



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРОПЛИТЫ

V.D. Kuzmichev

## MATHEMATICAL MODEL OF PLATE COMPACTORS

**Аннотация.** Виброплиты самоходные относятся к средствам малой механизации и предназначены для послойного уплотнения методом вибротрамбования песчаногравийных, асфальтобетонных и других смесей, используемых в технологии строительства тротуарного полотна, засыпки траншей, проведении ландшафтных работ, укладки тротуарной плитки и брусчатки с применением демпфирующего коврика и т. п. По способу передвижения виброплиты подразделяются на реверсивные и нереверсивные. В качестве основного двигателя используются 4-тактные бензиновые двигатели на моделях массой до 160 кг, дизельные и электрические на более тяжелых моделях.

**Ключевые слова:** нереверсивная виброплита, анализ параметров, математическая модель.

**Abstract.** Self-propelled plate compactors belong to the low mechanization machines and are designed for layer-by-layer compacting ground, asphalt, and other mixes used in pavement construction technology fabric, backfilling trenches, carrying out landscaping and laying paving slabs and paving stones with the use of damping mat and etc. By way of movement plate compactors are divided into reversible and irreversible. The main engine uses four-stroke gasoline engines for models weighing up to 160 kg, diesel and electric on the heavier models.

**Keywords:** non-reversible plate compactor, analysis of parameters, mathematical model.

Виброплиты самоходные относятся к средствам малой механизации и предназначены для послойного уплотнения методом вибротрамбования песчаногравийных, асфальтобетонных и других смесей, используемых в технологии строительства тротуарного полотна, засыпки траншей, проведении ландшафтных работ, укладки тротуарной плитки и брусчатки с применением демпфирующего коврика и п. п.

По способу передвижения виброплиты подразделяются на реверсивные и нереверсивные. В качестве основного двигателя используются 4-х тактные бензиновые двигатели на моделях массой

до 160 кг, дизельные и электрические на более тяжелых моделях.

Малые габариты и хорошая маневренность этих машин обеспечивает возможность проведения уплотнительных работ в стесненных условия стройплощадки.

В качестве вибровозбудителей используются инерционные (дебалансные) вибровозбудители одновалные и двухвалные с синхронным вращением валов. Привод вибровозбудителей осуществляется от двигателя посредством клиноременной передачи. Виброплиты с двигателями внутреннего сгорания снабжены центробежной муфтой, обеспечивающей запуск двигателя на холостом ходу без нагрузки.

Существенным недостатком существующих самоходных плит является повышенные вибрации на рукоятке управления. Для анализа необходимых мероприятий по снижению вибраций на оператора, а так же проектированию рациональных геометрических параметров конструкций, обеспечивающих потребную самоходность и качество уплотнения, необходимы теоретические исследования динамической модели виброплиты.

На рис. 1 представлены типовые конструкции самоходных виброплит.

Динамическая модель нереверсивной виброплиты, представленная на рис. 2, имеет пять степеней свободы. Анализ модели позволяет получить приближенные значения скоростей, ускорений, перемещения виброплиты, а также оценить качество виброизоляции двигателя и управляющей рукоятки. Для решения модели необходимо составить уравнения Лагранжа второго рода по пяти обобщенным координатам [1, 2, 3].

Кинетическая энергия подрессоренной массы:

$$T_D = \frac{1}{2} m_D V_{cd}^2 + \frac{1}{2} J_D (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2,$$

$$x_C = x + x_{C1} \cos \varphi - y_{C1} \sin \varphi,$$

$$y_C = x_{C1} \sin \varphi + y_{C1} \cos \varphi,$$



Рис. 1. Виброплиты  
а) нереверсивные; б) реверсивная

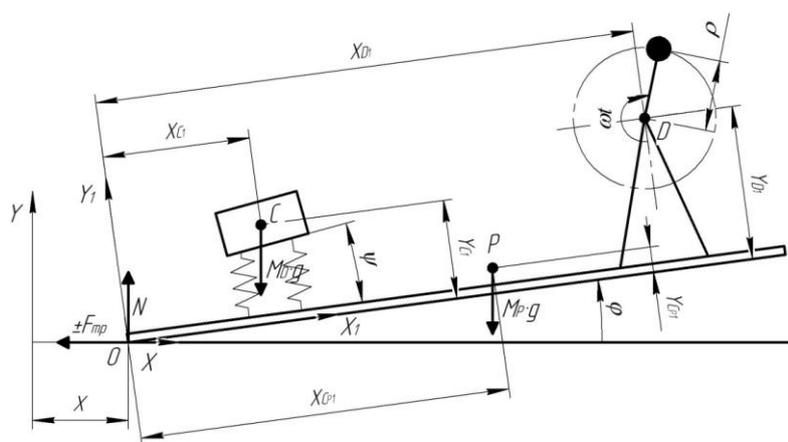


Рис. 2. Динамическая модель виброплиты

$x$  – координата точки  $O$ ;  $C$  – центр масс двигателя (подрессоренной массы);  $x_{C_1}; y_{C_1}$  – координаты точки  $C$  в подвижной системе координат;  $x_{C_0}; y_{C_0}$  – координаты точки  $C$  в абсолютной системе координат;  $x_{D_1}; y_{D_1}$  – координаты оси вращения дебаланса в подвижной системе координат;  $x_{e_1}; y_{e_1}$  – координаты центра тяжести дебаланса в подвижной системе координат;  $\rho$  – эксцентриситет дебаланса;

$\phi$  – угол поворота платформы;  $\psi$  – угол поворота подрессоренной массы относительно плиты

$$V_{C_d}^2 = \dot{x}^2 + (\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2) + \dot{\phi}^2(x_{C_1}^2 + y_{C_1}^2) - 2\dot{x}\dot{\phi} \times (x_{C_1} \sin(\phi) + y_{C_1} \cos(\phi)) + 2\dot{x}(\dot{x}_{C_1} \cos(\phi) - \dot{y}_{C_1} \sin(\phi)) + 2\dot{\phi}(x_{C_1} \dot{y}_{C_1} - \dot{x}_{C_1} y_{C_1}).$$

Кинетическая энергия дебаланса:

$$T_e = \frac{1}{2} m_e V_e^2 + \frac{1}{2} J_e (\dot{\phi} + \omega)^2,$$

$$x_{e_1} = x_{D_1} + \rho \cos \omega t,$$

$$y_{e_1} = y_{D_1} + \rho \sin \omega t,$$

$$x_e = x + x_{e_1} \cos \phi - y_{e_1} \sin \phi = x + x_{D_1} \cos \phi +$$

$$+ \rho \cos \phi \cos \omega t - y_{D_1} \cos \phi - \rho \sin \phi \sin \omega t$$

$$y_e = x_{e_1} \sin \phi + y_{e_1} \cos \phi = x_{D_1} \sin \phi +$$

$$+ \rho \sin \phi \cos \omega t + y_{D_1} \cos \phi + \rho \cos \phi \sin \omega t,$$

$$x_e = x + x_{D_1} \cos \phi - y_{D_1} \cos \phi + \rho \cos(\omega t + \phi),$$

$$y_e = x_{D_1} \sin \phi + y_{D_1} \cos \phi + \rho \sin(\omega t + \phi),$$

$$V_e^2 = \dot{x}^2 + \dot{\phi}^2(x_{D_1}^2 + y_{D_1}^2) + \rho^2(\dot{\phi} + \omega)^2 - 2\dot{x}\dot{\phi}(x_{D_1} \times \sin(\phi) + y_{D_1} \cos(\phi)) - 2\rho\dot{x}(\dot{\phi} + \omega)\sin(\omega t + \phi) + 2\rho\dot{\phi}(\dot{\phi} + \omega) \times (x_{D_1} \cos(\omega t) + y_{D_1} \sin(\omega t)).$$

Кинетическая энергия основания виброплиты:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p V_{C_p}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\phi}^2,$$

$$x_{C_p} = x + x_{C_n} \cos \phi - y_{C_n} \sin \phi,$$

$$y_{C_p} = x_{C_n} \sin \phi + y_{C_n} \cos \phi,$$

$$V_{C_p}^2 = \dot{x}^2 + \dot{\phi}^2(x_{C_n}^2 + y_{C_n}^2) - 2\dot{x}\dot{\phi}(x_{C_n} \sin(\phi) + y_{C_n} \cos(\phi)).$$



Потенциальная энергия системы является суммой потенциальных энергий трех тел и энергии, запасенной в пружинах. Для нахождения энергии в пружинах составим матрицу жесткостей и умножим её на квадрат матрицы относительных перемещений для подрессоренной массы [2].

$$c_g = \begin{pmatrix} 2 \cdot c_1 & \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{(x_{c_b} - x_{c_a}) \cdot y_c} & -\frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{2 \cdot y_c} \\ \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{(x_{c_b} - x_{c_a}) \cdot y_c} & \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{x_{c_a}^2 + x_{c_b}^2} & \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{x_{c_a} - x_{c_b}} \\ -\frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{2 \cdot y_c} & \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{x_{c_a} - x_{c_b}} & \frac{(x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot c_1}{x_{c_a} - x_{c_b}} \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} x_{c_1} - x_{c_{10}} \\ y_{c_1} - y_c - y_{c_{10}} \\ \Psi - \Psi_0 \end{pmatrix},$$

где  $x_{c_a}; x_{c_b}; y_c$  – линейные размеры, описывающие крепление пружин;  $x_{c_{10}}; y_{c_{10}}; \Psi_0$  – константы, описывающие нулевое положение подрессоренной массы.

$$\Pi_{np} = \frac{1}{2} \cdot \delta^2 \times c_g,$$

$$\Pi_p = m_p \cdot g \cdot (x_{c_{a1}} \cdot \sin(\varphi) + y_{c_{a1}} \cdot \cos(\varphi)),$$

$$\Pi_e = m_e \cdot g \cdot (x_{D1} \cdot \sin(\varphi) + y_{D1} \cdot \cos(\varphi) + \rho \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)),$$

$$\Pi_D = m_D \cdot g \cdot (x_{c_1} \cdot \sin(\varphi) + y_{c_1} \cdot \cos(\varphi)),$$

$$\Pi = \Pi_{np} + \Pi_p + \Pi_e + \Pi_D,$$

$$T = T_e + T_p + T_D.$$

Зная потенциальную и кинетическую энергии, составим уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \\ & = -m_p \cdot [x_{c_{a1}} \cdot (\ddot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t) + \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \cos(\varphi(t))) + \\ & + y_{c_{a1}} \cdot (\ddot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \sin(\varphi(t))) - \\ & - \ddot{x}(t)] - m_e \cdot [x_{D1} \cdot (\ddot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \\ & + \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \cos(\varphi(t))) + y_{D1} \cdot (\ddot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t) - \\ & - \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \sin(\varphi(t))) - \ddot{x}(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \rho \cdot (\ddot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t) + \omega \cdot t) + (\omega + \dot{\varphi}(t)) \cdot (\omega \cdot \cos(\varphi(t) + \omega \cdot t) + \\ & + \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t) + \omega \cdot t))) - m_D \cdot [\ddot{y}_{c_1}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) - \\ & - \ddot{x}_{c_1}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + 2 \cdot \dot{x}_{c_1}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \\ & + 2 \cdot \dot{y}_{c_1}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + x_{c_1}(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \cos(\varphi(t)) - \\ & - y_{c_1}(t) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \sin(\varphi(t)) + x_{c_1}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \\ & + y_{c_1}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - \ddot{x}(t)] = F_{mp} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_e \cdot g \cdot (\rho \cdot \cos(\varphi(t) + \omega \cdot t) +$$

$$+ x_{D1} \cdot \cos(\varphi(t)) - y_{D1} \cdot \sin(\varphi(t))) + m_D \cdot g \times$$

$$\times (x_{c_1}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - y_{c_1}(t) \cdot \sin(\varphi(t))) +$$

$$+ m_p \cdot g \cdot (x_{c_{a1}} \cdot \cos(\varphi(t)) - y_{c_{a1}} \cdot \sin(\varphi(t))) +$$

$$+ J_D \cdot (\ddot{\varphi}(t) + \ddot{\psi}(t)) + J_e \cdot \ddot{\varphi}(t) + J_p \cdot \ddot{\varphi}(t) +$$

$$+ m_p \cdot [x_{c_{a1}}^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) + y_{c_{a1}}^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) -$$

$$- x_{c_{a1}} \cdot (\ddot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t))) +$$

$$+ y_{c_{a1}} \cdot (-\ddot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)))] +$$

$$+ m_e \cdot [\rho^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) + x_{D1}^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) + y_{D1}^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) - \rho \cdot \dot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t) +$$

$$+ \omega \cdot t) - (\omega + \dot{\varphi}(t)) \cdot \dot{x}(t) \cdot \rho \cdot \cos(\varphi(t) + \omega \cdot t) -$$

$$- x_{D1} \cdot (\ddot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) +$$

$$+ \rho \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2 \cdot \rho \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) -$$

$$- 2 \cdot \rho \cdot \omega \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) - y_{D1} \cdot (\ddot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) -$$

$$- \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) - \rho \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) -$$

$$- 2 \cdot \rho \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2 \cdot \rho \cdot \omega \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)] +$$

$$+ m_D \cdot [x_{c_1}(t)^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) + y_{c_1}(t)^2 \cdot \ddot{\varphi}(t) -$$

$$- \dot{x}(t) \cdot (\dot{x}_{c_1}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \dot{y}_{c_1}(t) \cdot \cos(\varphi(t))) +$$

$$+ x_{c_1}(t) \cdot (\ddot{y}_{c_1}(t) + 2 \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{x}_{c_1}(t) - \ddot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) -$$

$$- \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t))) + y_{c_1}(t) \cdot (-\ddot{x}_{c_1}(t) + 2 \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{y}_{c_1}(t) -$$

$$- \ddot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)))] -$$

$$- m_e \cdot [\dot{\varphi}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot y_{D1} \cdot \sin(\varphi(t)) - \rho \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t) +$$

$$+ \omega \cdot t) - \dot{\varphi}(t) \cdot x_{D1} \cdot \dot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) -$$

$$- \rho \cdot \omega \cdot \dot{x} \cdot \cos(\varphi(t) + \omega \cdot t)] - m_D \cdot [\dot{\varphi}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot y_{c_1}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) -$$

$$- \dot{x}(t) \cdot \dot{y}_{c_1}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) - \dot{\varphi}(t) \cdot x_{c_1}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) -$$

$$- \dot{x}(t) \cdot \dot{x}_{c_1}(t) \cdot \sin(\varphi(t))] - m_p \cdot (\dot{\varphi}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot y_{c_{a1}} \cdot \sin(\varphi(t)) -$$

$$- \dot{\varphi}(t) \cdot x_{c_{a1}} \cdot \dot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t))) = M_{yp}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = J_D \cdot (\ddot{\varphi}(t) + \ddot{\psi}(t)) -$$

$$- \frac{c_1 (x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot (y_c - y_{c_1}(t) + y_{c_{10}})}{x_{c_a} - x_{c_b}} +$$

$$+ \frac{c_1}{2 \cdot y_c} \cdot ((\psi(t) - \psi_0) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2 - (x_{c_1}(t) - x_{c_{10}}) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2) = 0,$$



$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{c_1}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_{c_1}} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_{c_1}} = m_D \cdot \left( \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{y}_{c_1}(t) - \ddot{x}(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + \right. \\ & \quad \left. + \ddot{\varphi}(t) \cdot y_{c_1}(t) + \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) - \ddot{x}_{c_1}(t) \right) + \\ & \quad + c_1 \cdot \left( 2 \cdot (x_{c_1}(t) - x_{c_{10}}) - \frac{1}{2 \cdot y_c} \cdot (\psi(t) - \psi_0(t)) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(y_c - y_{c_1}(t) + y_{c_{10}}) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2}{y_c \cdot (x_{c_a} - x_{c_b})} \right) - \\ & \quad - m_D \cdot (\dot{y}_{c_1}(t) - \dot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) + \dot{\varphi}(t) \cdot x_{c_1}(t)) = 0 \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{c_1}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_{c_1}} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_{c_1}} = m_D \cdot (\ddot{y}_{c_1}(t) + \dot{x}_{c_1}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \\ & \quad + x_{c_1}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) - \ddot{x}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) - \dot{x}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(\varphi(t))) + \\ & \quad + m_D \cdot g \cdot \cos(\varphi(t)) - \frac{c_1 \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2 \cdot (y_c - y_{c_1}(t) + y_{c_{10}})}{x_{c_a}^2 + x_{c_b}^2} + \\ & \quad + \frac{c_1 \cdot (\psi(t) - \psi_0) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2}{x_{c_a} + x_{c_b}} - \frac{c_1 \cdot (x_{c_1}(t) - x_{c_{10}}) \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})^2}{y_c \cdot (x_{c_a} + x_{c_b})} + \\ & \quad + m_D \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot (\dot{x}_{c_1}(t) + \dot{x}(t) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}(t) \cdot y_{c_1}(t)) = 0 \end{aligned}$$

Для численного решения системы необходимо определить обобщённые силы:  $F_{mp}$  – сила трения;  $M_{y_{np}}$  – момент, описывающий взаимодействие грунта с основанием виброплиты.

Приняв грунт за упруго-диссипативную среду, можно описать  $M_{y_{np}}$  следующим образом:

$$\begin{cases} M_{y_{np}} = -C \cdot \varphi & \text{при } \dot{\varphi} > 0 \text{ и } \varphi < 0, \\ M_{y_{np}} = -C \cdot \varphi - \beta \cdot \dot{\varphi} & \text{при } \dot{\varphi} < 0 \text{ и } \varphi < 0, \\ M_{y_{np}} = 0 & \text{при } \varphi \geq 0, \end{cases}$$

где  $C$  – коэффициент упругости;  $\beta$  – коэффициент вязкого сопротивления.

Силу трения можно описать системой

$$\begin{cases} F_{mp}^* = -N \cdot f \cdot \text{sign}(\dot{x}) & \text{при } \dot{x} \neq 0, \\ F_{mp} = -\Phi_X & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } F_{mp}^* > \Phi_X, \end{cases}$$

где  $f$  – коэффициент трения;  $\Phi_X$  – суммарная сила инерции модели в горизонтальном направлении;  $N = M \cdot g - \Phi_Y$  – сила реакции опоры.

Сила инерции системы будут складываться из сил инерций трех масс.

$$\Phi_X = m_p \cdot \ddot{x}_{c_p} + m_e \cdot \ddot{x}_e + m_D \cdot \ddot{x}_C$$

$$\Phi_Y = m_p \cdot \ddot{y}_{c_p} + m_e \cdot \ddot{y}_e + m_D \cdot \ddot{y}_C$$

Силы инерции и силу реакции опоры при решении данной системы численными методами, необходимо находить в первом приближении без учета силы трения. Затем методом итераций можно добиться уточнения решения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики : в 2-х т. 6-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 640 с.
2. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. 4-е изд., перераб. и доп. Л. : Политехника. 1990. 272 с.
3. Хархута Н. Я. Машины для уплотнения грунтов. Л. : Машиностроение, 1973.