



Оригинальная статья / Original article

УДК: 519.233.5

DOI: 10.21285/1814-3520-2016-9-65-73

## МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ БИНАРНОГО ПРОЦЕССА

© А.В. Петров<sup>1</sup>

Иркутский национальный исследовательский технический университет,  
664074, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

**РЕЗЮМЕ. ЦЕЛЬЮ** исследования является нахождение методов оценивания нелинейных вероятностных зависимостей. **МЕТОДЫ.** Основными методами исследования являются теоретический вероятностный анализ и численные методы. **РЕЗУЛЬТАТЫ.** Рассматривается перестановочная процедура генерирования бинарного случайного процесса. Особое внимание уделено матричному представлению корреляционных характеристик, смешанных моментов и, особенно, моментных функций. Представлены результаты численных экспериментов по оценке возможностей перестановочных процедур по оцениванию характеристик взаимосвязи. **ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Перестановочная процедура генерирования бинарного процесса обеспечивает возможность генерирования случайных процессов с неописанными на настоящее время вероятностными свойствами.

*Ключевые слова:* бинарный случайный процесс, характеристики взаимосвязи, генерирование, моментные функции, корреляция, метод вычисления.

**Формат цитирования:** Петров А.В. Моментные функции бинарного процесса // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. Т. 20. № 9. С. 65–73. DOI: 10.21285/1814-3520-2016-9-65-73

## MOMENTARY FUNCTIONS OF A BINARY PROCESS

A.V. Petrov

Irkutsk National Research Technical University,  
83 Lermontov St., Irkutsk, 664074, Russia.

**ABSTRACT. THE PURPOSE** of the study is to find the estimation methods of nonlinear probabilistic dependencies. **METHODS.** The main research methods are theoretical probabilistic analysis and numerical methods. **RESULTS.** An interchangeable procedure of binary random process generation is considered. Special attention is paid to the matrix representation of correlation characteristics and mixed moments with the focus on momentary functions. The results of numerical experiments on estimation of the possibilities of interchangeable procedures for relationship characteristics evaluation are presented. **CONCLUSION.** The interchangeable procedure of binary process generation provides the possibility of generating random processes whose probabilistic properties haven't been described yet.

*Keywords:* binary random process, relationship characteristics, generating, momentary functions, correlation, calculation method

**For citation:** Petrov A.V. Momentary functions of a binary process. Proceedings of Irkutsk State Technical University. 2016, vol. 20, no. 9, pp. 65–73. (In Russian). DOI: 10.21285/1814-3520-2016-9-65-73

## Введение

Рассматривается случайный процесс  $\{X(t), t \in T\}$ ,  $T = \{0, 1, \dots\}$ , принимающий два значения  $\{0, 1\}$  с вероятностями  $P\{X(t) = 1\} = p$  и  $P\{X(t) = 0\} = 1 - p$ . Закон распределения вероятностей, описывающий вероятностные свойства так определенного процесса, носит название бернуллиевского (в силу соответствия простейшей схеме независимых испытаний) или более компактно – бинарного (что часто применяется в радиотехнике и электронике). Связывая значения бинарного процесса с наступлением (или не наступлением) случайного события, можно рассматривать применение такого процесса в так называемой нечисловой статистике.

<sup>1</sup>Петров Александр Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем, e-mail: petrov@istu.edu

Petrov Alexander, Doctor of technical sciences, Professor of the Department of Automated Systems, e-mail: petrov@istu.edu



Особенностью вероятностно-статистического анализа такого процесса является тот факт, что его функциональные и числовые характеристики определяются исключительно вероятностями появления единичных значений этого процесса. Отличительная особенность бинарного процесса  $X(t)$  позволяет в определенной степени заместить вычисление ряда характеристик взаимосвязи расчетами вероятностей  $P_{t,t'} = P\{X(t)=1, X(t')=1\}$  или в случае стационарности процесса  $X(t)$  – расчетами вероятностей  $P_\tau = P\{X(t)=1, X(t+\tau)=1\}$ .

### Характеристики взаимосвязи бинарного процесса

В работе [1] приведены сведения о вероятностных характеристиках взаимосвязи. Обратим внимание на идентичность моментной функции из [1]

$$B_x(t, t') = M[X(t) \cdot X(t')] \quad (1)$$

и смешанного начального момента порядка  $(k_1, k_2)$  из [2, с. 76]

$$M_{k_1, k_2}(X(t), X(t')) = M[X^{k_1}(t) \cdot X^{k_2}(t')] \quad (2)$$

в случае бинарного закона распределения вероятностей процесса  $X(t)$ .

Известно, что для стационарного бинарного случайного процесса его математическое ожидание и дисперсия определяются вероятностью появления единицы  $p$ :  $m_x = p$  и  $D_x = p \cdot (1 - p)$ .

Традиционно в теории вероятностей для описания величины стохастической взаимосвязи используются корреляционный момент  $K_x$  и коэффициент корреляции  $r_x$ . Для любого случайного стационарного процесса эти характеристики связаны между собой:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x^2} = \frac{M[X(t) \cdot X(t')] - m_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{m_{1,1}[X^1(t) \cdot X^1(t')] - m_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{B_x(t, t') - m_x^2}{\sigma_x^2} \quad (3)$$

или, обозначив  $\tau = t - t'$ , имеем автокорреляционную функцию

$$r_x(\tau) = \frac{M[X(t) \cdot X(t+\tau)] - m_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{m_{1,1}[X^1(t) \cdot X^1(t+\tau)] - m_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{B_x(\tau) - m_x^2}{\sigma_x^2}. \quad (4)$$

Для бинарного процесса выражение (4) принимает вид

$$r_x(\tau) = \frac{P_\tau - p^2}{p \cdot (1 - p)} = \frac{B_x[\tau] - p^2}{p \cdot (1 - p)}. \quad (5)$$

Помимо корреляционных характеристик в теории вероятностей применяют также так называемые корреляционные матрицы:



$$\|R\| = \begin{pmatrix} 1 & r(1) & \dots & r(N) \\ r(-1) & 1 & \dots & r(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(-N) & r(-N+1) & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

которые для бинарного процесса с учетом (5) могут быть представлены в виде

$$\|R'\| = \begin{pmatrix} 1 & P_1 & \dots & P_N \\ P_{-1} & 1 & \dots & P_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-N} & P_{-N+1} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

### Бинарное упорядочение

В [2, с. 18–48] рассмотрена процедура генерирования бинарного случайного процесса, основанная на перестановочной технологии. Суть этой процедуры состоит в следующем.

В качестве исходного используется некоррелированный бинарный процесс  $\{Y(t), t \in T\}, T = \{0, 1, \dots\}$ , причем  $P\{Y(t) = 1\} = p$ . Генерируемый процесс обозначим  $\{X(t), t \in T\}$ . Процедура запуска перестановок состоит в формировании начального значения  $X(0) = Y(0)$  и заполнении вектора размерностью  $n$  ( $n$  – управляющий степенью коррелированности параметр процедуры):

$$\overline{U(1)} = (Y(1), \dots, Y(n)).$$

В качестве генерируемого значения  $X(1), X(2), \dots$  выбирается тот компонент  $m$  вектора  $\overline{U(1)}$ , который определяется критерием выбора:

$$X(t) = u_m(t) = D\{X(t-1), \overline{U(t)}\}. \quad (8)$$

После выбора компонента  $u_m(t)$  вектор  $\overline{U(t)}$  обновляется по правилу

$$\begin{cases} u_j(t+1) = u_j(t), j \neq m, j = n, \\ u_m(t+1) = u_n(t), \\ u_n(t+1) = Y(t+n). \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, что такая процедура статистически значимо не влияет на одномерный закон распределения вероятностей процесса  $X(t)$ , он соответствует закону распределения исходного процесса  $X(t)$ . Но перестановка значений по любому правилу однозначно вводит вероятностную зависимость в генерируемый процесс  $X(t)$ . Ясно, что чем больше будет завуалирован критерий отбора  $D$  в сравнении с прямым ранжированием, тем меньше будет проявляться нестационарность закона распределения вероятностей, вызванная в основном способом запуска процедуры перестановок, а именно, способом задания начального значения  $X(0)$ .



В [2, с. 18–42] представлены результаты аналитического исследования процедуры в простейшем случае минимальной размерности вектора  $\overline{U(1)}$ , когда  $n = 2$ , (там же рассмотрены и направления анализа для других размерностей вектора  $\overline{U(1)}$ ).

В соответствии с правилом (9) формирование вектора  $\overline{U(1)}$ , совместное распределение участвующих в перестановках элементов  $X(t-1), u_1(t), u_2(t)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2, u_2(t)=k_3\} = \\ = P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2\} \cdot P\{Y(t+n-1)=k_3\}, \quad k_1, k_2, k_3 = 0, 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Это позволяет описать процедуру бинарного упорядочения четырьмя рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} P\{X(t-1)=0, u_1(t)=0\} &= f_1[P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2\} \cdot P\{Y(t+n-1)=k_3\}]; \\ P\{X(t-1)=0, u_1(t)=1\} &= f_2[P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2\} \cdot P\{Y(t+n-1)=k_3\}]; \\ P\{X(t-1)=1, u_1(t)=0\} &= f_3[P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2\} \cdot P\{Y(t+n-1)=k_3\}]; \\ P\{X(t-1)=1, u_1(t)=1\} &= f_4[P\{X(t-1)=k_1, u_1(t)=k_2\} \cdot P\{Y(t+n-1)=k_3\}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$P\{X(t)=k_1, u_1(t+1)=k_2\} = P_t(k_1, k_2);$$

и

$$P\{Y(t+n-1)=k_3\} = \begin{cases} 1-p, & \text{если } k_3=0; \\ p, & \text{если } k_3=1. \end{cases}$$

Функции  $f_1$  и  $f_4$  в силу конструкции процедуры имеют вид:

$$\begin{aligned} P_t(0,0) &= (1-p) \cdot P_{t-1}(0,0) + (1-p) \cdot P_{t-1}(1,0); \\ P_t(1,1) &= p \cdot P_{t-1}(0,1) + p \cdot P_{t-1}(1,1). \end{aligned} \quad (12)$$

Функции  $f_2$  и  $f_3$  определяют критерий отбора  $D$ . В силу того что может быть только 16 вариантов комбинирования  $p$ ,  $(1-p)$  и  $P_{t-1}(k_1, k_2)$ , в [2] приведены эти комбинации.

Для всех вариантов получены выражения, которые обеспечивают возможности оценивания скорости сходимости закона распределения вероятностей генерируемого процесса к закону распределения исходного процесса.

В десяти вариантах получена нулевая корреляционная зависимость. Причины невведения зависимости не ясны: либо критерий отбора  $D$  в этих случаях нивелирует результат перестановки, либо, что более вероятно, коэффициент корреляции не способен отразить такого рода вероятностные связи. Возможно, объяснение последнего предположения позволит получить принципиально новые результаты в изучении вероятностных взаимосвязей.

Три варианта перестановок приводят к плавно затухающей автокорреляционной зависимости, аппроксимируемой выражением:



$$r(\tau) = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot \tau} \cdot \cos(\gamma \cdot \pi \cdot \tau). \quad (13)$$

Оставшиеся три варианта перестановок также обеспечивают введение экспоненциально-косинусной автокорреляционной функции, но знакопеременного вида:

$$r(\tau) = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot \tau} \cdot \cos(\pi \cdot \tau). \quad (14)$$

Для этих шести вариантов в аналитическом виде получены зависимости автокорреляционных функций от лага корреляции  $\tau$  и вероятности  $p$ .

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что для бинарного (бернуллиевского) стационарного случайного процесса в [2] получены выражения, обеспечивающие нахождение одновременно корреляционных моментов и коэффициентов корреляции, моментных функций, смешанных моментов произвольных порядков и, конечно, их представление в матричной форме. Но актуальна задача поиска методов оценивания вероятностных зависимостей для тех вариантов перестановочной процедуры, создающие зависимости в виде, который традиционные корреляционные характеристики не способны отразить.

### Численные эксперименты

В целях подтверждения полученных выводов об особенностях оценивания характеристик взаимосвязи бинарного случайного процесса были проведены численные эксперименты. Рассчитывались экспериментальные и теоретические значения коэффициентов корреляции  $r(\tau)$  и вероятностей  $P_\tau = P\{X(t)=1, X(t+\tau)=1\}$ . Экспериментальные значения вычислялись оцениванием по выборкам объема 5000 значений, которые генерировались в соответствии с выражениями (11), теоретические – вычислялись через полученные в [2] формулы исчисления автокорреляционных функций. Вычислялись и разности между ними. Расчеты проводились для трех вероятностей:  $p = 0,25; 0,5$  и  $0,75$ .

На рис. 1 и 2 приводятся результаты расчетов для варианта 4 перестановочной процедуры [2, с. 26]. Функции  $f_2$  и  $f_3$  имеют вид:

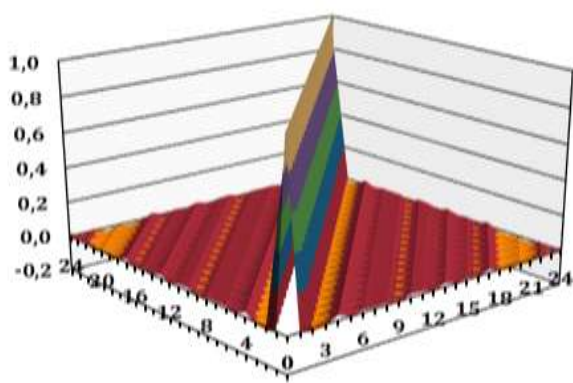
$$\begin{aligned} P_t(0,1) &= (1-p) \cdot P_{t-1}(0,1) + p \cdot P_{t-1}(1,0); \\ P_t(1,0) &= p \cdot P_{t-1}(0,0) + (1-p) \cdot P_{t-1}(1,1). \end{aligned}$$

Функции  $f_1$  и  $f_4$  представлены формулами (12).

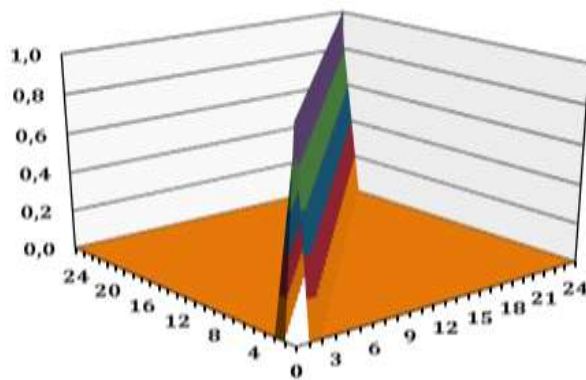
На выходе процедуры получен бинарный некоррелированный процесс. На рис. 1 приводятся экспериментальные и теоретические значения матриц коэффициентов корреляции и матрица разностей между ними при  $p = 0,25$ . Приводятся также экспериментальные и теоретические кривые автокорреляционных функций. На рис. 2 представлены результаты в форме моментных функций  $B(\tau)$ .

На рис. 3 и 4 приведены результаты для бинарного процесса ( $p = 0,5$ ) с плавно затухающей автокорреляционной функцией вида (13), полученные перестановочной процедурой (вариант 3 из [2, с. 23–25]) с функциями вида:

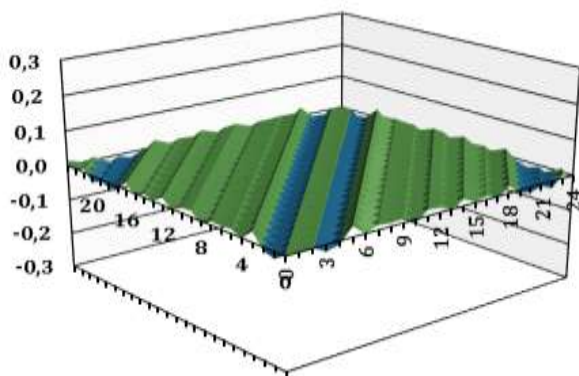
$$\begin{aligned} P_t(0,1) &= p \cdot P_{t-1}(0,0) + (1-p) \cdot P_{t-1}(0,1); \\ P_t(1,0) &= p \cdot P_{t-1}(1,0) + (1-p) \cdot P_{t-1}(1,1). \end{aligned}$$



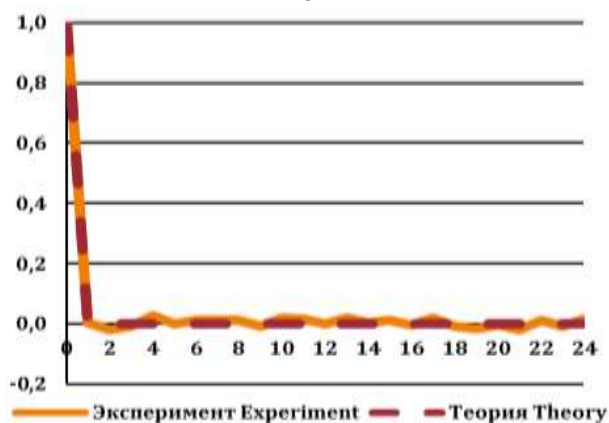
а



б

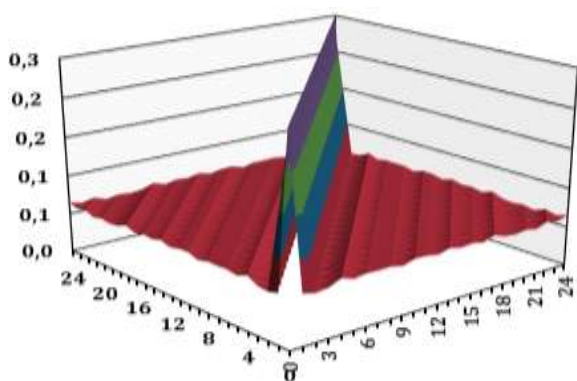


в

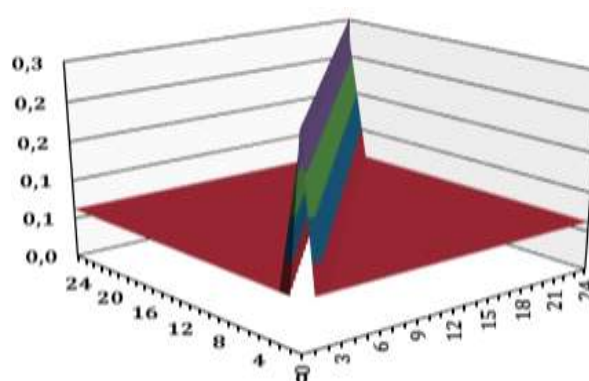


г

Рис. 1. Корреляционные моменты  $r(\tau)$  для некоррелированного бинарного процесса при  $p = 0,25$ :  
а – экспериментальные  $r(\tau)$ ; б – теоретические  $r(\tau)$ ; в – разности; г – автокорреляционные функции  
Fig. 1. Correlation moments  $r(\tau)$  for binary uncorrelated process at  $p = 0,25$ :  
а – experimental  $r(\tau)$ ; б – theoretical  $r(\tau)$ ; в – differences; г – autocorrelation functions



а



б

Рис. 2. Моментные функции  $B(\tau)$  для некоррелированного бинарного процесса при  $p = 0,25$ :  
а – экспериментальные  $B(\tau)$ ; б – теоретические  $B(\tau)$   
Fig. 2. Momentary functions  $B(\tau)$  for binary uncorrelated process at  $p = 0,25$ :  
а – experimental  $B(\tau)$ ; б – theoretical  $B(\tau)$

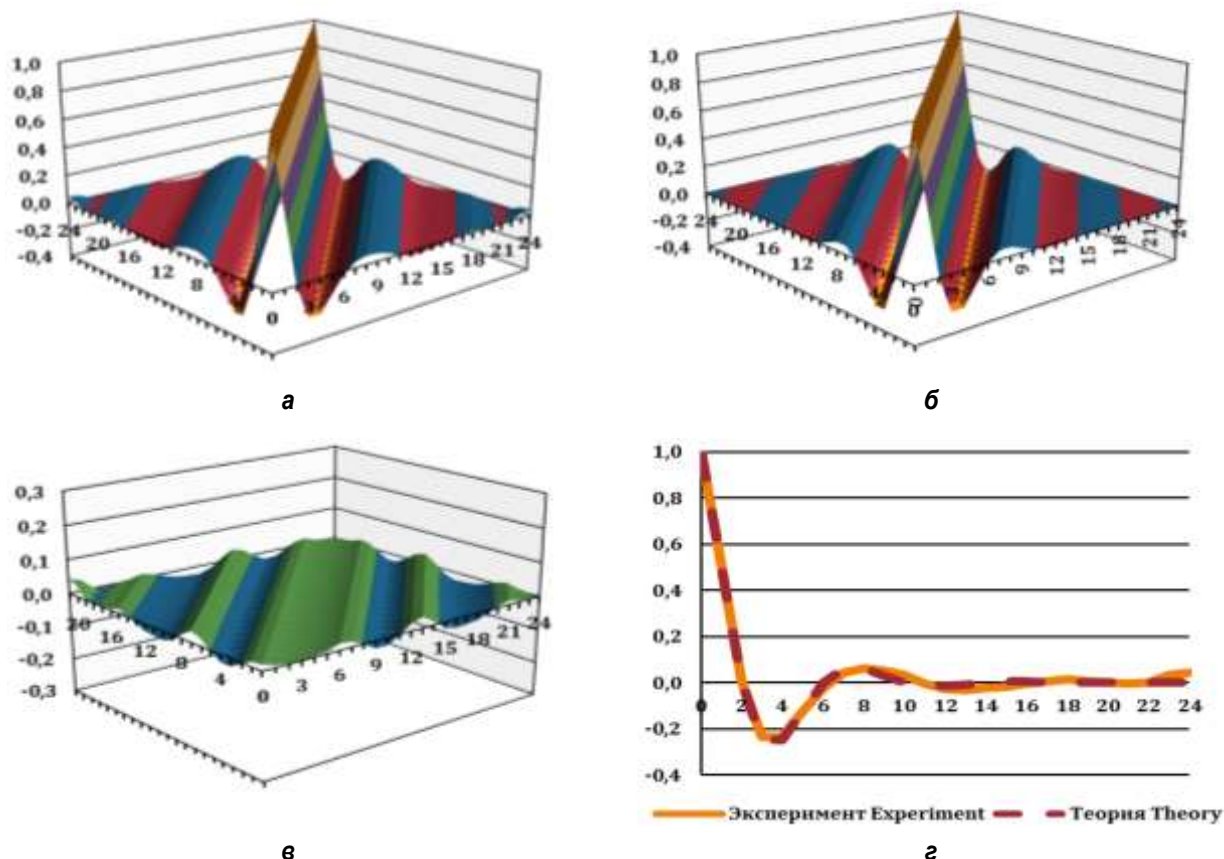


Рис. 3. Корреляционные моменты  $r(\tau)$  для корреляции вида (13) бинарного процесса при  $p = 0,5$ :  
а – экспериментальные  $r(\tau)$ ; б – теоретические  $r(\tau)$ ; в – разности; г – автокорреляционные функции  
Fig. 3. Correlation moments  $r(\tau)$  for correlated species (13) of a binary process at  $p = 0,5$ :  
а – the experimental  $r(\tau)$ ; б – theoretical  $r(\tau)$ ; в – differences; д – autocorrelation functions

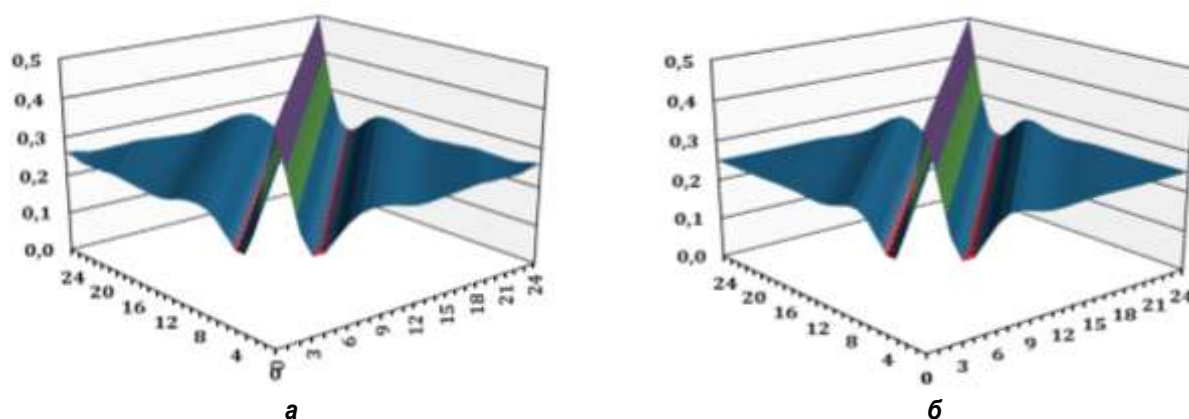


Рис. 4. Моментные функции  $B(\tau)$  для корреляции вида (13) бинарного процесса при  $p = 0,5$ :  
а – экспериментальные  $B(\tau)$ ; б – теоретические  $B(\tau)$   
Fig. 4. Momentary functions  $B(\tau)$  for correlated species (13) of a binary process at  $p = 0,5$ :  
а – experimental  $B(\tau)$ ; б – theoretical  $B(\tau)$

На рис. 5 и 6 приведены результаты для бинарного процесса ( $p = 0,75$ ) со знакопеременной затухающей автокорреляционной функцией вида (14), полученные перестановочной процедурой (вариант 15 из [2, с. 42–43]) с функциями вида:

$$P_t(0,1) = p \cdot P_{t-1}(1,0),$$

$$P_t(1,0) = p \cdot P_{t-1}(0,0) + (1-p) \cdot P_{t-1}(0,1) + (1-p) \cdot P_{t-1}(1,1).$$

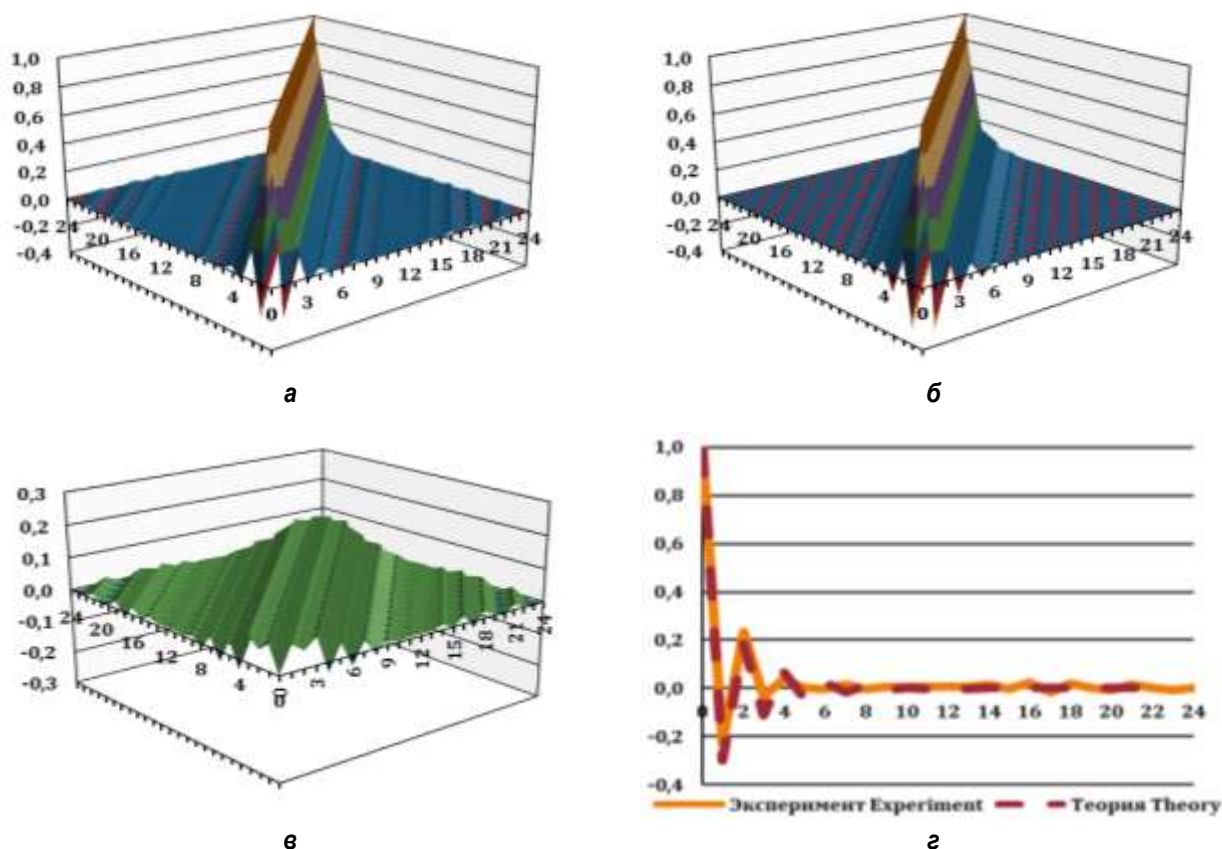


Рис. 5. Корреляционные моменты  $r(t)$  для корреляции вида (14) бинарного процесса при  $p = 0,75$ :  
а – экспериментальные  $r(t)$ ; б – теоретические  $r(t)$ ; в – разности; г – автокорреляционные функции  
Fig. 5. Correlation moments  $r(t)$  for correlated species (14) of a binary process at  $p = 0,75$ :  
а – experimental  $r(t)$ ; б – theoretical  $r(t)$ ; в – differences; д – autocorrelation functions

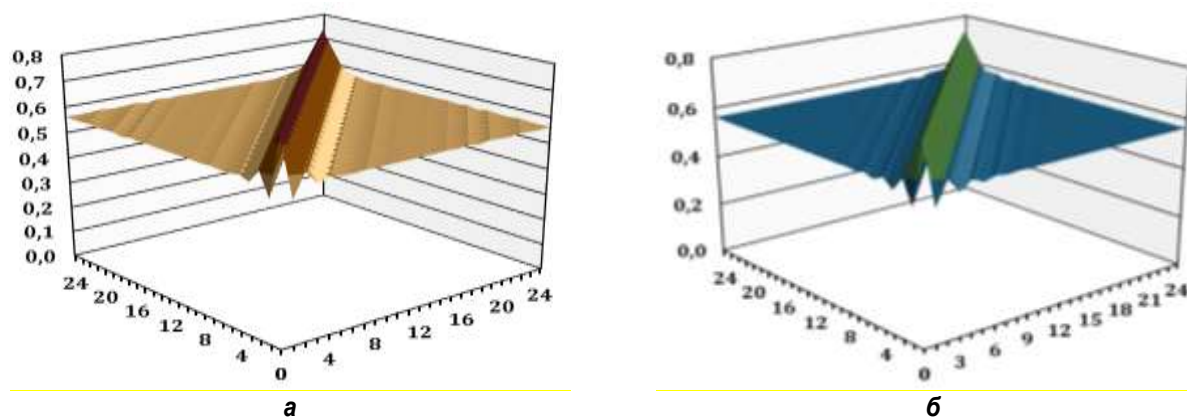


Рис. 6. Моментные функции  $B(t)$  для корреляции вида (14) бинарного процесса при  $p = 0,75$ :  
а – экспериментальные  $B(t)$ ; б – теоретические  $B(t)$   
Fig. 6. Momentary functions  $B(t)$  for correlated species (14) of a binary process at  $p = 0,75$ :  
а) – experimental  $B(t)$ ; б – theoretical  $B(t)$

## Выводы

Таким образом, важным и продуктивным является процедура перестановок значений бинарного случайного процесса. Описанные выше результаты позволяют сделать вывод о том, что бинарное упорядочение подтверждает введение в генерируемый процесс не только автокорреляционных зависимостей, но и зависимостей, описываемых моментными функциями.



ми, смешанными начальными моментами произвольных порядков для пар значений случайного процесса и соответствующих им матрицам характеристик. Это обеспечивает в дальнейшем совместные теоретические и экспериментальные исследования вариантов перестановочной процедуры, вводящих зависимости, не отражаемые коэффициентами корреляции. При этом целью этих исследований должен быть поиск новых вероятностных характеристик взаимосвязи случайных явлений.

#### **Библиографический список**

1. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
2. Петров А.В. Основы теории полиномиальных стохастических взаимосвязей. Иркутск, Изд-во ИРНИТУ, 2016, 170 с.

#### **References**

1. Mirskii G.Ya. Kharakteristiki stokhasticheskoi vzaimosvyazi i ikh izmereniya [Stochastic interrelation characteristics and their measurements]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 320 p. (In Russian)
2. Petrov A.V. Osnovy teorii polinomial'nykh stokhasticheskikh vzaimosvyazei [Fundamentals of the theory of polynomial stochastic relationships]. Irkutsk, IRNITU Publ., 2016, 170 p. (In Russian)

#### **Критерии авторства**

Петров А.В. сформулировал задачу, провел исследования, подготовил статью к публикации и несет ответственность за плагиат.

#### **Authorship criteria**

Petrov A.V. formulated the problem, conducted researches, prepared the article for publication and bears the responsibility for plagiarism.

#### **Конфликт интересов**

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

#### **Conflict of interest**

The author declares that there is no conflict of interest regarding the publication of this article.

*Статья поступила 19.07.2016 г.*  
*The article was received 19 July 2016*