

Матричная логика

*М.А.Марценюк, профессор, Пермский государственный
национальный исследовательский университет, mrcn@psu.ru*

Рассматривается матричное представление логики, позволяющее с единых позиций рассмотреть 1) операции обычной («четкой») логики, 2) обобщение логики на случай нечетких логических переменных и 3) сети Байеса. Эффективность подхода демонстрируется на примерах.

Введение

В настоящее время получило широкое распространение алгебраическое представление логики. Однако, как хорошо известно, любая алгебра имеет матричное представление. В работе Мизражи [1] было предложено векторное представление логических переменных и тензорное представление логических операций. В дальнейшем в работах автора [2, 3] этот аппарат был обобщен на случай нечетких логических переменных и сетей Байеса, включая зависимые переменные. Цель данного соображений состоит в том, чтобы показать возможности матричного представления логики и ее обобщений в рамках единого аппарата позволяющего охватить широкий круг практических задач, эффективность его применения в учебном процессе. Отметим, что большую роль в этом подходе играет реализация логических операций в виде операторно-логических схем [4]. План сообщения следующий. В разделе 2 введен аппарат матричной логики и дано его обобщение на случай нечетких переменных. Рассмотрены примеры нечеткого логического вывода (нечеткий метод резолюции). В разделе 3 аппарат обобщен на случай зависимых логических переменных (сети Байеса).

Матричное представление нечеткой логики

В матричном представлении каждой логической переменной сопоставляются двумерный вектор $\mathbf{x}$. Если ввести базисные векторы $\mathbf{e}^{(0)}$, $\mathbf{e}^{(1)}$, то вектор $\mathbf{x}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}^{(0)} + x_1 \mathbf{e}^{(1)}, \quad (1)$$

причем компоненты вектора $\mathbf{x}$ – числа x_0, x_1 – удовлетворяют условиям

$$0 \leq x_0, x_1 \leq 1, \quad x_0 + x_1 = 1. \quad (2)$$

Благодаря этим условиям числа x_0, x_1 можно интерпретировать как вероятности наступления некоторого события A . В частном случае,

когда $\mathbf{x} = \mathbf{e}^{(0)}$ или $\mathbf{x} = \mathbf{e}^{(1)}$, вектор описывает переменную обычной («четкой») логики.

Мерой нечеткости переменной $\mathbf{x}$ служит энтропия, которая вычисляется по формуле Больцмана-Шеннона

$$S(\mathbf{x}) = -x_0 \log_2 x_0 - x_1 \log_2 x_1. \quad (3)$$

Для двух нечетких логических переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ можно ввести логические операции, которые мыслятся как отображения прямого произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ на некоторый вектор $\mathbf{z}$

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \xrightarrow{P} \mathbf{z}, \quad (4)$$

где символ P указывает код отображения. В явном виде соотношение (4) можно записать как тензорное равенство

$$z_i = T_{i,j,k}^{(P)} x_j y_k, \quad (5)$$

где тензорные индексы i, j, k пробегает значения $0, 1$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Компоненты тензора $T_{i,j,k}^{(P)}$ принимают значения 0 или 1 . Этим обеспечивается совпадение всех операций P с операциями четкой логики, когда векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ принимают четкие значения.

Не трудно подсчитать, что всего существует 16 логических операций. Компоненты результирующего вектора $\mathbf{z}$ оказываются равными линейным комбинациям четырех произведений $x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1$. Например, для конъюнкции имеем

$$z_0 = x_0 y_0 + x_0 y_1 + x_1 y_0, \quad z_1 = x_1 y_1. \quad (6)$$

Большое значение для понимания работы нечетких логических сетей имеет возможность их представления в виде электрических схем, которое называют реализацией. Как показано в [2], нечеткую переменную можно реализовать как непрерывный делитель (или разветвитель) тока (рис.1). При этом компоненты x_0, x_1 вектора $\mathbf{x}$ определяют доли входного тока J , попадающего в ветви делителя. В точке разветвления должен выполняться закон сохранения тока (первый закон Кирхгофа) $x_0 J + x_1 J = J$, что обеспечено условиями (2).

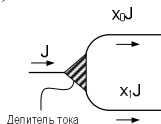


Рис. 1. Реализация нечеткой логической переменной в виде непрерывного делителя тока

Реализация прямого произведения логических векторов, а также операций конъюнкции и дизъюнкции показана на рис. 2. Отметим, что для нечетких логических операций выполняются свойства коммутатив-

ности и ассоциативности, а свойства идемпотентности и дистрибутивности не имеют места. Также в нечеткой логике нарушается закон исключения третьего и закон противоречия (см. подробнее [2]).

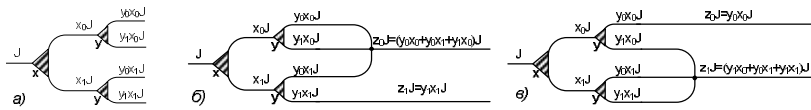


Рис. 2. Реализация прямого произведения логических векторов (а), операций конъюнкции (б) и дизъюнкции (в)

Логические операции конъюнкции и дизъюнкции можно также следующим образом представить в матричном виде. Сопоставим вектору $\mathbf{x}$ конъюнктивную $C(\mathbf{x})$, дизъюнктивную $D(\mathbf{x})$ и импликативную $I(\mathbf{x})$ матрицы размером 2×2 , образованные из его компонент

$$C(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}; \quad D(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}; \quad I(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

С помощью этих матриц логические операции над нечеткими переменными могут быть представлены в виде

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = C(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}; \quad \mathbf{x} \vee \mathbf{y} = D(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}; \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}, \quad (8)$$

где вектор $\mathbf{y}$ следует мыслить как матричный столбец 1×2 , составленный из компонент этого вектора, а точка обозначает матричное умножение.

Рассмотрим нечеткое логическое правило *modus ponens*. В четкой логике, если логическая переменная $\mathbf{x}$ истинна ($\mathbf{x} = \text{true}$) и импликация $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$ тоже истинна ($\mathbf{z} = \text{true}$), то из этого следует, что переменная $\mathbf{y}$ тоже истинна. Например, если объект А – человек, а всякий человек смертен, то А тоже смертен. В нечеткой логике задача ставится таким образом. Пусть известна нечёткая переменная $\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T$, а также нечёткая переменная $\mathbf{z}$, определяющая нечёткость правила $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$. Спрашивается, какой вывод можно сделать о нечеткости переменной $\mathbf{y}$? Как следует из соотношений (7)–(8), эта задача сводится к решению линейного алгебраического уравнения $I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z}$ относительно неизвестного вектора $\mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Как известно, линейная система имеет решение, если определитель матрицы коэффициентов не равен нулю. В данном случае мы должны

потребовать, чтобы было $\det(I(\mathbf{x})) = x_1 \neq 0$. То есть вероятность истинности переменной $\mathbf{x}$ не должна быть равна нулю. Тогда компоненты неизвестной переменной $\mathbf{y}$ принимают значения:

$$y_0 = \frac{z_0}{x_1}; \quad y_1 = 1 - \frac{z_0}{x_1}. \quad (10)$$

Полученное решение имеет смысл только если компонента y_1 положительна. Поэтому кроме условия $x_1 \neq 0$ получаем дополнительно, что $x_1 \geq z_0$. Отметим, что при $x_1 = 1$, $z_1 = 1$ из (10) имеем результат правила modus ponens в четкой логике $y_0 = 0$; $y_1 = 1$.

Представляет интерес рассмотреть нечеткое *правило резолюции*, которое формулируется следующим образом. Пусть нам известны две нечеткие импликации $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{u}$ и $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – заданные нечеткие переменные. Задача состоит в том, чтобы исключив переменную $\mathbf{y}$ найти нечеткость импликации $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{w}$, значение которой мы обозначили символом $\mathbf{w}$. После простых преобразований можно

найти [2], что $w_0 = \frac{v_0 x_1^2}{x_1 - u_0}$; $w_1 = 1 - \frac{v_0 x_1^2}{x_1 - u_0}$.

Если оба вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ истинны, то и из полученного результата следует, что и вектор $\mathbf{w}$ тоже истинный. В нечеткой логике результат зависит не только от степени истинности исходных импликаций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, но и от истинности посылки $\mathbf{x}$. Чтобы избежать громоздких вычислений в современной нечеткой логике предложены различные эмпирические формулы, позволяющие реализовать нечёткие алгоритмы на уровне простейших управляющих микросхем.

2. Сети Байеса

Аппарат матричной логики, развитый в предыдущем разделе предполагает, что переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, над которыми выполняются операции, независимы друг от друга. Однако, при решении практических задач приходится иметь дело с *зависимыми* переменными, точнее, с зависящими друг от друга событиями (см. рассмотренный ниже пример). Будем считать одну из переменных, скажем, $\mathbf{x}$ независимой, а вторую переменную, $\mathbf{y}$, – зависимой от $\mathbf{x}$: $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. Компоненты вектора $\mathbf{x}$ определяют вероятность наступления некоторого события A :

$x_0 = p(\bar{A})$, $x_1 = p(A)$. Функция $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ интерпретируется как *условная вероятность* наступления события B . В дальнейшем вместо функции $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ введем векторы условных вероятностей $\mathbf{y}^{(0)}$ и $\mathbf{y}^{(1)}$.

Компоненты вектор $\mathbf{y}^{(1)}$ считаем равными вероятностям наступления событий $\bar{B}$, B при условии, что наступило событие A , $y_0^{(1)} = p(\bar{B} | A)$, $y_1^{(1)} = p(B | A)$, а компоненты вектора $\mathbf{y}^{(0)}$ – равными вероятностям наступления событий B , $\bar{B}$ при условии, что наступило событие $\bar{A}$: $y_1^{(0)} = p(B | \bar{A})$, $y_0^{(0)} = p(\bar{B} | \bar{A})$. При этом для компонент каждого из векторов $\mathbf{y}^{(0)} = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)})$ и $\mathbf{y}^{(1)} = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)})$ как обычно выполняются условия (2):

$$0 \leq y_0^{(k)}, y_1^{(k)} \leq 1, \quad y_0^{(k)} + y_1^{(k)} = 1, \quad k = 0, 1.$$

Для *независимых* событий A и B вероятность наступления события B не меняется от того, какое из событий наступило – A или $\bar{A}$ – и в этом случае векторы $\mathbf{y}^{(1)}$ и $\mathbf{y}^{(0)}$ совпадают между собой: $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y}^{(1)}$.

Когда мы считали, что переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *независимы*, компоненты прямого произведения $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ были равны $x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1$. Для *зависимых* переменных компоненты прямого произведения $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}(\mathbf{x})$ с учетом введенных выше обозначений следует считать равными соответственно $x_0 y_0^{(0)}, x_0 y_1^{(0)}, x_1 y_0^{(1)}, x_1 y_1^{(1)}$. В дальнейшем удобно из компонент векторов $\mathbf{y}^{(0)}$ и $\mathbf{y}^{(1)}$ образовать матричный 2×2 массив Y :

$$Y = (Y_{i,k}) = (y_i^{(k)}) = \begin{pmatrix} y_0^{(0)} & y_0^{(1)} \\ y_1^{(0)} & y_1^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для прямого произведения $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}(\mathbf{x})$ также введем матричный 2×2 массив Z :

$$Z = (Z_{i,k}) = [(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}(\mathbf{x}))_{i,k}] = [y_i^{(k)} \cdot x_k] = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \cdot x_0 & y_0^{(1)} \cdot x_1 \\ y_1^{(0)} \cdot x_0 & y_1^{(1)} \cdot x_1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Отметим, что для *независимых* переменных матрица Z *факторизуется*, то есть представляется в виде произведения матриц следующего вида:

$$Z = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 x_0 & y_0 x_1 \\ y_1 x_0 & y_1 x_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для логических операций, применительно к зависимым переменным используются формулы

$$z_i^{(P)} = \sum_{j,k} T_{i,j,k}^{(P)} x_j y_k(x_j) = \sum_{j,k} T_{i,j,k}^{(P)} Z_{k,j} \quad (14)$$

с теми же тензорами $T_{i,j,k}^{(P)}$, что и для независимых переменных.

Не трудно установить отличие в реализации независимых и зависимых переменных в виде электрических схем. В первом случае на схеме, представленной рис. 2, в обеих ветвях цепи деление токов x_0J , x_1J делителями y производится в одинаковом отношении. Во втором случае (зависимые переменные) имеем схему, представленную на рис. 3, с двумя разными делителями тока $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$. Токи x_0J , x_1J делятся теперь в двух разных отношениях, определяемых компонентами векторов $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$. В этом и состоит главное различие рассматриваемых цепей.

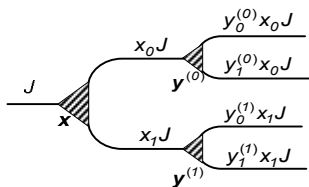


Рис. 3. Реализация прямого произведения зависимых векторов $x \otimes y(x)$ в виде электрической схемы с тремя делителями тока

В проведенном выше рассмотрении мы считали независимой переменной x , а переменная y была зависимой от x , т.е. $y(x)$. При практических решении задач часто бывает необходимо сделать замену независимой переменной и считать y независимой, а x – зависимой от y , т.е. $x(y)$. Между функциями $y(x)$ и $x(y)$ существует связь, к выводу которой мы сейчас и перейдем.

Будем исходить из закона умножения вероятностей зависимых событий A и B , согласно которому вероятность произведения двух событий $p(A,B)$ равна произведению вероятности $p(A)$ наступления события A на условную вероятность $p(B|A)$ наступления события B при условии, что событие A имело место:

$$p(A,B) = p(A)p(B|A). \quad (15)$$

Эквивалентное представление закона умножения вероятностей имеет вид

$$p(A,B) = p(B)p(A|B). \quad (16)$$

Приравнивая друг другу правые части этих равенств, мы можем выразить условную вероятность $p(A|B)$ через вероятность $p(B|A)$

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(B)}. \quad (17)$$

Эту формулу называют правилом Байеса (теорема гипотез).

В наших обозначениях условные вероятности $p(B|A)$ (точнее, четыре вероятности $p(\bar{B}|\bar{A})$, $p(\bar{B}|A)$, $p(B|\bar{A})$ и $p(B|A)$) представлены 2×2 матрицей Y . Формула умножения вероятностей в виде (13) – матрицей $Z = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}(\mathbf{x})$ или токами на выходе электрической схемы, показанной на рис. 3.

Для перехода к новой независимой переменной следует найти вектор $\mathbf{y}$ и функцию $\mathbf{x}(\mathbf{y})$. Компоненты вектора $\mathbf{y}$ по смыслу совпадают с вероятностями $p(\bar{B}) = y_0$, $p(B) = y_1$, которые могут быть найдены по формулам

$$p(\bar{B}) = p(\bar{B}|A)p(A) + p(\bar{B}|\bar{A})p(\bar{A}); \quad p(B) = p(B|A)p(A) + p(B|\bar{A})p(\bar{A}). \quad (18)$$

Согласно приведенным выше формулам входящие в эти выражения условные вероятности $p(B|A), \dots$ выражаются через компоненты векторов $\mathbf{y}^{(0)}$ и $\mathbf{y}^{(1)}$, а вероятности $p(A)$, $p(\bar{A})$ – через компоненты вектора $\mathbf{x}$. Это дает возможность переписать выражения (18) в виде

$$\mathbf{y} = x_0 \mathbf{y}^{(0)} + x_1 \mathbf{y}^{(1)} = \sum_{i=0}^1 x_i \mathbf{y}^{(i)}, \quad (19)$$

Это значит, что вектор $\mathbf{y}$ равен средне взвешенному вектору от векторов $\mathbf{y}^{(0)}$ и $\mathbf{y}^{(1)}$ с вероятностями (весовыми коэффициентами) x_0 , x_1 . Используя введенный выше массив Y , мы можем переписать выражение (19) также в матричном виде

$$\mathbf{y} = Y \cdot \mathbf{x}, \quad (20)$$

где точка обозначает матричное умножение, или в более подробной записи

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{(0)} & y_0^{(1)} \\ y_1^{(0)} & y_1^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^{(0)}x_0 + y_0^{(1)}x_1 \\ y_1^{(0)}x_0 + y_1^{(1)}x_1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Наряду с функцией $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ введем векторы $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$, компоненты которых выражаются через условные вероятности следующим образом

$$x_0^{(1)} = p(\bar{A}|B), \quad x_1^{(1)} = p(A|B), \quad x_0^{(0)} = p(\bar{A}|\bar{B}), \quad x_1^{(0)} = p(A|\bar{B}). \quad (22)$$

В дальнейшем мы также будем использовать матричный массив X , составленный из компонент векторов $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$

$$X = (X_{i,k}) = (x_i^{(k)}) = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & x_0^{(1)} \\ x_1^{(0)} & x_1^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Согласно приведенной выше формуле (17) (правило Байеса) для матрицы (23) получаем выражение

$$X_{i,k} = x_i Y_{k,i} / y_k, \quad (24)$$

где были использованы обозначения (14), (16), или, с учетом связей (20), (23)

$$x_i^{(k)} = x_i y_k^{(i)} / y_k. \quad (25)$$

Мы можем также выразить полученный результат с помощью введенного выше матричного массива Z

$$X_{i,k} = Z_{k,i} / y_k. \quad (26)$$

Таким образом, используя формулу Байеса (17), мы совершили переход к новой независимой переменной, выразив неизвестные величины y, X через известные x и Y .

Для неопределенности системы *независимых* переменных x, y имеет место закон аддитивности энтропии:

$$S(x, y) = S(x) + S(y), \quad (27)$$

Пусть теперь переменные x, y *зависимы*. Вероятности состояний сложной системы определяются произведениями $x_0 y_0^{(0)}, x_0 y_1^{(0)}, x_1 y_0^{(1)}, x_1 y_1^{(1)}$, а энтропия равна

$$S(x, y) = - \sum_{i,k} x_i y_k^{(i)} \log_2 x_i y_k^{(i)} = - \sum_i x_i \log_2 x_i \sum_k y_k^{(i)} - \sum_i x_i \sum_k y_k^{(i)} \log_2 y_k^{(i)}.$$

В правой части полученного выражения учтем, что согласно условиям (7) $\sum_k y_k^{(i)} = 1$. Введем «парциальную» условную энтропию

$$S(y^{(i)}) = - \sum_k y_k^{(i)} \log_2 y_k^{(i)},$$

а также полную (или среднюю) условную энтропию

$$S(y | x) = - \sum_i x_i \sum_k y_k^{(i)} \log_2 y_k^{(i)} = \sum_i x_i S(y^{(i)}).$$

В результате, с учетом (25), энтропия сложной системы может быть представлена в виде $S(x, y) = S(x) + S(y | x)$.

В качестве примера рассмотрим задачу оценки вероятности заболевания гриппом (пример адаптирован из книги [5]). Пусть априорная вероятность заболевания гриппом во время эпидемии равна $0,001$. Вероятность высокой температуры при заболевании гриппом равна $1,0$. Если же человек не болен гриппом, то появление у него высокой темпера-

туры имеет вероятность $0,01$. Больной пришел к врачу с высокой температурой. Какова вероятность того, что он болен гриппом?

Решение. Введем вектор $\mathbf{x}$ с компонентами $x_0 = 0,999$, $x_1 = 0,001$, описывающий априорную вероятность заболевания гриппом. По условию задачи векторы условной вероятности $\mathbf{y}^{(0)}$ и $\mathbf{y}^{(1)}$ имеют компоненты $(0,99 \ 0,01)$ и $(0,0 \ 1,0)$ соответственно. Образует массивы исходных данных

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.001 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0.01 & 1 \end{pmatrix}$$

После простых вычислений получим

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0.989 \\ 0.011 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0.909 \\ 0 & 0.091 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что вероятность заболевания гриппом при наличии свидетельства «высокая температура» равна $X_{1,1} = 0,091$. Отметим, что неопределенность этой задачи мала и равна 0.092 бит.

4. Заключение

Полученные результаты, кратко описанные в этом сообщении, показывают, что «четкая» логика, нечеткая логика и сети Байеса могут быть рассмотрены на основе матричного представления. Представленный аппарат допускает не только простую алгоритмизацию необходимых вычислений, но и оценку неопределенностей величин, которая может быть найдена на каждом шаге производимых расчетов.

Литература

1. Mizraji E. Modalities in Vector Logic. // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1994. Vol. 35, N.2, P. 272-282
2. Марценюк М. А. Матричное представление нечеткой логики// Нечеткие системы и мягкие вычисления. Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2007. Т. 2, № 3. С. 7–35.
3. Марценюк М.А. Матричное представление нечетких логических сетей//Вестник Пермского университета. Вып. Информационные системы и технологии. 2009. № 9(35). С. 46-63.
4. Марценюк М.А. Операторно-логические схемы как средство изучения алгоритмов в учебных курсах по математике и информатике // Прикладная информатика № 5(29)2010. С. 43-54.
5. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.