ЛОГИКА

В.А. Бочаров*

ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА

В статье обсуждается мнение о том, что логика в своих исследованиях использует математические методы познания.

Ключевые слова: логика, математика, понятие функции, теория множеств, алгебра, алгоритм.

V.A. B o c h a r o v. Logic and mathematics

The author considers the idea that logical investigations are based on mathematical cognition methods.

Key words: logic, mathematics, concept of function, theory of sets, algebra, algorithm.

Вопрос о связи логики и математики весьма существен и может быть соотнесен с двумя обстоятельствами. Во-первых, в свое время Г. Фреге и Б. Расселом была предпринята попытка обосновать положение о том, что математика является частью логики. Программа этого обоснования известна как логицизм. Это один аспект связи логики и математики. Во-вторых (и это другой аспект проблемы), достаточно часто о логике говорится, что *эта дисциплина является логикой по предмету и математикой по используемым методам*. Отсюда берет начало и название современной логики — *математическая логика*. Вот, например, слова А. Чёрча: «Автор предпочитает термин “математическая логика”, понимая под этим содержательную логику, изучаемую математическими методами, в частности формальным аксиоматическим (или логистическим) методом» [*А. Чёрч*, 1960, т. 1, с. 377]. Все это заставляет меня обратиться к вопросу о том, в какой степени, в каком объеме мы можем говорить, что в современной логике используются математические методы.

Если раскрыть какую-либо современную работу по логике, то нельзя будет не заметить, что в ней используется сложнейший технический аппарат. Разобраться в построениях автора и понять содержание данной работы доступно только хорошо подготовленному логику. А такую подготовку дает только изучение математики

* *Бочаров Вячеслав Александрович* — доктор философских наук, профессор кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел.: 8-499-163-97-08; *e-mail*: vyach_boch@mail.ru

и ничто иное. Вот почему в современной логике работали и сейчас работают многие крупнейшие математики современности, ученые с мировыми именами. Тем не менее каким бы изощренным ни был аппарат работы ученого, он всегда использует те или иные методы. Вот об этих методах у нас далее и пойдет разговор.

Начну свой анализ с заявления А. Чёрча, что современная логика использует для своего развития математические методы. Данное положение является, с одной стороны, верным, а с другой — в некотором аспекте весьма сомнительным.

Действительно, разве метод построения формальных аксиоматических систем, который, несомненно, применяется в логике, является математическим методом, как об этом говорит Чёрч? На самом деле первая аксиоматическая система, как известно, была построена философом Парменидом, но никак не математиком. Единственной аксиомой было утверждение: «Бытие есть, а небытия нет».

Вторая по времени аксиоматическая система была построена Аристотелем — философом и логиком, а не математиком. Это его знаменитая силлогистика. Причем эта теория строилась именно как формализованная теория, в которой впервые очень широко использовались переменные.

Но почему я говорю, что это была формализованная теория? Дело заключается в том, что выражения «Всякий S есть P», «Всякий S не есть P», «Некоторый S есть P» и «Некоторый S не есть P» должны трактоваться в этой теории как чисто синтаксические выражения, т.е. как формулы. Именно так их и толкует, например, И. Кант, который хотя и не употреблял термин «формула», однако прямо утверждал, что они представляют собой голые бессодержательные формы, в силу чего он даже назвал силлогистику формальной логикой. Почему же в этой связи надо считать аксиоматический метод и метод формализации математическими? Где здесь основания для такого мнения? Их просто нет!

Правда, и это тоже следует отметить, в период Средневековья схоласты перестали пользоваться методами формализации и аксиоматизации. Данные методы вновь вошли в логику под влиянием сохранения аксиоматического метода в математике. Но это указывает лишь на превратности исторического развития логики и не более того.

Далее, А. Чёрч говорит об использовании логистического метода как метода математического. Однако и это неверно. Ведь аристотелевская силлогистика строилась именно логистическим методом, т.е. без привлечения семантических соображений. По крайней мере, они в его «Аналитиках» явно не прописаны, и потребовалось специальное исследование текстов Стагирита, чтобы вычленить предполагаемую им семантику [см.: *В.А. Бочаров*, 1984]. Конечно, при построении того или иного дедуктивного аппарата ученый всегда пользуется некоторыми содержательными соображениями. Однако не это определяет, имеем ли мы дело с чисто синтаксическим (логистическим) построением или нет. Все дело состоит в том, как мы работаем в этой системе. Используем ли мы при работе какие-то семантические соображения или нет. Если наш способ работы состоит в том, что мы просто осуществляем преобразование одной совокупности знаков в другую по определенным правилам, то это означает, что мы имеем дело именно с логистической теорией. Но именно таковой и была силлогистика Аристотеля. Таким образом, логистический метод анализа является тоже логическим.

Но пойдем далее. В современной логике широко используется понятие «функции». Нет сомнения в том, что сам термин «функция» впервые был применен именно в математике И. Бернулли и Л. Эйлером, а его использование в логических исследованиях — явление, несомненно, вторичное и заимствованное из математики. Этот термин в логику ввел в своих работах Г. Фреге. Но здесь надо сделать две существенные оговорки.

Во-первых, уже в Средневековье схоластами были введены операторы *a*, *e*, *i* и *o*. Фактически это означало, что выражения «Всякий — есть —», «Всякий — не есть —», «Некоторый — есть —» и «Некоторый — не есть —» трактовались ими как функции. Различие же между Фреге и схоластами состояло лишь в том, что у Фреге аргументами его функций были сингулярные термины, а у схоластов такими аргументами выступали общие термины. Единственное, что не использовалось схоластами, так это сам термин «функция».

Во-вторых, после работ Г. Фреге стало совершенно очевидно, что понятие «функция» не является только математическим понятием. Фреге четко и ясно показал, что понятие функции — *общегносеологическое* понятие, так как существуют не только математические функции, но и функции нематематической природы. Логика в своих построениях использует и те и другие функции. Например, пропозициональные связки не являются математическими функциями, предикаты различной местности тоже не являются математическими функциями. И это касается не только пропозициональных, но и предметных функций, которые тоже могут быть совершенно нематематической природы. Таковой функцией является, например, функция «отец *x*-а», т.е. «отец кого-то». С этой точки зрения, использование в настоящее время понятия функции в современной логике вовсе не означает, что мы пользуемся внутри логики чисто математическим методом. Он уже давно был не только математическим, что стало совершенно очевидным после работ Г. Фреге.

В настоящее время в логике широко применяются теоретико-множественные методы. В частности, используется само понятие множества. Этот факт тоже зачастую трактуется как употребление в логике методов математики. Но так ли это?

Здесь дело зависит полностью от того, является ли само понятие множества чисто математическим или нет. Я утверждаю, что понятие множества, как и понятие функции, является тоже общегносеологическим понятием. Во множество могут собираться и реально собираются не только математические объекты, но и объекты нематематической природы. С исторической точки зрения, в теоретической науке, возникшей в Древней Греции, в совокупности собирались не только математические объекты (геометрические фигуры, числа и т.д.), но и объекты нематематические (например, атомы Демокрита). И если термин «функция» действительно был заимствован логикой из математики, то, рассматривая становление понятия множества, следует указать, что уже аристотелевская силлогистика, хотя это и не было сделано в явной форме, предполагала, что с терминами, скажем, «человек», «живые существа» и т.д. связываются соответствующие классы объектов.

Вообще, понятие множества в логике давно и широко использовалось, но под другим названием, а именно как объем понятия. С этой точки зрения весьма странной выглядит позиция, которую занял В. Куайн, когда на вопрос о том, относится ли теория множеств к логике, он ответил отрицательно. Хотя это может быть и не столь уж удивительно. Ведь для Куайна и многих других математиков логика начинается и заканчивается построением различного рода дедуктивных логических исчислений. В современных учебниках по математической логике вы нигде не встретите обсуждение такой важной логической категории, каковой является понятие. Только Г. Фреге высказал ряд интересных замечаний об этой важной логической категории.

Рассуждения Куайна можно прокомментировать, видимо, следующим образом. Он считает, что теория множеств не является логической теорией в силу того, что знак «$\in$», по его мнению, не является логическим знаком, а потому выражение «$x \in y$» следует понимать наподобие выражения «$x \leq y$». Тем самым знаки «$\in$» и «$\leq$» трактуются как обычные двухместные предикаты и указанные выражения должны пониматься как выражения вида «$x\mathrm{R}y$» и «$x\mathrm{Q}y$». Если это так, то тогда действительно теория множеств не является логической теорией.

Однако при таком подходе, чтобы «$x\mathrm{R}y$» мы могли трактовать как выражение «$x \in y$», нам надо будет каким-то образом отличать это выражение от других дескриптивных двухместных отношений, т.е. потребуется задать свойства отношения «R», что усложняет теорию и является весьма неудобным способом выражения наших мыслей.

Рассмотрим в связи с этим выражение «Сократ есть человек». Спрашивается, слово «есть» здесь — это логический термин или нет? Общепринятая точка зрения состоит в том, что, выявляя логическую форму выражения, мы должны заменить дескриптивные термины соответствующими параметрами, а логические термины оставить в первоначальном виде. Применяя данную процедуру, из указанного предложения получают обычно следующую логическую форму: «a есть P». Это и означает, что термин «есть» («является») представляет собой логический термин. Без такого членения вообще нельзя было бы построить теорию силлогистических умозаключений.

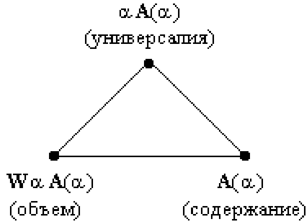
Но теперь возникает вопрос: а чем отличается выражение «a есть P» от выражения «a $\in$ P»? И почему мы, выявляя логическую форму предложения «Сократ элемент класса Людей» и заменяя дескриптивные термины параметрами, получаем выражение «a $\in$ P»? Почему знак «$\in$» остается незамещенным? Не потому ли, что знак «$\in$» — это логический термин?

Обычно в стандартных теориях, где задан изначально некий универсум рассуждения, принимается следующий важный принцип: $R(x_1, x_2,..., x_n) \Leftrightarrow \langle x_1, x_2,..., x_n\rangle \in R$, т.е. сказать, что n-ка предметов $x_1, x_2,..., x_n$ находится в отношении R, это то же самое, что сказать, что упорядоченная n-ка $\langle x_1, x_2,..., x_n\rangle$ является элементом класса R.

Конечно, между «a есть P» и «a $\in$ P» имеется целый ряд важных отличий. В первом предмету «a» приписывается свойство P, а во втором «a» рассматривается как член класса P. И это является весьма существенным. Дело в том, что класс полностью определяется входящими в него элементами. Но один и тот же класс может быть задан разными свойствами. А потому, чтобы перейти от рассмотрения свойств к рассмотрению классов, требуется вводить некоторые принципы отождествления свойств.

Более того, как известно, не всегда и не по всем свойствам можно образовать соответствующий класс предметов, т.е. свойство существует, а соответствующего класса нет. Это хорошо было продемонстрировано Расселом, когда он построил теоретико-множественный парадокс на основе свойства «быть нормальным множеством». И тем не менее у нас нет никаких оснований не считать знак «$\in$» логическим знаком, а теорию множеств логической теорией.

Как известно, с понятиями всегда связываются две важнейшие характеристики — содержание и объем. С этой точки зрения, мы можем рассматривать понятия либо с содержательной стороны, либо с объемной. Для понятий строится следующий семантический треугольник:



Если мы рассматриваем понятие с содержательной стороны, то утверждение о том, что объект «а» обладает свойством **A,** запишется в форме «а есть **A**», а если с объемной, то в форме «а $\in$ WαA(α)». Запрет рассматривать термин «множество» как логический термин фактически означал бы запрет на использование объемов как характеристик понятий, что является нелепым.

К логическим терминам следует отнести и такие термины, как «включение класса в класс», «пересечение», «объединение» и все другие отношения между объемами понятий, задаваемые в булевой алгебре, — теории, которая не является математической, тем более что все эти отношения уже давно, задолго до создания самой теории множеств, использовались в логике для задания смыслов категорических высказываний силлогистики. Иначе говоря, все булевы операции над множествами являются логическими процедурами. Вообще теория множеств в настоящее время является общегносеологической теорией.

В этом же ключе я рассматриваю и теорию алгоритмов. Несомненно, идея алгоритмической процедуры является исходно чисто математической процедурой. Хотя уже в работах Лейбница мы находим первые попытки построения алгоритмов для целей установления истинности положений силлогистики. Я имею в виду его идею арифметизации силлогистики. Но сейчас теория алгоритмов широко применяется и к нематематическим объектам. Например, теория алгоритмов А.А. Мальцева (младшего) разрешает работать не только в алфавите 0 и 1, но и в любом другом алфавите. То же самое позволяет делать и машина Тьюринга. Более того, для нематематических объектов даже строится особая теория алгоритмов. Характерной в этом отношении является работа Р. Петер [*R. Peter*, 1961], в которой этот момент использования алгоритмов четко прописан.

Без теории алгоритмов, т.е. без теории построения конструктивных объектов, нельзя в принципе представить себе современную логику. Огромное количество самых разнообразных понятий, которые необходимо вводить при построении логических теорий, а также для установления их метатеоретических свойств, задаются именно алгоритмически. Таковыми являются, например, понятия «терм» и «формула» в исчислении предикатов. Таковыми являются и процедуры построения таблиц истинности для проверки, является ли та или иная формула законом логики. И это только надводная часть того «айсберга» теории алгоритмов, которая применяется в логике.

Или другой пример. В настоящее время строятся различного рода процедуры для автоматического доказательства теорем в самых разнообразных логических теориях. Но для того, чтобы осуществлять автоматическое доказательство теорем логики, необходимо алгоритмизировать сам процесс этого доказательства.

Рассмотрим теперь алгебру. Опять-таки, нет никаких сомнений, что алгебра первоначально возникла как аппарат работы с числами. И ее использование в логике было заимствовано из математики. Самые первые попытки такого заимствования мы находим уже в работах Г. Лейбница, который попытался представить силлогистику в форме алгебры. Ему действительно удалось это сделать. Он построил алгебраически силлогистическую теорию, которая в настоящее время известна как фундаментальная силлогистика. Иначе говоря, само это заимствование привело к тому, что алгебра вышла за пределы математики, в силу чего в свое время была построена одна из первых нечисловых алгебр — алгебра Буля, которая позволила в алгебраическом ключе рассматривать классическую логику высказываний.

В настоящее время нечисловой алгебраический аппарат используется для построения так называемых алгебраических семантик для огромного числа логических теорий — интуиционистской логики, различных релевантных и модальных логик и многих других логических систем.

Укажу также на применение теории групп в кристаллографии, а также в физике элементарных частиц. Но ведь существует и много других нематематических использований алгебраических структур. Так почему же мы и сейчас, в наше время, должны считать, что, используя алгебру, мы используем математический аппарат? Ведь алгебра перестала быть достоянием только математики и перешла в число общегносеологических методов познания.

Объясню теперь, что я имею в виду, когда говорю о том, что понятия функции, множества, алгоритма и алгебры и многое другое, что я здесь не указал, являются *общегносеологическими*. Это означает, что они входят в круг общенаучных методов познания. Можно отметить, что именно логика исследует общенаучные познавательные процедуры, т.е. такие процедуры, которые используются в любых науках без исключения. Это же мы вынуждены сказать и об алгебре, и о теории множеств и т.д. Фактически эти дисциплины позволяют строить самые различные структуры как математической, так и нематематической природы. Поэтому нет такой дисциплины, в которой не использовались бы соответствующие теории.

Но здесь я должен сделать несколько принципиальных замечаний следующего характера.

Во-первых, это не всегда бывает отчетливо видно, а потому и не всегда осознается. Возьмем, например, логику. В современных учебниках по математической логике исследование начинается с анализа высказываний. Последовательно строится вначале пропозициональная логика, а затем логика предикатов. Теория понятийного мышления в ней даже не рассматривается. Но Е.К. Войшвилло показал, как можно вписать в современную символическую логику теорию понятий. Последняя строилась у него на базе исчисления предикатов.

Это одна сторона дела, но есть и другая сторона. Вспомним традиционные курсы логики, вспомним, как преподавалась логика на протяжении многих веков. Порядок изложения материала в этой логике был совершенно иным, чем тот, который принят в настоящее время. Вначале излагалась теория понятий, затем рассматривались суждения и их виды и только вслед за этим изучались умозаключения.

В таком порядке изложения неявно присутствует алгебраический и теоретико-множественный подход. Ведь что такое значения понятий? Это некоторые объекты. Так, с экстенсиональной точки зрения, объемы понятий — это классы предметов. Поэтому операции отрицания понятий, их объединения и пересечения, обобщения и ограничения, деления и классификации — это все работа с объектами, а не с высказываниями. Здесь явно присутствуют алгебраический и теоретико-множественный аспекты. Весьма наглядно данная позиция была выражена в работе Х. Карри [см.: *Х.Б. Карри*, 1969]. Последний повторяет (конечно, на современном уровне) способ изложения традиционной логики. Вначале излагается теория объектов, т.е. строится алгебра, и только затем осуществляется переход к изучению умозаключений.

Во-вторых, несомненно, что первоначально в явной и отчетливой форме и алгебра, и теория множеств, и теория алгоритмов возникли внутри математики и были чисто математическими методами познания. Однако развитие этих теорий продемонстрировало, что их содержание выходит за пределы математики, а потому теперь уже нет оснований рассматривать их как только математические методы.

В-третьих, мне могут возразить и сказать, что многие современные науки не пользуются данными методами, а потому нет никаких оснований причислять их к общегносеологическим методам познания. На это я отвечу так. Да, современное состояние многих наук таково, что в них не пользуются данными методами. Однако надо видеть перспективу дальнейшего развития всех наук. А она, несомненно, потребует в свое время использования и теории множеств, и алгоритмов, и алгебраических построений. Другого пути для развития этих наук просто нет. Учитывая же эту перспективу, нет оснований отказывать всем наукам в конечном их строгом построении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бочаров В.А. Аристотель и традиционная логика. М., 1984.

Карри Х.Б. Основания математической логики. М., 1969. Перевод книги: *Carry H. B.* Foundations of mathematical logic. N.Y.; San Francisco; Toronto; L., 1963.

Чёрч А. Введение в математическую логику. М., 1960. Т. 1. Перевод книги: *Church A.* Introduction to mathematical logic. Princeton University Press. 1956. Vol. 1.

Peter R. Uber die Verallgemeinerung der Recursionbegriffe für abstrakte Mengen als Definitions bereiche // Infinitistic Methods. N.Y.; Paris, 1961.