УДК 519.01

МАТРОИД РАДОНА ГРАФА

© С.В. Кольцова, С.В. Поленкова

Koltsova S.V., Polenkova S.V. Graph Radon matroid. In this article we present a new kind of matroid for graphs, which we call the Radon matroid. Radon matroid (MR) of the graph G is a matroid, which can be represented by incident matrix of the graph, which has a rank equal to the number of graph vertexes. Elements of the MR are the graph edges. We notice, that the rank of the circuit matroid of a graph is one unit less that of the MR. In the work the MR characterization is given in terms of graph structure. We prove, that MR bases are the edges of spanning subrgaph, which are disjunctive union of unicyclic graphs with odd cycles. It is shown that these subgraphs coincide with the admissible complexes of Radon transformation on the graph.

§1. Введение.

Хорошо известна задача Радона о восстановлении функции f на плоскости через ее интегралы Rf по прямым, а в $n-$ мерном пространстве – по гиперплоскостям [1]. Интегральный оператор R, сопоставляющий функции f функцию $\varphi = Rf$, называется преобразованием Радона. Простейшее обобщение преобразования Радона получил Йон [2]. Его преобразование I относит произвольной функции f, определенной на $\mathbb{R}^n$, ее интегралы If по всевозможным прямым. В результате получается функция $\varphi = If$ на многообразии прямых. Главное отличие преобразования Йона I от преобразования Радона R в том, что преобразование Радона R переводит функции от n переменных в функции от того же числа n переменных, а преобразование Йона I переводит функции от n переменных в функции от $2(n-1)$ переменных, а это число больше n при $n > 2$. Отсюда следует, что задача о восстановлении функции f на $\mathbb{R}^n$ по ее преобразованию If является переопределенной: для восстановления f достаточно, вообще говоря, задавать If не на всем многообразии прямых, а лишь на некоторых n-мерных подмногообразиях (комплексах K). Разумеется, существование формулы обращения и ее явный вид существенно зависят от структуры комплекса K. В связи с этим возникают задачи: 1) описать все "хорошие" K (допустимые комплексы), для которых существует явная формула обращения, 2) восстановить f через ограничение If на допустимый комплекс K, построив явную формулу обращения или предъявив эффективный алгоритм восстановления. Следуя сложившейся традиции, преобразование Йона мы будем называть также преобразованием Радона и обозначать R.

Впервые допустимые комплексы прямых в C^n были введены и исследованы в работах Гельфанда и Граева [3]–[5]. Явное описание допустимых комплексов прямых в CP^3 было дано в работе Кириллова [6], геометрическая структура допустимых комплексов прямых в C^n изучалась в работах Майуса [7]–[8], допустимые комплексы двумерных плоскостей в C^n и $\mathbb{R}^n$ изучались в статьях [9]–[10] одного из соавторов данной работы. Комбинаторное преобразование Радона было введено Болкером в работе [11], допустимые комплексы для комбинаторного преобразования Радона были определены и изучались в работе [12]. Там были найдены комбинаторные аналоги некоторых теорем, полученных в непрерывном случае (в частности, теоремы Кириллова).

Данная работа лежит на стыке теории графов, теории матроидов и комбинаторного преобразования Радона. Напомним необходимые в дальнейшем понятия и факты из этих областей.

§2. Предварительные сведения

1. Пусть $G = (V,E)$ – граф, V – n-элементное множество вершин, E – m-

элементное множество ребер. Граф $H = (V', E'), V' \subset V, E' \subset E$ называется подграфом графа G. Подграф, у которого $V' = V$, называется остовным подграфом. В дальнейшем предполагается, что граф G – обыкновенный, то есть неориентированный, без петель и кратных ребер. Маршрутом из x_0 в x_k на графе называется конечная последовательность вершин и ребер

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, \tag{1}$$

где ребро $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, вершина v_0 называется началом, а v_k – концом маршрута. Длиной маршрута называется число ребер в последовательности (1). Маршрут называется замкнутым, если $v_k = v_0, k > 0$. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны. Маршрут называется путем, если все его вершины различны (за исключением, возможно, первой и последней). Замкнутая цепь называется циклом, а замкнутый путь называется простым циклом. Циклом (простым циклом) также будем называть подграф графа G, состоящий из вершин и ребер, входящих в цикл (простой цикл). Для любого графа условия, что G содержит маршрут, цепь или путь, эквивалентны. Граф G называется связным, если любые его две вершины можно соединить путем. Связный подграф H графа G называется компонентой связности, если не существует связного подграфа X, отличного от H и G такого, что $H \subset X \subset G$.

Граф является связным, если он имеет ровно одну компоненту и несвязным – в противном случае. Любой граф можно представить в виде дизъюнктного объединения его компонент связности. Деревом называется связный граф без циклов. Граф без циклов называется лесом, его связные компоненты – это деревья. Лес H называется остовным, если он содержит все вершины графа G и на каждой компоненте связности графа G подграфом H порождается дерево.

Связный граф только с одним циклом называется унициклическим.

Число

$$\chi(G) = n - m$$

называется эйлеровой характеристикой графа. Для связного графа

$$\chi(G) \leqslant 1.$$

Связный граф G является деревом тогда и только тогда, когда $\chi(G) = 1$.

Граф G называется полным, если его ребра – всевозможные двухэлементные подмножества из V, обозначается K_n. Обозначим $|A|$ – количество элементов в конечном множестве A. В полном графе K_n

$$|E| > |V| \text{при } n > 3.$$

Граф $G = (V, E)$ называется двудольным, если его множество вершин V можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 так, что один конец каждого ребра $e \in E$ принадлежит V_1, а второй – V_2.

Для того чтобы граф был двудольным, необходимо и достаточно, чтобы каждый его цикл имел четную длину (теорема Кёнига).

2. Матроидом M называется пара $(E, \mathcal{B})$, где E – непустое конечное множество, $\mathcal{B}$ – непустая совокупность его подмножеств B (называемых базами), удовлетворяющая следующим условиям:

1) никакая база не содержит в качестве собственного подмножества другую базу;

2) если B_1 и B_2 базы и e любой элемент из B_1, то существует элемент $f \in B_2$, обладающий тем свойством, что $(B - \{e\}) \cup \{f\}$ также является базой.

Элементы множества E называются элементами матроида M, число $|E|$ называется порядком матроида.

Любые две базы матроида содержат одинаковое число элементов. Это число называется рангом M, обозначается $\rho(M)$. Любое подмножество базы называется независимым, в противном случае подмножество A из E называется зависимым. Минимальное относительно включения зависимое множество называется циклом матроида. Для любой базы B матроида и любого его элемента e, не входящего в эту базу, множество $B \cup e$ содержит ровно один цикл. Два матроида $M_1 = (E_1, \mathcal{B}_1)$ и $M_2 = (E_2, \mathcal{B}_2)$ называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : E_1 \to E_2$ такая, что для любого $X \subset E_1$ его образ $\varphi(X) \in \mathcal{B}_2$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{B}_1$, обозначение $M_1 \cong M_2$.

Любому графу G можно естественным образом сопоставить некоторый матроид, если в качестве E взять множество ребер графа, а в качестве баз – ребра его остовных лесов. Этот матроид называется циклическим матроидом графа, обозначается $M(G)$.

Пусть E – конечное множество векторов в векторном пространстве L над полем F. Зададим на E матроид, взяв в качестве баз всевозможные максимальные линейно-независимые подмножества из E. Полученный матроид называется векторным матроидом.

Пусть $M = (E, \mathcal{B})$ – матроид, A – произвольная матрица размера $m \times n$ над полем F. Матрица A называется представлением матроида M, если

1) rank $A = \rho(M) = \rho$;

2) система любых ρ строк матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_\rho$ линейно независима тогда и только тогда, когда множество $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_\rho}\}$ является базой матроида M.

Матроид называется представимым (координатизуемым) над полем F, если он имеет представление над F.

Матроиды, представимые над любым полем, называются регулярными. Существуют матроиды, представимые только над некоторыми полями и существуют не представимые ни над каким полем (см. [13]).

Системой множеств $(S, \mathcal{U})$ называется множество S вместе с семейством $\mathcal{U}$ подмножеств множества S (не обязательно непересекающихся). Матрицей инцидентности системы множеств $(S, \mathcal{U})$ называется $(0,1)$ – матрица $A = (a_{ij})$, столбцам и строкам которой присвоены те же индексы, что и элементам S и $\mathcal{U}$ соответственно, при этом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_j \in u_i \\ 0, & \text{если } s_j \notin u_i \end{cases},$$

где $s_j \in S, u_i \in \mathcal{U}$.

Обыкновенный граф $G = (V, E)$ можно рассматривать как систему множеств, где $S = V, \mathcal{U} = E$. Матрица инцидентности A системы в этом случае совпадает с обычной матрицей инцидентности $I(G)$ графа G.

В теории графов известна следующая теорема (см., например, [13]).

Т е о р е м а. Пусть G – граф, $I(G)$ – его матрица инцидентности. Тогда циклический матроид графа представим векторным матроидом строк матрицы $I(G)$, если ее рассматривать над полем F_2.

3. Обозначим через $L(X)$ – пространство функций на конечном множестве X со значениями в $\mathbb{C}$.

Назовем преобразованием Радона на графе G оператор $R : L(V) \to L(E)$, сопоставляющий каждой функции $f \in L(V)$ функцию $(Rf)(e) \in L(E)$, чье значение на ребре $e \in \{u, v\}$ равно сумме значений функции f на концах этого ребра ("интеграл"функции f по ребру e)

$$(Rf)(e) = f(u) + f(v), e = \{u, v\} \qquad (1)$$

Комплекс – это остовный подграф с n ребрами и без изолированных вершин. Допустимый комплекс – это комплекс, на котором ограничение преобразования Радона биективно.

§3. Постановка задачи и формулировка результатов

О п р е д е л е н и е. Матроид M, у которого существует представление матрицей инцидентности системы множеств $(S, \mathcal{U})$, имеющей ранг, равный $|S|$, назовем матроидом Радона (MR) системы множеств. Элементами MR служат элементы $\mathcal{U}$.

Возникает задача: характеризовать MR в терминах системы $(S, \mathcal{U})$.

Целью нашей работы является характеризация матроидов Радона графов.

Заметим, что циклические матроиды графов не являются матроидами Радона, так как ранг циклического матроида $\rho(M) = |V| - 1$.

Очевидно, что матроид Радона можно построить не на любом графе. Ниже будет показано, что это нельзя сделать, например, для двудольных графов.

В дальнейшем ограничимся графами G, у которых нет изолированных вершин и число вершин $n \geqslant 3$ не превосходит числа ребер m. Пусть ранг матрицы инцидентности $I(G)$ равен n. Тогда она представляет MR графа G. Базами этого представляющего матроида являются n-ки линейно независимых строк матрицы $I(G)$. Поставим задачу: найти базы матроида Радона графа.

Имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. Базы матроида Радона – это ребра допустимых комплексов преобразования Радона на графе.

Т е о р е м а 2. Базы матроида Радона – это ребра остовных подграфов, представляющих собой дизъюнктные объединения уницикличеких графов с циклами нечетной длины.

§4. Доказательство теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что матрица преобразования Радона (1) в стандартном базисе из дельта-функций и матрица инцидентности $I(G)$ при такой же нумерации вершин и ребер графа G совпадают.

Доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы разобъем на несколько лемм.

Лемма 1. Эйлерова характеристика любого связного графа не превосходит эйлеровой характеристики любого его подграфа.

Доказательство. Пусть граф $G = (V, E)$ – связный обыкновенный граф, V – n-элементное множество вершин, E – m-элементное множество ребер. Пусть $\chi(G)$ – его эйлерова характеристика, $\chi(G) = n - m$. Рассмотрим произвольный подграф $H = (V', E')$, $V' \subset V, E' \subset E$. Его можно получить из графа удалением вершин и ребер. Более точно: удаление вершины сопровождается удалением всех инцидентных ей ребер, удаление ребра оставляет все вершины графа на месте. Будем предполагать, что связный граф G не состоит из одной вершины, тогда у каждой его вершины есть инцидентные ей ребра. Удаляя вершину вместе с инцидентными ребрами, мы либо не изменим эйлерову характеристику графа, если инцидентное ребро одно (т.е. валентность вершины равна единице), либо увеличим эйлерову характеристику, если вершина инцидентна больше, чем одному ребру (т.е. валентность вершины строго больше единицы). При удалении ребра мы уменьшаем только число ребер графа (число вершин графа сохраняется). В итоге, эйлерова характеристика любого подграфа больше либо равна эйлеровой характеристике графа. $\square$

Лемма 2. Любой комплекс K содержит хотя бы один простой цикл.

Доказательство. Комплекс K по определению – это остовный подграф с n ребрами и без изолированных вершин. Его эйлерова характеристика $\chi(K) = 0$. Если K – связный, то он содержит цикл, так как K не может быть деревом: у дерева эйлерова характеристика равна 1. Если K – несвязный, то он не может быть лесом, так как в этом случае его эйлерова характеристика была бы больше 1 (равнялась бы количеству деревьев в лесу). Рассмотрим одну из его связных компонент, не являющуюся деревом, тогда она должна иметь цикл, а следовательно, простой цикл. $\square$

Лемма 3. Если комплекс K допустим, то ни одна его компонента связности не является деревом.

Доказательство. Предположим противное: пусть у допустимого комплекса K имеется компонента, являющаяся деревом. Так как у дерева k вершин и $k-1$ ребро, то в системе уравнений, задающей преобразование Радона (1), имеется подсистема из $k-1$ уравнения с k неизвестными, которые в другие уравнения системы не входят. Следовательно, их нельзя найти однозначно. Другими словами, преобразование Радона необратимо, что противоречит допустимости K. $\square$

Лемма 4. Если комплекс K допустим, то все его простые циклы нечетны.

Доказательство. По лемме 2 любой комплекс содержит хотя бы один простой цикл. Докажем, что если комплекс K допустим, то любой его простой цикл нечетный. Предположим противное: пусть допустимый комплекс K имеет хотя бы один простой четный цикл C. Обозначим число ребер этого цикла $2k$. Пусть функция $f|_C = (x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$. Пусть $Rf|_C = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k})$. По определению преобразования Радона

$$\begin{cases} \alpha_i &= x_i + x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2k-1 \\ \alpha_{2k} &= x_1 + x_{2k} \end{cases} \tag{4}$$

Найдем альтернированную сумму

$$\sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} \alpha_i - \alpha_{2k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i+1} (x_i + x_{i+1}) - x_{2k} - x_1 = 0. \tag{5}$$

В итоге получили уравнение, которому с необходимостью должны удовлетворять координаты вектора $Rf \in L(E)$, чтобы существовало решение системы (4). Так как размерности пространств функций на вершинах и на ребрах комплекса равны между собой и равны n, то в силу (5) размерность образа преобразования Радона строго меньше n, а следовательно, преобразование Радона не обратимо, что противоречит допустимости комплекса K. $\square$

Лемма 5. Для того чтобы комплекс K был допустимым, необходимо и достаточно, чтобы каждая его связная компонента содержала единственный простой цикл нечетной длины.

Доказательство.

Необходимость. Пусть комплекс K допустим. Возьмем его любую связную компоненту G_i, содержащую k_i вершин. По лемме 3 она не может быть деревом, следовательно, эта компонента содержит простой цикл C. Пусть e – ребро этого цикла, а $\widetilde{G}_i = G_i - e$ – граф, полученный из G_i в результате отбрасывания ребра e. Граф $\widetilde{G}_i$ – по-прежнему связный. Действительно, если путь из вершины x в y использует ребро e, то имеется другой путь из x в

y, не использующий ребра e (вместо того, чтобы идти через ребро e, надо пойти по циклу в противоположном направлении). Повторяя эту процедуру, мы после r шагов получим дерево, имеющее $(k_i - 1)$-ребер.

Так как r ребер выброшено, то G_i имел $(k_i - 1) + r$ ребер. Найдем эйлерову характеристику G_i:

$$\chi(G_i) = 1 - r. \tag{6}$$

Для связной компонеты допустимого комплекса K эйлерова характеристика должна быть равной нулю. Действительно, так как связная компонента не является деревом, то она содержит простой цикл. Его эйлерова характеристика равна нулю. По лемме 1 вся связная компонента имеет эйлерову характеристику меньше или равную нулю. Эйлерова характеристика всего комплекса равна нулю. С другой стороны, эйлерова характеристика объединения компонент связности (т.е. эйлерова характеристика комплекса) равна сумме эйлеровых характеристик компонент. Сумма неположительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда они все нули. Следовательно, из (6) получаем, что $r = 1$. Таким образом, в связной компоненте можно отбросить только одно ребро, чтобы получилось дерево, а, значит, простой цикл C в компоненте G_i единственный. По лемме 4 цикл C имеет нечетную длину.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть каждая компонента K имеет единственный простой цикл нечетной длины. Так как любой комплекс – это остовный подграф с n ребрами и без изолированных вершин, то любая его компонента не может быть изолированной вершиной, а значит, с началом и концом в каждой вершине компоненты существует свой замкнутый путь, включающий в себя простой нечетный цикл. Для восстановления значения функции f в произвольной вершине компоненты выйдем из этой вершины по ребру указанного выше пути, взяв значение Rf на этом ребре со знаком плюс, затем, чередуя знаки у Rf, дойдем до нечетного цикла, обойдем его по границе и вернемся в исходную вершину по "своим следам". В результате получим, что альтернированная сумма значений Rf на ребрах этого замкнутого пути равна $2x_i$, где x_i значение f в начальной вершине. Отсюда находим x_i. Указанный процесс можно повторить для любой вершины и любой компоненты связности комплекса K. □

Из доказанных лемм легко следует наша теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Radon J. Uber die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwarte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. – Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Lipzig, Math.-Nat.Kl. 69 (1917), 262–277.

2. John F. The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. Duke Math. J., 1938, 300–322.

3. Гельфанд И.М., Граев М.И. Интегральные преобразования, связанные с комплексами прямых в комплексном пространстве ДАН ССР, 138, № 6, 1961.

4. Гельфанд И.М., Граев М.И. Комплексы k-мерных плоскостей в пространстве $\mathbb{C}^n$ и формула Планшереля на группа GL (n,$\mathbb{C}$), ААН СССР, 179, № 3, 1968.

5. Гельфанд И.М., Граев М.И. Комплексы прямых в пространстве $\mathbb{C}^n$. Функ. анал. 2, вып. 3, 1968.

6. Кириллов А.А. Об одной задаче И.М.Гельфанда. ДАН СССР, 137, № 2, 1962.

7. Майус К. Структура допустимых комплексов прямых в $\mathbb{C}^n$. Функ. анал. 7, вып. 61, 1973, 79–81.

8. Майус К. Допустимые комплексы прямых с одной критической точкой. Функ. анал. 9, вып. 2, 1975, 81–82.

9. Кольцова С.В. Допустимые комплексы 2-плоскостей в $\mathbb{C}^n$, деп. в ВИНИТИ, № 668, 1976, 1–12.

10. Кольцова С.В. Допустимые комплексы 2-плоскостей общего положения. Функ. анал. 9, Ульяновск, 1977.

11. Bolker E.D. Finite Radon transform. Contemporary Mathematics, vol. 63, 1987, 27–49.

12. Bolker E.D., Grinberg E., Kung J. Admissilble complexes for the combinatorial Radon transform. Contemporary Mathematics, volume 113, 1990, 1–3.

13. Уилсон Р. Введение в теорию графов. Москва. "Мир", 1977, 208.

БЛАГОДАРНОСТИ: Мы выражаем свою глубокую признательность В.Ф. Молчанову за ценные советы и полезные обсуждения.

Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.