УДК 514.75

М.А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma@math.asu.ru

Модели проективной плоскости

Если вдоль некоторой замкнутой кривой на поверхности локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мебиуса. К односторонним поверхностям относится также бутылка Клейна, скрещенный колпак, Римская поверхность, поверхность Боя. Римская поверхность и поверхность Боя являются моделями проективной плоскости. Пусть в евклидовом пространстве E^n заданы две гладкие вектор-функции: 2π -периодическая и 2π -антипериодическая. Используя заданные функции, определяются модели проективной плоскости. С помощью системы компьютерной математики строятся модели проективной плоскости в E^3.

Ключевые слова: скрещенный колпак, лист Мебиуса, Римская поверхность, поверхность Боя, проективная плоскость.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3—6] изучаются односторонние поверхности.

Если на поверхности в E^n существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической. Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, вектор-функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u)), \text{ где } \rho_1(u) = \rho(u + 2\pi)$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u))$ есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Определим поверхность P уравнением

$$r(u,v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), \tag{1}$$

$$u = -\pi,.\pi;\ v = -\pi,\pi .$$

Теорема. *Поверхность P есть модель проективной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как фактор-пространство [7, с. 75]:

$$SP^* = [-\pi,\pi]X[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v) \approx (\pi,v),(-u,-\pi) \approx (u,\pi)] .$$

Так как

$$r(\pi,v) = (1 + \cos(v))s(\pi) + \sin(v)l(\pi),$$

$$r(-\pi,-v) = ((1 + \cos(v))s(-\pi) + \sin(-v)l(-\pi),$$

$$s(-\pi) = s(\pi), l(-\pi) = -l(\pi),$$

$$r(-u,-\pi) = (1 + \cos(\pi))s(-u) + \sin(-\pi)l(-u) = 0,$$

$$r(u,\pi) = (1 + \cos(\pi))s(u) + \sin(\pi)l(u) = 0,$$

то имеем $r(\pi,v) = r(-\pi,-v), r(u,\pi) = r(-u,-\pi)$. Следовательно, поверхность P есть модель проективной плоскости.

Следствие. *Пусть вектор-функция* $r = r(u,v)$ *определяет модель проективной плоскости, а функция* $f = f(u,v)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f = f(u,v)$ *не обращается в нуль на промежутке* $[-\pi,\pi]$,

2) $f(\pi,v) = f(-\pi,-v), f(u,\pi) = f(-u,-\pi)$.

Тогда вектор-функция $r^*(u,v) = f(u,v)r(u,v)$ *также определяет модель проективной плоскости.*

Примеры

Рассмотрим некоторые модели проективной плоскости в E^3.

1. *Скрещенный колпак с крышкой*. Положим

$$s(u) = (5\cos(u), 5\sin(u), 0),$$
$$l(u) = (\cos(u/2)\cos(u), \cos(u/2)*\sin(u), \sin(u/2)),$$
$$\rho(u) = s(u) + l(u).$$

Имеем

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (1+\cos(v))(5\cos(u), 5\sin(u), 0) + \\ &+ \sin(v)(\cos(u/2)\cos(u), \cos(u/2)\sin(u), \sin(u/2)). \end{aligned} \tag{2}$$

Если у поверхности (2) срезать крышку, то получим скрещенный колпак [3, с. 304]. Используем следствие к теореме. Положим

$$f(u,v) = \frac{1}{2+\sin(3/2u)\sin(v)}.$$

Построим эти поверхности (рис. 1).

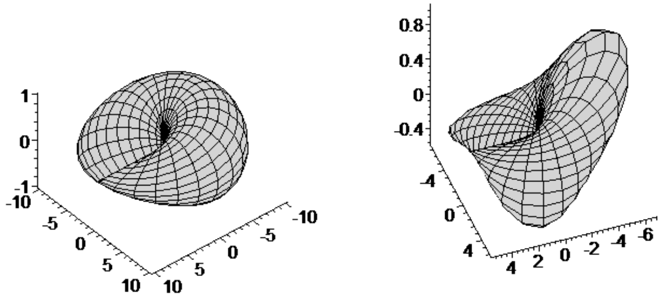

Рис. 1. Скрещенный колпак и его деформация

2. *Римская поверхность.* Рассмотрим случай, когда $s(u) = (0,0,1/4\sin(u))$, $l(u) = 1/2\cos(u/2), 1/2\sin(u/2), 0)$.

Линия $s = s(u)$ у этой поверхности есть отрезок прямой. В прямоугольных координатах данная поверхность определяется уравнением $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + xyz = 0$. Мы получили Римскую поверхность [3, с. 305]. Построим ее (рис. 2).

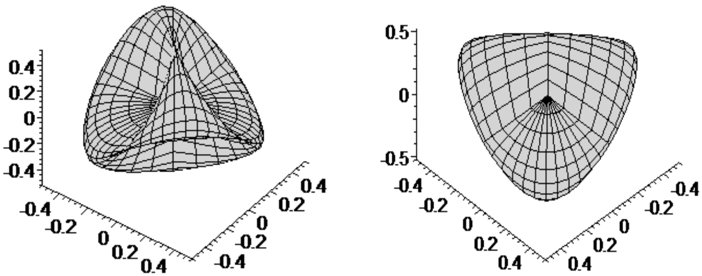

Рис. 2. Римская поверхность

3. *Поверхность Боя.* Используем следствие к теореме. Положим

$$f(u,v) = \frac{1}{2 + \sin(3/2u)\sin(v)}.$$

Тогда поверхность

$$r(u,v)=\frac{1}{2+\sin(3/2u)\sin(v)}((1+\cos(v))(0,0,1/4\sin(u))+$$
$$+\sin(v)((1/2\cos(u/2),1/2\sin(u/2),0)))$$

есть поверхность Боя [3, с. 305]. Если

$$f(u,v)=\frac{1}{2+\sin(5/2u)\sin(v)},$$

то односторонняя поверхность имеет 5 «рогов». Построим ее (рис. 3).

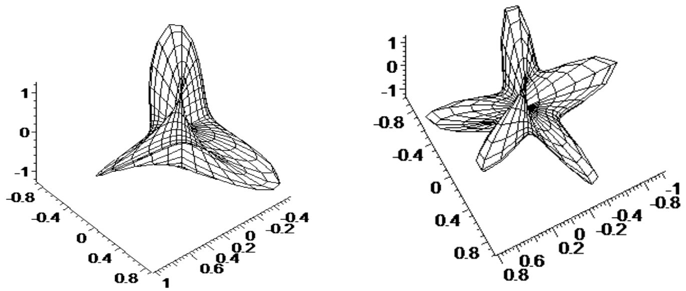

Рис. 3. Поверхность Боя

Список литературы

1. *Mashke H.* Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. 1900. Vol. 1/1.

2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, №5. С. 197—224.

3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М. 2006.

4. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.

5. *Чешкова М.А.* О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. 2012, №1/1. С. 130—135.

6. *Чешкова М.А.* Обмотка тора и лист Мебиуса // Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике. Барнаул, 2014. С. 37—40.

7. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т.* Введение в топологию. М., 1995.

M.A. Cheshkova

The model of projective plane

If along a closed curve on the surface local orientation of the tangent space changes sign, then the surface is called a one-sided surface. The simplest one-sided surface is the Mobius strip. Klein bottle, cross-cap, Roman surface and Boy's surface are also one-sided surfaces. Roman surface, Boy's surface are models of projective plane. We define two vector functions in the Euclidean space E^n : 2π -periodic and 2π -antiperiodic. Using the obtained functions model for the projective plane are given. We construct in the Euclidean space E^3 model for projective plane with a help of mathematical package.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
ESkrydlova@kantiana.ru

Голономность, полуголономность и неголономность однородных и псевдооднородных пространств

Показано, что в общем случае однородное пространство является полуголономным гладким многообразием. Найдено условие голономности однородного пространства. Показано, что проективное пространство обладает голономностью 1-го порядка и тривиальностью 2-го порядка. Доказано, что псевдооднородное пространство, вообще говоря, неголономно.

Ключевые слова: голономность, полуголономность, неголономность, однородное пространство, псевдооднородное пространство.