УДК 514.172.45+514.174.5

МИНИМАЛЬНЫЙ НЕПОРОЖДАЕМЫЙ ВЕЕР

М.Н. Матвеев

Аннотация

Определено понятие порождаемого возможно неполного веера как части порождаемого полного веера. Предложен критерий порождаемости возможно неполного веера. Использование данного критерия позволяет построить в пространстве $\mathbb{R}^3$ минимальный непорождаемый веер из трех двухмерных конусов, попарно пересекающихся в начале координат.

Ключевые слова: многогранники, конусы, вееры, системы линейных уравнений и неравенств.

Введение

О порождении веера многогранником говорят в том случае, когда с помощью многогранника строится веер, то есть семейство конусов, пересечением любых двух из которых является их общая грань. Рассмотрим, например, выпуклый полномерный многогранник, содержащий во внутренности начало координат. Любое семейство конусов, являющихся коническими оболочками граней этого многогранника, является веером. А так как этот веер построен по многограннику, то можно сказать, что многогранник порождает веер.

При исследовании процесса порождения. значительный интерес представляют вееры, не порождаемые многогранниками, впервые вопрос о их существовании был поставлен в [1]. Ответ на этот вопрос был вскоре дан в [2], где приведен пример веера, не порождаемого никаким многогранником. В этой же работе появился и критерий порождаемости веера в виде разрешимости системы линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{cases} \sum a_{ij}x_j > 0, \\ \sum b_{ij}x_j = 0, \\ x_j > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij}, b_{ij} – коэффициенты, определяемые структурой веера, а x_j – переменные, определяющие многогранник, порождающий веер.

Критерий работы [2] был получен для полных вееров в $\mathbb{R}^3$. В [3] этот критерий был обобщен на пространства произвольной размерности и на возможно неполные вееры, состоящие из полноразмерных конусов. Здесь же в [3] с помощью обобщенного критерия был построен пример минимального непорождаемого веера в $\mathbb{R}^3$. Настоящая работа развивает результаты [3] в трех направлениях.

Во-первых, мы рассмотрим вееры, которые могут содержать конусы неполной размерности. Во-вторых, покажем, что для большого подмножества вееров разрешимость системы (1) равносильна разрешимости системы

$$\begin{cases} \sum a_{\gamma j}x_j > 0, \\ x_j > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{\gamma j}$ опять-таки определяются структурой веера, а x_j – те же самые, что и в системе (1). Обратим внимание, что система (2) не имеет ограничений типа равенств, но при этом является бесконечной.

Наконец, используя систему (2), мы построим минимальный непорождаемый веер в $\mathbb{R}^3$ со специальными свойствами: конусы этого веера являются двухмерными и попарно пересекаются в единственной точке – их общей вершине, расположенной в начале координат.

1. Определения

Все определения и результаты настоящей работы приведены для пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n > 0$. При этом объекты, которые рассматриваются в данном пространстве, могут иметь размерность d, $d \leqslant n$.

Конусом будем называть коническую оболочку конечного ненулевого числа векторов a_j. Будем подразумевать, что ни один из этих векторов не является неотрицательной комбинацией остальных: в этом случае лучи, задаваемые векторами a_j, называются экстремальными лучами конуса. Будем подразумевать также, что любая неотрицательная непустая комбинация векторов a_j является ненулевой: в этом случае конус называется острым.

Определение 1. Конечное семейство конусов называется веером, если пересечение любых двух конусов из этого семейства является их общей гранью.

Выпуклым многогранником будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек. Опорной гиперплоскостью к выпуклому многограннику P называется гиперплоскость H такая, что H и P имеют непустое пересечение и P целиком лежит в одном из замкнутых полупространств, задаваемых гиперплоскостью H. Пересечение опорной гиперплоскости H и выпуклого многогранника P называется гранью P. Если при этом P не содержится в H, то грань называется собственной.

При доказательстве критерия непорождаемости будем использовать следующую характеризацию грани выпуклого многогранника: замкнутое выпуклое подмножество F выпуклого многогранника P является гранью P тогда и только тогда, когда любой отрезок $[a, b]$ в P, где b не принадлежит F, не имеет пересечения с F в точке, отличной от a.

Определение 2. Пусть любой конус веера $\mathcal{F}$ является конической оболочкой собственной грани выпуклого многогранника P, содержащего во внутренности начало координат O. Тогда веер $\mathcal{F}$ называется порождаемым, а многогранник P – порождающим многогранником веера $\mathcal{F}$.

Веер называется полным, если объединение его конусов покрывает все пространство, в котором данный веер содержится. Согласно определению 2 внутренность порождающего многогранника содержит начало координат и, следовательно, является непустой. Отсюда следует, что порождающий многогранник является полномерным, а конические оболочки всех собственных граней порождающего многогранника формируют полный веер. Таким образом, определение 2 эквивалентно определению порождаемого (возможно неполного) веера как подвеера порождаемого полного веера.

Установим критерий порождаемости для подмножества множества всех возможно неполных вееров. В общем случае веер этого подмножества можно представлять себе как неполный, но в то же время расположенный «везде» или по крайней мере «достаточно широко» в окружающем пространстве. Благодаря такой визуальной характеризации имеет смысл называть вееры этого подмножества неострыми. Если быть более точным, будем говорить, что веер является неострым, если выпуклая оболочка его конусов содержит по крайней мере одну прямую.

2. Критерий

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ произвольную точку p и аффинную гиперплоскость H, не проходящую через начало координат. Пусть радиус-вектор точки p разложен по радиус-векторам некоторого набора точек, принадлежащих H. Обозначим сумму коэффициентов этого разложения через s. Хорошо известно, что $s = 1$ тогда и только тогда, когда точка p принадлежит H. В то же время нетрудно заметить, что $s < 1$, если точка p лежит «по ту же сторону» от H, что и начало координат, и $s > 1$, если точка p лежит «по противоположную сторону».

Таким образом, можно сказать, что точка p лежит ниже гиперплоскости H, если она принадлежит открытому полупространству, содержащему начало координат, и выше гиперплоскости H, если она принадлежит дополнительному открытому полупространству. Предположим теперь, что точка p – это вершина порождающего многогранника, а гиперплоскость H – это опорная гиперплоскость, определяющая некоторую грань F того же самого порождающего многогранника. В этом случае точка p может лежать только или в гиперплоскости H, если она принадлежит грани F, или ниже гиперплоскости H в противном случае.

Это простое геометрическое наблюдение приводит к построению критерия порождаемости неострого веера. Пусть экстремальные лучи конусов веера $\mathcal{F}$ заданы векторами $a_1, \ldots, a_m$. Тогда любой конус C веера $\mathcal{F}$ может быть представлен как коническая оболочка векторов a_j, $j \in J(C)$, где $J(C)$ – некоторое подмножество $\{1, \ldots, m\}$. Определим $D_+(C)$ как множество всех векторов $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ таких, что $\sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j a_j = 0$, $\gamma_j \geqslant 0$ для всех $j \notin J(C)$ и существует $i \notin J(C)$ такой, что $\gamma_i > 0$. Определим $D_+(\mathcal{F})$ как $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{F}} D_+(C)$. Для обозначения того, что все компоненты некоторого вектора x больше нуля, будем писать $x > 0$.

Теорема 1. *Неострый веер $\mathcal{F}$ является порождаемым тогда и только тогда, когда существует вектор $x = (x_1, \ldots, x_m) > 0$ такой, что*

$$\langle \gamma, x \rangle > 0 \tag{3}$$

для всех $\gamma \in D_+(\mathcal{F})$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть P – порождающий многогранник веера $\mathcal{F}$. Тогда для некоторых $x_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, точки $p_j = a_j / x_j$ являются вершинами P. Возьмем произвольный конус C веера $\mathcal{F}$ и обозначим через F выпуклую оболочку точек p_j, $j \in J(C)$. Определим x как $(x_1, \ldots, x_m)$ и рассмотрим $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in D_+(C)$. Мы имеем

$$\sum_{j \in J(C)} \gamma_j x_j p_j + \sum_{j \notin J(C)} \gamma_j x_j p_j = 0.$$

Пусть $s = \sum\limits_{j \notin J(C)} \gamma_j x_j > 0$ и пусть $p = \sum\limits_{j \notin J(C)} \gamma_j (x_j / s) p_j$. Тогда $p \in P$, $p \notin F$ и

$$p = \sum_{j \in J(C)} -\gamma_j (x_j / s) p_j.$$

Так как $p \in P$, $p \notin F$, то p лежит ниже опорной гиперплоскости к P, проходящей через p_j, $j \in J(C)$. Имеем

$$\sum_{j \in J(C)} -\gamma_j(x_j/s) < 1 = \sum_{j \notin J(C)} \gamma_j(x_j/s).$$

Таким образом, мы доказали, что $\langle \gamma, x \rangle > 0$.

Достаточность. Возьмем произвольный вектор $x = (x_1, \dots, x_m) > 0$, удовлетворяющий (3). Он задает некоторый выпуклый многогранник P как выпуклую оболочку начала координат O и точек $p_j = a_j/x_j$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим конус $C \in \mathcal{F}$ и обозначим через F выпуклую оболочку точек p_j, $j \in J(C)$. Так как $\mathcal{F}$ является неострым, то

$$\sum_{j \in J} \mu_j a_j = 0,$$

где J – некоторое непустое подмножество $\{1, \dots, m\}$ и $\mu_j > 0$ для всех $j \in J$. Ввиду того, что C является острым, это означает, что множество $D_+(C)$ непусто.

Пусть d обозначает размерность конуса C, а $L(C)$ – произвольное d-элементное подмножество множества $J(C)$ такое, что векторы a_j, $j \in L(C)$, являются линейно независимыми. Рассмотрим случай, когда $i \in J(C)$, $i \notin L(C)$. Тогда

$$a_i = \sum\nolimits_{j \in L(C)} \theta_j a_j \quad \text{или} \quad x_i p_i = \sum\nolimits_{j \in L(C)} \theta_j x_j p_j.$$

Пусть $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$, где $\kappa_j = -1$ для $j = i$, $\kappa_j = \theta_j$ для $j \in L(C)$ и $\kappa_j = 0$ в остальных случаях. Возьмем произвольный вектор $\gamma \in D_+(C)$, тогда для любого скаляра s вектор $\gamma + s\kappa$ также принадлежит множеству $D_+(C)$. Следовательно,

$$\langle \gamma + s\kappa, x \rangle > 0$$

для всех s. Это означает, что $\langle \kappa, x \rangle = 0$. Можем заключить, что p_i принадлежит аффинной оболочке p_j, $j \in L(C)$. Таким образом, доказали, что $F = C \bigcap H$, где H – некоторая гиперплоскость, не проходящая через начало координат.

Предположим теперь, что F не является гранью P. Тогда в P существуют точки p, a и b такие, что

$$p = \zeta a + \eta b,$$

где $p \in F$, $b \notin F$ и $\zeta, \eta > 0$, $\zeta + \eta = 1$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ – произвольные векторы, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{j=1}^m \lambda_j p_j, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad j \in J(C), \quad \lambda_j = 0, \quad j \notin J(C), \quad && \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1,\\
a &= \sum_{j=1}^m \alpha_j p_j, \qquad \alpha_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, m, && \sum_{j=1}^m \alpha_j \leqslant 1,\\
b &= \sum_{j=1}^m \beta_j p_j, \qquad \beta_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, m, && \sum_{j=1}^m \beta_j \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Для всех $j = 1, \dots, m$ определим $\gamma_j = (\zeta\alpha_j + \eta\beta_j - \lambda_j)/x_j$ и рассмотрим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. По построению $\langle \gamma, x \rangle = \sum\limits_{j=1}^m \gamma_j x_j \leqslant 0$.

Из неравенства $\langle \gamma, x \rangle \leqslant 0$ находим, что $\gamma_j = 0$ для всех $j \notin J(C)$, так как в противном случае получалось бы, что $\gamma \in D_+(\mathcal{F})$ и $\langle \gamma, x \rangle > 0$. Это означает, что

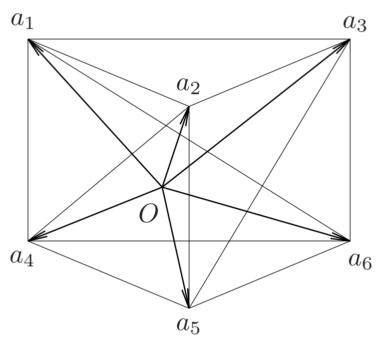

Рис. 1. Веер $\mathcal{F}_1$, встроенный в треугольную призму

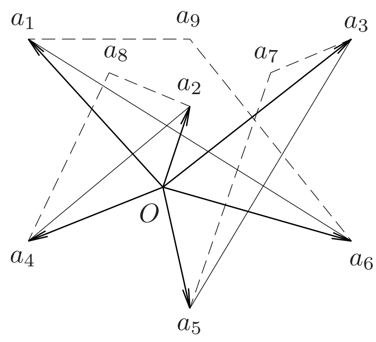

Рис. 2. Непорождаемые вееры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$

$\alpha_j, \beta_j = 0$ для всех $j \notin J(C)$ и $a, b \in C$. Более того, так как все p_j, $j \in J(C)$, принадлежат гиперплоскости H, то a, b также принадлежат гиперплоскости H. Но тогда $a, b \in F$. Это противоречит выбору b и доказывает, что F является гранью P.

Обозначим через G произвольный достаточно маленький многогранник, содержащий во внутренности начало координат O. Так как конус C является острым, то начало координат O не принадлежит F. Следовательно, F является гранью выпуклой оболочки P и G. По определению 2 выпуклая оболочка P и G является порождающим многогранником для $\mathcal{F}$. $\square$

Следует заметить, что существование критерия порождаемости, использующего исключительно неравенства, очень маловероятно для неполных вееров общего вида. Дело в том, доказательство достаточности теоремы 1 становится неверным, если множество $D_+(C)$ пусто. Например, рассмотрим веер $\mathcal{F}$, состоящий из единственного конуса C. Для такого веера множество $D_+(C)$ совпадает с $D_+(\mathcal{F})$ и является пустым. В этом случае любой положительный вектор x удовлетворяет (3). Очевидно, что x может не соответствовать никакому порождающему многограннику для $\mathcal{F}$, так как точки $p_j = a_j/x_j$ необязательно лежат в одной плоскости.

3. Пример

Рассмотрим конфигурацию шести точек $a_1, \ldots, a_6$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, показанную на рис. 1. Эти точки являются вершинами регулярной треугольной призмы, содержащей во внутренности начало координат. Определим $\mathcal{F}_1$ как веер, состоящий из конусов 16, 24 и 35 (см. рис. 1, 2). Для краткости здесь и далее конусы обозначаются номерами j векторов a_j, задающих экстремальные лучи этого конуса. Например, конус 16 обозначает коническую оболочку векторов a_1 и a_6.

Если веер $\mathcal{F}_1$ дополнить конусами 123, 456, 124, 245, 235, 356, 136 и 146, то получится веер, являющийся, пожалуй, наиболее известным примером непорождаемого полного веера. В частности, этот пример используется в [2, 4–6] и особенно активно – в [7].

Теорема 1 показывает, что для доказательства непорождаемости веера $\mathcal{F}_1$ никакие дополнения не требуются: веер $\mathcal{F}_1$ уже является непорождаемым. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что веер $\mathcal{F}_1$ является неострым, а сумма векторов

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\ \ 0,\ \ 1,-1,\ \ 0,-1,\ \ 1\ ) \in D_+(\mathcal{F}_1),\\ \gamma_2 &= (-1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0,-1\ ) \in D_+(\mathcal{F}_1),\\ \gamma_3 &= (\ \ 1,-1,\ \ 0,-1,\ \ 1,\ \ 0\ ) \in D_+(\mathcal{F}_1)\end{aligned}$$

равна нулю. Таким образом, эти векторы не могут удовлетворять (3).

Так как все вееры в $\mathbb{R}^2$ и все вееры, состоящие из двух конусов, являются порождаемыми, то $\mathcal{F}_1$ является минимальным непорождаемым веером. Интересно, что конусы веера $\mathcal{F}_1$ являются двухмерными и попарно пересекаются в начале координат. Первая из этих особенностей позволяет строить на базе $\mathcal{F}_1$ другие непорождаемые вееры, конусы которых также попарно пересекаются в начале координат. Например, пусть a_7, a_8, a_9 являются серединами отрезков $[a_2, a_3]$, $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_3]$ (см. рис. 2), тогда веер $\mathcal{F}_2$, состоящий из конусов 169, 248 и 357, также является непорождаемым.

Другие примеры непорождаемых вееров, состоящих всего из трех конусов, могут быть получены опять-таки из треугольной призмы (см. [3]) в пространстве $\mathbb{R}^3$ и ленты Мёбиуса (см. [8] и [6, пример 5.16]) в пространстве $\mathbb{R}^4$. Однако конусы этих вееров не являются попарно пересекающимися в начале координат.

Summary

M.N. Matveev. A Minimal Nonpolytopal Fan.

The paper defines a polytopal incomplete fan as a subfan of a polytopal complete fan. A criterion for a not necessarily complete fan to be polytopal is proved. Using this criterion, a minimal nonpolytopal fan of three two-dimensional cones pairwise meeting in the origin is found in $\mathbb{R}^3$.

Key words: polytopes, cones, fans, systems of linear equations and inequalities.

Литература

1. *Cains S.S.* Isotropic deformation of geodesic complexes on the 2-sphere and on the plane // Ann. Math. – 1944. – V. 45. – P. 207–217.
2. *Supnick F.* On the perspective deformation of polyhedra. II. Solution of the convexity problem // Ann. Math. – 1951. – V. 53, No 3. – P. 551–555.
3. *Матвеев М.Н.* Невидимые грани и порождающие многогранники // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1, – С. 102–106.
4. *Aurenhammer F.* A criterion for the affine equivalence of cell complexes in $\mathbb{R}^d$ and convex polyhedra in $\mathbb{R}^{d+1}$ // Discrete Comput. Geom. – 1987. – V. 2, No 1. – P. 49–64.
5. *Shephard G.C.* Spherical complexes and radial projections of polytopes // Israel J. Math. – 1971. – V. 9, No 2. – P. 257–262.
6. *Ziegler G.M.* Lectures on polytopes. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 1995. – ix + 370 p.
7. *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations. Structures for algorithms and applications. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 2010. – xiv + 535 p.
8. *Betke U., Schulz C., Wills J.M.* Bänder und möbiusbänder in konvexen polytopen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1975. – V. 44. – P. 249–262.

Поступила в редакцию
20.12.11

Матвеев Михаил Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института.

E-mail: *miklem@mail.mipt.ru*