные ориентации. Ввиду «симметрии» можно считать, что плитка P_2 , приложенная к стороне 3 плитки P , ориентирована с P тоже противоположно.

Ясно, что $v_3 \geq 4$. Учитывая «симметрию», достаточно рассмотреть случаи: 1) $v_3 = v_4 = 4$;

2) $v_0 = v_4 = 4$; 3) $v_3 \geq 4$, остальные вершины имеют степень 3.

4) Пусть $v_3 = v_4 = 4$ (рис. 15с). Тогда $x_3 = 90^\circ$.

В таблице 1 приведены выкладки для всех возможных наборов смежных углов для вершин 2, 1, 0, 4. Наборы углов записываются в виде строк $i_0 i_1 \dots i_k$, где i_0 – номер вершины, далее идут номера углов, взятых по часовой стрелке. Ясно, что

$$x_{i_0} + x_{i_1} + \dots + x_{i_k} = 360^\circ.$$

2) $v_0 = v_3 = 4$ (рис. 16а). Тогда $x_3 = 90^\circ$. Как и в первом случае составим таблицу 2 всех возможных наборов смежных углов для вершин 2, 1, 4, 0.

3) $v_3 \geq 4$, остальные вершины имеют степень 3 (рис. 16б).

Составим таблицу 3, в которой рассмотрены все возможные наборы смежных углов для вершин 4, 2, 1, 0.

Таблица 1

	2	1	0	4	
1	221	100			$x_0 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
2	221	101	000		$x_0 = x_1 = x_2 = 120^\circ \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
3	221	101	001		
4	221	101	022		
5	221	122	010		$x_0 = x_2 \Rightarrow P \in T_1$
6	221	122	011	4004	$x_0 = 0^\circ$
7	221	122	011	4014	$x_0 = 180^\circ$
8	221	122	011	4224	
9	220	110			$x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
10	220	111	000		$x_0 = x_1 = 120^\circ \Rightarrow P \in T_1$
11	220	111	001		
12	220	111	022	4104	сумма всех углов не равна 540°
13	220	111	022	4114	$x_0 = 180^\circ$
14	220	144	000		$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_4 = 150^\circ, x_1 = 60^\circ \Rightarrow P \in T_1$
15	220	144	001		$x_0 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$

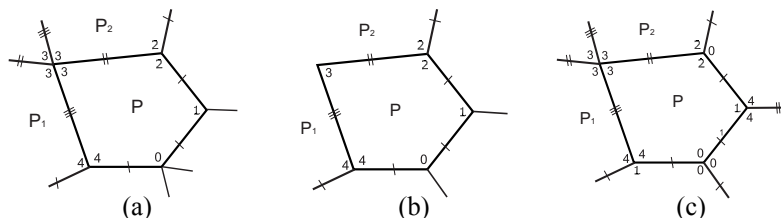


Рис. 16. К лемме 9

Таблица 2

	2	1	4	0	
1	221	100			$x_0 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
2	221	101	404		$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
3	221	101	414		$x_2 = x_4 \Rightarrow x_3 = x_0 = 90^\circ, x_1 = 135^\circ, x_2 = x_4 = 112,5^\circ$
4	221	122	414	0100	$x_2 = x_4 \Rightarrow x_3 = x_0 = 90^\circ \Rightarrow x_1 = 90^\circ \Rightarrow x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
5	221	122	414	0110	
6	221	122	414	0122	$x_0 = 0^\circ$
7	221	122	404	0101	$x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
8	221	122	404	0111	
9	221	122	404	0144	$x_1 = 0^\circ$
10	220	110			$x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
11	220	111	404		$x_1 = 120^\circ, x_2 = x_4 \Rightarrow x_1 + x_3 = 180^\circ$, но $120^\circ + 90^\circ = 210^\circ \neq 180^\circ$
12	220	111	414		$x_1 = x_4 = 120^\circ \Rightarrow x_2 = 150^\circ, x_0 = 60^\circ, x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
13	220	144	404		$x_0 = x_1 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
14	220	144	414		$x_2 = 180^\circ - x_0/2, x_4 = 180^\circ - x_1/2 \Rightarrow x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$

Таблица 3

	4	2	1	0	
1	404	220	110	011	$x_1 = x_4 = x_2 \Rightarrow P \in T_1$
2	404	220	111	001	$x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120^\circ \Rightarrow x_3 = 60^\circ \Rightarrow P \in T_1$
3	404	220	110	044	$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
4	404	220	144	001	$x_0 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
5	404	221	100	011	$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
6	404	221	101	001	
7	404	221	100	044	$x_0 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
8	414	220	110	010	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
9	414	220	111	000	$x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120^\circ \Rightarrow x_3 = 60^\circ \Rightarrow P \in T_1$
10	414	220	144	000	$x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 360^\circ - 2x_4$
11	414	221	100	010	$x_0 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
12	414	221	101	000	$x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120^\circ \Rightarrow x_3 = 60^\circ \Rightarrow P \in T_1$
13	414	221	122	010	$x_0 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$
14	414	221	101	022	$x_0 = x_1 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$

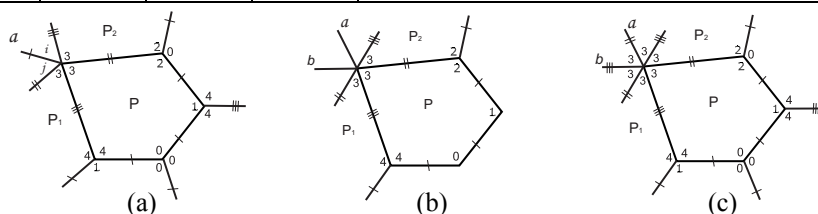


Рис. 17. К лемме 9

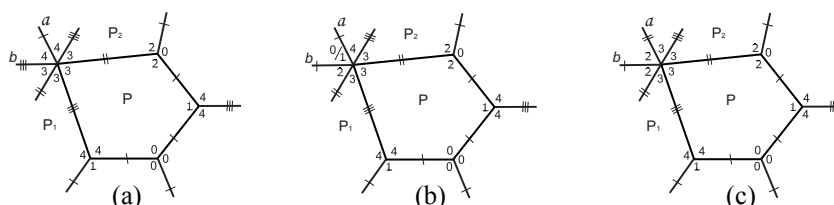


Рис. 18. К лемме 9

Дальнейшего рассмотрения требует случай 10. Всюду ниже мы считаем, что выполнены равенства $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 360^\circ - 2x_4$.

Пусть $v_3 = 4$ (рис. 16с). Тогда $x_3 = 90^\circ \Rightarrow x_4 = 150^\circ, x_1 = 60^\circ \Rightarrow x_0 + x_1 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

Пусть $v_3 = 5$ (рис. 17а). Тогда $\delta(a) = 1$ и $i = 4, j = 2 \Rightarrow x_2 + x_4 + 3x_3 = 360^\circ$. Тогда $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 150^\circ, x_3 = 45^\circ, x_4 = 105^\circ$.

Пусть $v_3 = 6$. Рассмотрим варианты значений $\delta(a), \delta(b)$ (рис. 17б).

1) Пусть $\delta(a) = 2, \delta(b) = 3$ (рис. 17с).

Тогда $x_3 = 60^\circ \Rightarrow x_2 + x_3 = 180^\circ \Rightarrow P \in T_1$.

2) Пусть $\delta(a) = 1, \delta(b) = 3$ (рис. 18а). Тогда $4x_3 + 2x_4 = 360^\circ$. Отсюда $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 160^\circ, x_3 = 40^\circ, x_4 = 100^\circ$.

3) Пусть $\delta(a) = 1, \delta(b) = 1$ (рис. 18б). Тогда либо $3x_3 + x_2 + x_0 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = 180^\circ + 2x_3 > 180^\circ$, либо $3x_3 + x_2 + x_1 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_0 =$

$= 180^\circ + 2x_3 > 180^\circ$.

4) Пусть $\delta(a) = 2, \delta(b) = 1$ (рис. 18с).

Тогда $2x_2 + 4x_3 = 360^\circ$. Отсюда $x_4 = 90^\circ, x_1 = 180^\circ$. Лемма доказана.

5. Исследование пятиугольников, имеющих корону

Из пункта 4 следует, что существует лишь 4 выпуклых пятиугольника, имеющих корону и не относящихся к типам T_i . Рассмотрим эти пятиугольники.

1. $\delta(P) = 11213$ (Лемма 6).

Углы пятиугольника: $x_0 = 180^\circ - x_4, x_1 = 90^\circ + x_4/2, x_2 = 180^\circ - x_4, x_3 = 90^\circ + x_4/2$.

Легко заметить, что $x_3 + x_4 > 180^\circ$ и $2x_3 > 180^\circ$. Имеем две короны (рис. 19а), отличающиеся лишь расположением одной плитки. В обоих случаях препятствием для продолжения покрытия плоскости служит вершина, обведенная на рисунке 19а кружочком. Кроме двух углов, равных x_3 , с учетом

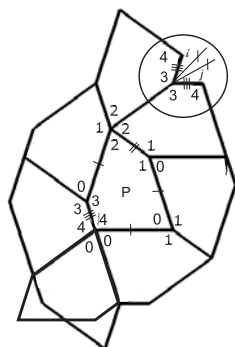
длин сторон, в указанной вершине могут сходиться дополнительно не менее двух углов. Для углов i, j (рис. 19a) априори возможны следующие варианты:

$$1) i = j = 3 \Rightarrow 4x_3 \leq 360^\circ.$$

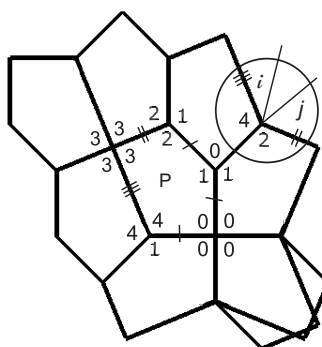
$$2) i = 3, j = 4 \text{ или } i = 4, j = 3 \Rightarrow 2x_3 + x_3 + x_4 \leq 360^\circ.$$

$$3) i = j = 4 \Rightarrow 2x_3 + 2x_4 = 2(x_3 + x_4) \leq 360^\circ.$$

Во всех трех случаях получаем противоречие с полученными выше неравенствами.

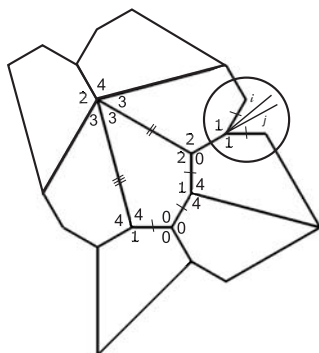


(a)

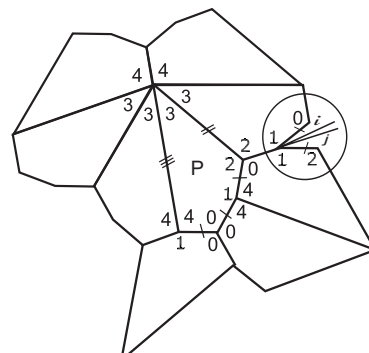


(b)

Рис. 19.



(a)



(b)

Рис. 20.

2. $\delta(P) = 11123$ (Лемма 9).

1) Углы пятиугольника: $x_0 = 90^\circ$, $x_1 = 135^\circ$, $x_2 = x_4 = 112,5^\circ$, $x_3 = 90^\circ$.

Препятствием для продолжения покрытия плоскости служит указанная на рисунке 19b вершина. Если в указанной вершине кроме x_2, x_4 дополнительно сходится один угол, то, учитывая длины сторон, это угол x_3 , но $x_2 + x_3 + x_4 = 315^\circ \neq 360^\circ$. Пусть в этой вершине дополнительно сходятся не менее двух углов. Для углов i, j (рис. 19b) априори возможны следующие варианты:

$$1) i = 2, j = 3 \Rightarrow 427,5^\circ = 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 360^\circ.$$

$$2) i = 2, j = 4 \Rightarrow 450^\circ = 2x_2 + 2x_4 \leq 360^\circ.$$

$$3) i = j = 3 \Rightarrow 405^\circ = x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 360^\circ.$$

$$4) i = 3, j = 4 \Rightarrow 427,5^\circ = x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 360^\circ.$$

Во всех четырех случаях получаем противоречие.

3) Углы пятиугольника: $x_0 = x_2 = 120^\circ$, $x_1 = 150^\circ$, $x_3 = 45^\circ$, $x_4 = 105^\circ$.

Препятствием для продолжения покрытия плоскости служит указанная на рисунке 20a вершина. Если в указанной вершине кроме двух углов x_1 дополнительно сходится один угол, то, учитывая длины сторон, это угол x_0 или x_1 , но $x_0 + 2x_1 = 420^\circ > 360^\circ$ и $3x_1 = 450^\circ > 360^\circ$. Пусть в

этой вершине дополнительно сходятся не менее двух углов (рис. 20a). Тогда $i = 2, j = 4$ или $i = 4, j = 2$, но $2x_1 + x_2 + x_4 = 525^\circ > 360^\circ$.

3) Углы пятиугольника: $x_0 = x_2 = 120^\circ$, $x_1 = 160^\circ$, $x_3 = 40^\circ$, $x_4 = 100^\circ$.

Препятствием для продолжения покрытия плоскости служит указанная на рисунке 20b вершина. Если в указанной вершине кроме двух углов x_1 дополнительно сходится один угол, то, учитывая длины сторон, это угол x_0 или x_1 , но $x_0 + 2x_1 = 440^\circ > 360^\circ$ и $3x_1 = 480^\circ > 360^\circ$. Пусть в вершине дополнительно сходятся не менее двух углов (рис. 20b). Тогда $i = 2, j = 4$ или $i = 4, j = 2$, но $2x_1 + x_2 + x_4 = 540^\circ > 360^\circ$.

Литература

1. Agaoka, Y. An example of convex heptagon with Heesch number one / Y. Agaoka // Mem. Fac. Integrated Arts and Sci. Hiroshima Univ. Ser. IV, Science Report. – 2005, December. – 31. – P. 117 – 123.
2. Bagina, O. Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons / O. Bagina // J. Combin. Theory. Ser. A. – 2004. – 105 (2). – P. 221 – 232.
3. Grünbaum, B. Tilings and Patterns / W. H. Freeman and Company / B. Grünbaum, G. C. Shephard. – 1987. – P. 472 – 518.

4. Hirschhorn, M. D. Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane / M. D. Hirschhorn and D. C. Hunt // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1985. – 39. – P. 1 – 18.

5. Kershner, R. B. On Paving the Plane / R. B. Kershner // American Mathematical Monthly. – 1968. – 75. – P. 839 – 844.

6. Reinhardt, K. Über die Zerlegung der Ebene in Polygone: Dissertation / K. Reinhardt. – Universität Frankfurt, 1918.

7. Schattschneider, D. Tiling the Plane with Congruent Pentagons / D. Schattschneider // Math. Magazine. – 1978. – 51. – P. 29 – 44.

8. Делоне, Б. Н. Комбинаторная и метрическая теория планигонов / Б. Н. Делоне, Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин // Труды математического института. – 1978. – 148. – С. 109 – 140.