Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №3. С. 185–194.

УДК 517.9
MSC 35P05

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ. ПРИМЕРЫ I.

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, 362025, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технических университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются примеры применения метода подобных операторов к различным классам дифференциальных операторов первого порядка с периодическими краевыми условиями. А именно, к дифференциальным операторам с интегральным возмущением с суммируемым с квадратом ядром, с возмущением – дробным интегралом Римана – Лиувилля. Также в качестве примера рассматривается оператор, заданный своей трехдиагональной бесконечной матрицей.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, спектр, спектральный проектор.

Благодарности: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00732.

Для цитирования: Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I. Прикладная математика & Физика. 52(3): 185–194.
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES. EXAMPLES I.

A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh state technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received July 15, 2020

Abstract. We present several examples of the use of the method of similar operators in spectral analysis of various first order differential operators with periodic boundary conditions. In particular, we consider perturbations in the form of an integral operator with a square summable kernel, a Riemann-Liouville fractional integral, and an operator with a tri-diagonal infinite matrix.

Key words: similar operator method, first order differential operator, spectrum, spectral projection.

Acknowledgements: The work was carried out with partial financial support from the Russian Foundation for Basic Research, project 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples I. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 185–194 (in Russian).
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

---

1. Предварительные результаты. В [1] приведена модификация метода подобных операторов для исследования спектральных свойств возмущенных линейных дифференциальных операторов первого порядка. Стандартную схему метода подобных операторов можно посмотреть в [2] – [4]; более общую, чем в [1], модификацию — в работе [10]. В данной статье приводятся примеры применения результатов из [1] без предварительного преобразования подобия. Отметим также, что эти примеры отличаются от примеров из [10].

Для удобства читателя вначале вкратце напомним используемые далее конструкции.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbb{J}$ — некоторое непустое подмножество из $\mathbb{Z}$. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – нормальный линейный замкнутый (невозмущенный) оператор, имеющий полупростые собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{J}$, конечной кратности, и удовлетворяющие оценке $\operatorname{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \geqslant \beta > 0$. Обозначим через P_n и $P_{(m)}$, $n \in \mathbb{J}$, $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$ и $P_{(m)} = \sum_{|i| \leqslant m} P_i$. Пусть возмущение B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Далее рассматривается возмущенный оператор $A - B$.

Каждому ограниченному оператору X ставится в соответствие его матрица (X_{ij}), где $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Отметим, что ограниченный линейный оператор однозначно определяется своей матрицей. Определим трансформаторы (операторы в пространстве операторов) J и Γ с помощью их матриц, положив для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \tag{1}$$

Также введем семейства трансформаторов J_k и Γ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \tag{2}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)}(\Gamma X) P_{(k)} = \Gamma(X - J_k X), \; X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{3}$$

Теорема 1.1 [1]. *Пусть $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и выполнено условие*

$$4\|B\|_2 < \beta. \tag{4}$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную матрицу. Имеет место равенство $(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*)$, где оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{5}$$

Пусть возмущение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ такое, что $JB = 0$. Тогда при выполнении условия

$$3\|B\|_2 < \beta \tag{6}$$

операторы $A - B$ и $A - JX_*$ подобны, где X_* есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{7}$$

Отметим, что в [1] условия теоремы 1.1 сформулированы с использованием константы γ из [1, Определение 3.2] вместо константы β. Однако, в условиях настоящей работы, непосредственной проверкой легко убедиться, что константа γ равна β^{-1}.

Условия (4) и (6) теоремы 1.1 довольно жесткие; их можно избежать, если преобразованием подобия приводить оператор $A - B$ не к диагональному, а к блочно-диагональному виду. Для этого используют весовую последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, отвечающую за скорость убывания матричных элементов матрицы-возмущения B по строкам и столбцам (см. [1], [10]).

Для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\left\{ \Big(\sum_{|l| \geqslant n, l \in \mathbb{J}} \|P_l X\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{4}}, \Big(\sum_{|l| \geqslant n, l \in \mathbb{J}} \|X P_l\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{4}} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта последовательность играет основополагающую роль в доказательстве теоремы о подобии (см. [1]). Без ограничения общности везде далее считается, что $P_{(n)} B P_{(n)} \neq 0$. Для оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим оператор $F_X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, действующий по формуле

$$F_X x = \sum_{n \in \mathbb{J}} \alpha_n(X) P_n x, \; x \in \mathcal{H}.$$

Положим $F = F_B$. Через $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначим банахово пространство операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ таких, что $X = X_l F$, $X = FX_r$, где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с нормой $\|X\|_{\mathcal{M}_B} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$.

Важно, что возмущение B принадлежит пространству $\mathcal{M}_B$. Таким образом, пространство $\mathcal{M}_B$ состоит из таких операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которые имеют скорость убывания элементов по строкам и столбцам такую же, как и оператор B.

Теорема 1.2 [1]. *Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$, $B \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору $A - J_k X_* = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i|>k, i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i$, где X_* — решение нелинейного уравнения* (5) *с трансформаторами J_k, Γ_k и $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ впервые была введена в [5]. Но ее явный вид не выписывался ни в [5], ни в других работах по исследованию дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией или оператора Дирака.

Введем следующие обозначения. Положим $l_i = \dim \operatorname{Im} P_i$, $i \in \mathbb{J}$, и обозначим элементы матрицы оператора $P_i B P_i$ через (b^i_{nj}), $1 \leqslant n, j \leqslant l_i$. Также, для любого оператора X, подчиненного оператору A, обозначим через $\widehat{\lambda}_i(X)$ среднее арифметическое (с учетом кратности) собственных значений оператора $P_i X P_i$, $i \in \mathbb{J}$.

Теорема 1.3 [1]. *Имеют место следующие асимптотические формулы.*

$$\widehat{\lambda}_i(A - B) = \lambda_i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} b^i_{nn} + \delta_i, \quad i \in \mathbb{J}, \tag{8}$$

где $(\delta_i, i \in \mathbb{J})$ принадлежит ℓ_1.

Следствие 1.1. *Пусть собственные значения λ_i, $i \in \mathbb{J}$, невозмущенного оператора A простые. Тогда*

$$\lambda_i(A - B) = \lambda_i - b_{ii} + \delta_i, \quad i \in \mathbb{J},$$

где $(\delta_i, i \in \mathbb{J})$ принадлежит ℓ_1.

Далее приводятся примеры различных (интегро-)дифференциальных операторов, иллюстрирующие общие теоремы о подобии и оценках собственных значений. Во всех этих примерах через $L_2[0, \omega]$ обозначено гильбертово пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$ со значениями в $\mathbb{C}$ и суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в $L_2[0, \omega]$ задается формулой

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} x(s)\overline{y(s)}\, ds$$

и норма порождается этим скалярным произведением. Через $W^2_1[0, \omega]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0, \omega]$ с производными из $L_2[0, \omega]$ и скалярным произведением $\langle x, y \rangle = (x, y) + (x', y')$, $x, y \in L_2[0, \omega]$.

2. Примеры. Пример 1. В пространстве $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор первого порядка $\mathfrak{L} : D(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$(\mathfrak{L}y)(t) = y'(t) - \int_0^{\omega} K(t, s) y(s) ds \tag{9}$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = \{y \in W^1_2[0, \omega] : y(0) = y(\omega)\}$. Пусть ядро K интегрального оператора удовлетворяет условию

$$\int_0^{\omega} \int_0^{\omega} |K(t, s)|^2\, ds\, dt < \infty. \tag{10}$$

Невозмущенным оператором считаем оператор $\mathfrak{L}_0 y = y'$, $y \in D(\mathfrak{L}_0) = D(\mathfrak{L})$, а возмущением — оператор $(By)(t) = \int_0^{\omega} K(t, s) y(s)\, ds$. Условие (10) означает принадлежность возмущения B идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Спектральные свойства невозмущенного нормального оператора $\mathfrak{L}_0$ известны. Его простыми собственными значениями являются числа $\lambda_n = i2\pi n/\omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Они соответствуют собственным вектор-функциям $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi n t/\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathfrak{L}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задаются формулами $P_n x = (x, e_n) e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для невозмущенного оператора $\mathfrak{L}_0$ выполнено условие разделенности спектра с константой $\beta = 2\pi/\omega$.

Пусть ядро K имеет ряд Фурье вида $K(t, s) = \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \widehat{k}(l, p) e^{i2\pi l t/\omega} e^{i2\pi p s/\omega}$, $t, s \in [0, \omega]$; тогда из (10) следует $\sum_{l,p \in \mathbb{Z}} |\widetilde{k}(l, p)|^2 < \infty$. Элементы числовой матрицы оператора возмущения определяются формулой

$$b_{lp} = \frac{1}{\omega} \widehat{k}(-l, p), \quad l, p \in \mathbb{Z}.$$

Используем допустимую тройку $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ из [1, § 5.1]. Отметим, что трансформаторы J и Γ задаются формулой (1). Таким образом, из теоремы 1.1 немедленно следует

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие*

$$4\|B\|_2 < \beta = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{11}$$

Тогда оператор $\mathfrak{L}$ подобен оператору $\mathfrak{L}_0 - \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_i X_* P_i$, имеющему диагональную матрицу. При этом $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5). *Преобразование подобия оператора $\mathfrak{L}$ в оператор $\mathfrak{L}_0 - \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_i X_* P_i$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ с $\Gamma X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Заметим, что условие (11) на норму интегрального оператора B является ограничительным. Чтобы избежать этого, можно использовать допустимую тройку $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$ из [1, § 5.2] и теорему 1.2. Но при ее использовании оператор $\mathfrak{L}$ преобразованием подобия приводится к оператору не диагонального, а блочно-диагонального вида.

Теорема 2.2. *Существует такое целое $k \geqslant 0$,что оператор $\mathfrak{L}$ подобен оператору с матрицей блочно-диагонального вида*

$$\mathfrak{L}_0 - V_k = \mathfrak{L}_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_i X_* P_i,$$

где оператор $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Теорема 2.3. *Для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$, $|n| > k$ исходного оператора $\mathfrak{L}$ имеют место следующие асимптотические формулы*

$$\widetilde{\lambda}_n = i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{k}(-n, n) + \beta_n,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1.

Утверждение теоремы 2.3 вытекает из теорем 2.1, 2.2.

Проиллюстрируем теперь вышеизложенные результаты для оператора B, заданного формулой

$$(By)(t) = c\int_0^1 tsy(t)\, ds, \quad y \in L_2[0, 1].$$

Таким образом, ядро интегрального оператора задается формулой $K(t, s) = ts, t, s \in [0, 1]$, ω в данном случае равно 1, и $c > 0$ — некоторая постоянная. В зависимости от величины константы c будет проводиться либо полная диагонализация матрицы оператора $\mathfrak{L}$, либо блочная диагонализация.

Очевидно, что $\|B\|_2 = c/3$ и матрица оператора возмущения B состоит из элементов

$$B_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{4\pi^2 nm}, & n, m \neq 0, \\ \frac{c}{i4\pi m}, & m \neq 0, \quad n = 0, \\ -\frac{c}{4\pi n}, & n \neq 0, \quad m = 0, \\ \frac{c}{4}, & m = n = 0. \end{cases}$$

Операторы JB и ΓB имеют матрицы, состоящие из элементов

$$(JB)_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{4}, & m = n = 0, \\ \frac{c}{(2\pi n)^2}, & n = m \neq 0, \\ 0, & n = m, \end{cases} \quad (\Gamma B)_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{i8\pi^2 nm(n-m)}, & n \neq m, \quad n, m \neq 0, \\ -\frac{c}{8\pi^2 n^2}, & n \neq 0, \quad m = 0, \\ -\frac{c}{8\pi^2 m^2}, & m \neq 0, \quad n = 0, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Воспользуемся первой допустимой тройкой $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$. В этом случае $\beta = 2\pi$.

Теорема 2.4. *Пусть число $c > 0$ удовлетворяет условию*

$$c < \frac{3\pi}{2}. \tag{12}$$

Тогда оператор

$$(\mathfrak{L}y)(t) = \frac{dy}{dt} - c\int_0^1 tsy(s)\, ds$$

с областью определения $D(\mathfrak{L})$, заданной периодическими краевыми условиями, подобен оператору $\mathfrak{L}_0 - Y$, имеющему диагональную матрицу, состоящую из элементов $(i2\pi n - cy_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где последовательность y_n, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{Z})$ и $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного операторного уравнения (5).

Пусть теперь число c не удовлетворяет условию (12). Тогда в качестве допустимой тройки используем тройку $(\mathcal{M}_B, J_n, \Gamma_n)$ из [1, § 5.2].

Оценим последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ в явном виде. Для этого вычислим $\|P_k B\|_2^2$; отметим, что $\|P_k B\|_2^2$ и $\|BP_k\|_2^2$ оцениваются одной и той же величиной. Итак,

$$\|BP_n\|_2^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \|P_l BP_n\|_2^2 = 2\sum_{l\geqslant 1} \|P_l BP_n\|_2^2 + \|P_0 BP_n\|_2^2 = 2\sum_{l\geqslant 1} \frac{c^2}{16\pi^4 l^2 n^2} + \frac{c^2}{16\pi^2 n^2} = \frac{c^2}{12\pi^2 n^2};$$

аналогично,

$$\|BP_0\|_2^2 \leqslant 2\sum_{l\geqslant 1} c\frac{c^2}{16\pi^2 l^2} + \frac{c^2}{16} = \frac{c^2}{12}.$$

Тогда

$$\sum_{|l|\geqslant n} \|BP_k\|_2^2 \leqslant \frac{c^2}{6\pi^2(n-1)},$$

$$\left(\frac{3}{2\pi^2 n}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \alpha_n(B) \leqslant \left(\frac{3}{2\pi^2(n-1)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Итак, последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ оценена. Очень важным является то, что что оценка не зависит от c.

Теперь оценим $\|B\|_2$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|BP_n\|_2^2}{\alpha_n^2} = 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{c^2}{12\pi^2 n^2}\left(\frac{2\pi^2 n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}c^2 \leqslant c^2(\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}\pi}2,61 + \frac{1}{12}),$$

$$\|B\|_2 \leqslant c\left(\frac{2,61}{3\sqrt{6}\pi} + \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В последней формуле учтено, что $\sum_{n\geqslant 1} n^{-\frac{3}{2}} \leqslant 2,61$, а также

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|BP_n\|_2^2}{\alpha_n^2(B)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|P_n B\|_2^2}{\alpha_n^2(B)}.$$

Таким образом, из теоремы 2.2 вытекают

Теорема 2.5 *Существует такое целое $k \geqslant 0$, что оператор $\mathfrak{L}$ подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$\mathfrak{L}_0 - P_{(k)}YP_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_i Y P_i,$$

где $Y \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Теорема 2.6 *Справедливы формулы:*

$$\widetilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{c}{4\pi^2 n^2} + \beta_n, \quad n \neq 0, \quad |n| > k,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1.

Отметим, что впервые последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ была оценена в явном виде в работе [10] для интегро-дифференциального оператора первого порядка с ядром, отличным от приведенного выше. В [6] также приводится оценка явного вида этой последовательности, но, опять же, для другого ядра. В [11] рассматривались дифференциальные операторы второго порядка, возмущенные интегральным оператором. Для них также применялся метод подобных операторов, но использовалась другая модификация, близкая к модификации из [4].

Пример 2. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 - B$ вида

$$(\mathfrak{L}y)(t) = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x)\,dx, \quad t \in [0,1], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re e\,\alpha > 0.5,$$

где оператор $\mathfrak{L}_0 : D(\mathfrak{L}_0) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ определен в примере 1, $D(\mathfrak{L}) = D(\mathfrak{L}_0)$, $\omega = 1$. Через $\Gamma(\alpha)$ обозначена гамма-функция. Возмущением является оператор дробного интегрирования B, заданный формулой

$$(By)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x)\,dx,\ y \in L_2[0,1].$$

Этот оператор обычно называется дробным интегралом Римана-Лиувилля [11], [8], [9]; он ограничен на $L_p[0,1]$, $p \in [1,\infty]$. В рассматриваемом случае ($\Re e\,\alpha > 0.5$) оператор B есть интегральный оператор с суммируемым квадратом на $[0,1]\times[0,1]$ ядром и

$$\|B\|_2 \leqslant \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}((2\Re e\,\alpha - 1)2\Re e\,\alpha)^{-1/2}.$$

Обозначим также через b_j, $j \in \mathbb{Z}$, диагональные элементы возмущения B, а именно

$$b_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}e^{i2\pi j(x-t)}\,dx\,dt.$$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

Теорема 2.7. *При выполнении условия*

$$\pi|\Gamma(\alpha)|((2\Re e\,\alpha - 1)2\Re e\,\alpha)^{1/2} > 2$$

оператор $\mathfrak{L}$ подобен диагональному оператору $\mathfrak{L}_0 - JY$, где $Y \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение уравнения (5). *В общем случае, оператор $\mathfrak{L}$ подобен блочно-диагональному оператору $\mathfrak{L}_0 - J_kY$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение уравнения* (5). *Для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $\mathfrak{L}$ имеют место асимптотические формулы*

$$\widetilde{\lambda}_n = i2\pi n - b_n + \beta_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| > k,$$

где последовательность $(\beta, n \in \mathbb{Z}) \in \ell_1$.

Пример 3. Результаты примера 1 легко обобщаются на случай, когда возмущение является интегральным оператором с матричным ядром. Приведем ниже соответствующий результат.

Пусть

$$\mathcal{H} = L_2([0,1],\mathbb{C}^m) = L_2^m[0,1] = \underbrace{L_2[0,1]\times\ldots\times L_2[0,1]}_{m}$$

есть гильбертово пространство измеримых на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2^m[0,1]$ определяется равенством $(f,g) = \sum\limits_{i=1}^{m}(f_i,g_i)$, $f = (f_1,f_2,\ldots,f_m) \in L_2^m[0,1]$, $g = (g_1,g_2,\ldots,g_m) \in L_2^m[0,1]$, где (f_i,g_i) — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Норма в $L_2^m[0,1]$ порождается этим скалярным произведением: $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_0^1 |f_i(x)|^2\,ds$.

В пространстве $\mathcal{H} = L_2^m[0,1]$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{L}y)(t) = y'(t) - \int\limits_0^1 K(t,s)y(s)\,ds$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = \{y \in \left(W_2^1\right)^m[0,1] : y(0) = y(1)\}$ с ядром K интегрального оператора, таким что

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \|K(t,s)\|_2^2\,ds\,dt < \infty. \tag{13}$$

В этом случае у невозмущенного оператора $\mathfrak{L}_0y = y'$ собственные значения $\lambda_n = i2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются полупростыми, кратности m. Соответствующими собственными векторами являются функции

$$e_{n,j} = e^{i2\pi n\cdot}f_j, \quad n \in \mathbb{Z}, j = 1,2,\ldots,m,$$

где векторы f_j, $j = 1,2,\ldots,m$, образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^m$ и $P_n = P(\{\lambda_n\},\mathfrak{L}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что условие (13) означает принадлежность возмущения B идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Пусть ядро $K(t,s) = (k_{ij}(t,s))$ имеет следующее разложение в ряд Фурье $K(t,s) = \sum_{l,p\in\mathbb{Z}}\widehat{K}(l,p)e^{i2\pi lt}e^{i2\pi ps}$, где $\widehat{K}(l,p) = (\hat{k}_{ij}(l,p))$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$.

Из теорем 1.1 и 1.3, вытекает

Теорема 2.8. *Пусть*

$$2\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \|K(t,s)\|_2^2\,dt\,ds\right)^{1/2} < \pi.$$

Тогда оператор $\mathfrak{L}$ подобен оператору $\mathfrak{L}_0 - \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_iX_*P_i$, где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (5). *Спектр $\sigma(\mathfrak{L})$ оператора $\mathfrak{L}$ допускает представление*

$$\sigma(\mathfrak{L}) = \bigcup_{j\in\mathbb{J}}\widetilde{\sigma}_j,$$

где каждое из множеств $\widetilde{\sigma}_j$ содержит не более чем m собственных значений и для взвешенного среднего $\widehat{\lambda}_j$ этих собственных значений имеет место асимптотическая формула

$$\widehat{\lambda}_j = i2\pi j - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widehat{k}_{ii}(j,j) + \beta'_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где последовательность $(\beta'_i, i \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1.

В случае невыполнения условий теоремы 2.8 для оператора $\mathfrak{L}$ можно построить, аналогично примеру 1, допустимую тройку $(\mathcal{M}_B, J_n, \Gamma_n)$ и получить, с использованием теорем 1.2 и 1.3 такую же оценку для взвешенных средних.

Пример 4. В пространстве $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ рассмотрим оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, заданный трехдиагональной матрицей (a_{nj}), где

$$a_{nj} = \begin{cases} an, & n = j, \\ b_1/n, & j = n-1, \quad n \neq 0, \\ b_2/n, & j = n+1, \quad n \neq 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

b_1, b_2 – некоторые комплексные числа, и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Область определения $D(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ состоит из таких последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |anx(n)|^2 < \infty$.

Представим оператор $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}$, где $(\mathcal{A}_0 x)(n) = anx(n)$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}$, $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$. Таким образом, матрица оператора $\mathcal{A}_0$ диагональна, а матрица оператора-возмущения $\mathcal{B}$ имеет две ненулевые диагонали: первую и минус первую.

Очевидно, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|\mathcal{B}\|_2^2 = 2(|b_1|^2 + |b_2|^2)\sum_{i\geqslant 1} i^{-2} = (|b_1|^2 + |b_2|^2)\pi^2/3$.

У невозмущенного оператора $\mathcal{A}_0$ простыми собственными значениями являются числа $\lambda_n = an$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующими собственными векторами e_n, $n \in \mathbb{Z}$, — векторы стандартного базиса в $\ell_2(\mathbb{Z})$ т. е. $e_n(j) = \delta_{nj}$, где δ_{nj} — символ Кронекера. Спектральный проектор $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathcal{A}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задается формулой $P_n x = (x, e_n)e_n = x(n)e_n$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$.

Пусть $X = (x_{ij})$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда операторы JX и ΓX, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют матрицы

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} x_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{a(i-j)}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Из теоремы 1.1 немедленно следует

Теорема 2.9. *Пусть числа a, b_1, b_2 таковы, что*

$$\pi\left(3|b_1|^2 + 3|b_2|^2\right)^{1/2} < |a|. \tag{14}$$

Тогда оператор $\mathcal{A}$ подобен оператору $\mathcal{A}_0 - JX_*$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную матрицу; оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Как и в примере 1, в случае невыполнения условия (14) можно использовать допустимую тройку из $(\mathcal{M}_B, J_n, \Gamma_n)$.

Оценим и в этом случае явный вид последовательности $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Так как

$$\|P_n\mathcal{B}\|_2^2 = \frac{|b_1|^2 + |b_2|^2}{n^2}, \quad \|\mathcal{B}P_n\|_2^2 = \frac{|b_2|^2}{(n-1)^2} + \frac{|b_1|^2}{(n+1)^2}, \quad n \neq \pm 1,$$

$$\sum_{|l|\geqslant n}\|P_l\mathcal{B}\|_2^2 \leqslant \frac{2(|b_1|^2 + |b_2|^2)}{n-1}, \quad n > 1, \quad \sum_{|l|\geqslant n}\|\mathcal{B}P_l\|_2^2 \leqslant \frac{2|b_2|^2}{n-2} + \frac{2|b_1|^2}{n}, \quad n \neq 2,$$

$$\|P_0\mathcal{B}\|_2 = 0, \quad \|\mathcal{B}P_0\|_2^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \quad \|\mathcal{B}P_1\|_2 = |b_1|, \quad \|\mathcal{B}P_{-1}\|_2 = |b_2|,$$

при $n > 2$ имеем

$$\alpha_n(\mathcal{B}) \leqslant \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{1/4} \max\left\{\left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/4}, \left(\left(\frac{|b_1|^2}{n} + \frac{|b_2|^2}{n-2}\right)\frac{1}{|b_1|^2 + |b_2|^2}\right)^{1/4}\right\}.$$

Тогда из теоремы 1.2 вытекает

Теорема 2.10. *Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$\mathcal{A}_0 - P_{(k)}X_*P_{(k)} - \sum_{|j|>k} P_j X_* P_j,$$

где $P_{(k)} = \sum_{|i|\leq k} P_i$, $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *есть решение нелинейного операторного уравнения* (5).

Из теорем 1.2, 1.3 вытекает

Теорема 2.11. *Спектр* $\sigma(\mathcal{A})$ *оператора* $\mathcal{A}$ *представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \widetilde{\sigma}_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{|i|>k} \{\widetilde{\lambda}_i\} \Big),$$

где множество $\widetilde{\sigma}_{(k)}$ *содержит не более* $2k+1$ *собственных значений,* $\widetilde{\lambda}_i$, $|i| > k$, *— простые изолированные собственные значения и*

$$\widetilde{\lambda}_i = ai + \eta_i, \quad |i| > k,$$

где последовательность $(\eta_i, |i| > k)$ *принадлежит* $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Отметим, что библиографический обзор по трехдиагональным матрицам можно найти в [7]. Элементы матрицы $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям [7, Пример 2]. Только, в отличие от [7], собственные значения диагональной матрицы не разбегаются.

Результаты примера 4 легко обобщаются на случай следующей блочной трехдиагональной матрицы.

Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathcal{A}_{0,-2} & \mathcal{C}_{-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathcal{B}_{-2} & \mathcal{A}_{0,-1} & \mathcal{C}_{-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathcal{B}_{-1} & \mathcal{A}_{0,0} & \mathcal{C}_0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mathcal{B}_0 & \mathcal{A}_{0,1} & \mathcal{C}_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_{0,2} & \mathcal{C}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_{0,n}$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, комплекснозначные матрицы m-ого порядка и $\mathcal{A}_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, — симметрическая матрица.

Матрица $\mathcal{A}$ определяет нормальный линейный оператор $\mathfrak{L} : D(\mathfrak{L}) \subset \ell_2 \to \ell_2$, действующий по формуле $(\mathfrak{L}u)_n = -\mathcal{B}_{n-1}u_{n-1} + \mathcal{A}_{0,n}u_n - \mathcal{C}_n u_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \ell_2$, где $D(\mathfrak{L}) = \{u \in \ell_2 : \mathfrak{L}u \in \ell_2\}$. Введем в рассмотрение также диагональный оператор $\mathfrak{L}_0 : D(\mathfrak{L}_0) = D(\mathfrak{L}) \subset \ell_2 \to \ell_2$, действующий по формуле $(\mathfrak{L}_0 u)_n = \mathcal{A}_{0,n}u_n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $D(\mathfrak{L}_0) = \{u \in l_2 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathcal{A}_{0,n}u_n\|^2 < \infty\}$.

Предположим, что $\sigma(\mathcal{A}_{0,n}) = \{\lambda_n\} = \sigma_n$, где λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — полупростые собственные значения кратности m, и выполнено условие

$$\operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j) \geqslant \beta > 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Матрицы $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, таковы, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{C}_n\|^2) < \infty.$$

Теорема 2.12. *Существует такое* $k \in \mathbb{Z}_+$, *что оператор* $\mathfrak{L}$ *подобен блочно-диагональному оператору*

$$\mathcal{L}_0 - P_{(k)}X_*P_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_i X_* P_i,$$

где оператор $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *есть решение нелинейного операторного уравнения* (5).

Далее можно применить теорему 1.3 для оценки взвешенных средних оператора $\mathfrak{L}$.

Список литературы

1. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85. DOI: https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85

2. Баскаков А. Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. матем. журн., 24(1): 21–39.

3. Баскаков А. Г. 1994. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., 58(4): 3–32.

4. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом. Матем. сб., 208(1): 3–47. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8637

5. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом — Изв. РАН. Сер. матем., 75(3): 3–28. DOI: https://doi.org/10.4213/im4202

6. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2019. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 171: 3–18. DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-3-18

7. Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. 2019. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц. Уфимск. матем. журн., 11(3): 10–29.

8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 688.

9. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 220.

10. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050

11. Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. 2019. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators. J. Phys.: Conf. Series, 1203: 012102. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012102

12. Riesz M. 1949. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math., 81: 1–223. DOI: 10.1007/BF02395016

References

1. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in spectral analysis of infinite operator matrices. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 71–85 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85

2. Baskakov A. G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 24(1): 17–32. (in Russian)

3. Baskakov A. G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Izv. Math., 45(1): 1–31. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001621. (in Russian)

4. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2017. The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potentials. Sb. Math., 208(1): 1–43. DOI: 10.1070/SM8637. (in Russian)

5. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izv. Math., 75(3): 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540. (in Russian)

6. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B., «Method of similar operators in the study of spectral properties of perturbed first-order differential operators», Proceedings of the Voronezh Winter Mathematical School «Modern Methods of Function Theory and Related Problems.» January 28 – February 2, 2019. Part 2, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 171, VINITI, Moscow, 2019, 3–18. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-3-18. (in Russian)

7. Braeutigam I.N., Polyakov D.M. 2019. Asymptotics of eigenvalues of infinite block matrices. Ufa Math. J., 11(3): 11–28. DOI: 10.13108/2019-11-3-11. (in Russian)

8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1993. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1006 p.

9. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. The transmutation method for differential equations with Bessel operators. Moscow, Fizmatlit, 220 p (in Russian).

10. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050

11. Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. 2019. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators. J. Phys.: Conf. Series, 1203: 012102. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012102

12. Riesz M. 1949. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math., 81: 1–223. DOI: 10.1007/BF02395016

Получена 15.07.2020

Баскаков Анатолий Григорьевич – профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова

ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, Россия, 362025

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса

http://orcid.org/id: 0000-0001-7171-2177

WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, USA, 60115

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета

http://orcid.org/0000-0002-9212-8786

ул. 20 лет Октября, 84, г. Воронеж, Россия, 394006

E-mail: nat-uskova@mail.ru