УДК 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1293-1297

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ

© С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Рассмотрены линейно-квадратичные отображения, действующие в вещественных линейных конечномерных пространствах. Получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линейно-кваратичное отображение было гомеоморфизмом.
Ключевые слова: гомеоморфизм; линейно-квадратичное отображение

1. Критерий гомеоморфности линейно-квадратичных отображений

Пусть заданы линейное отображение $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и симметричное билинейное отображение $Q:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Зададим отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ по формуле

$$f(x) = Ax + Q[x,x] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Отображения такого вида называются линейно-квадратичными. Цель настоящей работы – получить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы отображение f было гомеоморфизмом.

Известная теорема Адамара (см., например, теорему 5.3.10 в [1]) утверждает, что *если некоторое отображение $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ является непрерывно-дифференцируемым, в каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$ линейный оператор $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ невырожден, и существует $c>0$ такое, что $\left\|\frac{\partial g}{\partial x}(x)^{-1}\right\|\le c$ для любого $x\in\mathbb{R}^n$, то g является гомеоморфизмом.*

Предположения теоремы Адамара являются достаточными, но не необходимыми условиями гомеоморфности гладких отображений. Далее мы покажем, что для линейно-квадратичных отображений f необходимым и достаточным условием гомеоморфности является только невырожденность производной отображения f, а условие ограниченности $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x)^{-1}\right\|$ на $\mathbb{R}^n$ для таких отображений может нарушаться.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – линейно-квадратичное отображение. Тогда отображение f является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда при любом $x\in\mathbb{R}^n$ линейный оператор $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ невырожден.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Предположим, что при любом $x\in\mathbb{R}^n$ линейный оператор $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ невырожден, и докажем, что f является гомеоморфизмом.

Пусть для f имеет место представление (1). Тогда поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)=A,$ то линейный оператор A невырожден. Положим $\widetilde{f}(x):=A^{-1}f(x)$ и $\widetilde{Q}[x,u]:=A^{-1}Q[x,u]$ для любых $x,u\in$ $\in\mathbb{R}^n$. В приведенных обозначениях

$$\widetilde{f}(x)=x+\widetilde{Q}[x,x]\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

и, очевидно, при любом $x\in\mathbb{R}^n$ линейный оператор $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(x)$ невырожден. Достаточно доказать, что $\widetilde{f}$ является гомеоморфизмом.

Докажем, что $\widetilde{f}$ инъективно. Предположим противное, т. е., что для некоторых $x,u\in\mathbb{R}^n$, $x\neq u$, выполняется равенство $f(x)=f(u)$. Тогда $x+\widetilde{Q}[x,x]=u+\widetilde{Q}[u,u]$ и, значит,

$$\widetilde{Q}\left[\frac{x+u}{2},x-u\right]=\frac{u-x}{2}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}\left(\frac{x+u}{2}\right)(x-u)=(x-u)+2\widetilde{Q}\left[\frac{x+u}{2},x-u\right]=0,$$

что противоречит предположению невырожденности производной отображения $\widetilde{f}$. Итак, доказано, что $\widetilde{f}$ инъективно.

В [2] было показано, что любое инъективное полиномиальное отображение сюръективно. Следовательно, $\widetilde{f}$ сюръективно. Осталось доказать, что $\widetilde{f}^{-1}$ непрерывно.

Возьмем произвольную точку $y\in\mathbb{R}^n$ и последовательность $\{y_j\}\in\mathbb{R}^n$, сходящуюся к y. Положим $x_j:=\widetilde{f}^{-1}(y_j)$ для каждого j, $x:=\widetilde{f}^{-1}(y)$. Покажем, что $\{x_j\}$ сходится к x. Для произвольного $\varepsilon>0$ обозначим замкнутую ε-окрестность точки x через U_ε, а ее образ при отображении $\widetilde{f}$ – через V_ε. Как известно (см., например, [2], §II.6.2, теорема 7), непрерывное инъективное отображение компакта на свой образ является гомеоморфизмом. А так как x – внутренняя точка множества U_ε, то по теореме Брауэра об инвариантности области (см., например, теорему VI.9 в [4]) y – внутренняя точка множества V_ε. Следовательно, существует номер N такой, что $y_j\in V_\varepsilon$ для любого $j\geq N$. Отсюда в силу инъективности отображения f из равенства $U_\varepsilon=\widetilde{f}^{-1}(V_\varepsilon)$ следует, что $x_j\in U_\varepsilon$ для любого $j\geq N$. Значит, $x_j\to x$ при $j\to\infty$, что доказывает непрерывность отображения $\widetilde{f}^{-1}$. Следовательно, $\widetilde{f}$ – гомеоморфизм, а, значит, и f является гомеоморфизмом.

II. Пусть отображение f, определенное формулой (1), является гомеоморфизмом. Докажем, что при любом $x\in\mathbb{R}^n$ линейный оператор $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$ невырожден. Предположим противное, т. е., что существует точка $x\in\mathbb{R}^n$ и ненулевой вектор $h\in\mathbb{R}^n$ такой, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)h=0$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x)h=Ah+2Q[x,h],$$

то

$$f(x+h)=A(x+h)+Q[x+h,x+h]=Ah+2Q[x,h]+Ax+Q[x,x]+Q[h,h]=f(x)+Q[h,h],$$

и

$$f(x-h)=A(x-h)+Q[x-h,x-h]=-(Ah+2Q[x,h])+Ax+Q[x,x]+Q[h,h]=f(x)+Q[h,h],$$

и, значит, $f(x-h)=f(x+h)$. Последнее противоречит тому, что f является гомеоморфизмом. Полученное противоречие доказывает невырожденность линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ в каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$. $\square$

2. Обсуждение. Сравнение основного результата с теоремой Адамара

В связи с приведенным утверждением возникает естественный вопрос. Выполнены ли предположения теоремы Адамара для линейно-квадратичных, но не линейных, отображений, удовлетворяющих предположениям теоремы 1? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий пример.

П р и м е р 2. Пусть

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x)=(x_1,x_1^2+x_2)\quad \forall\, x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Очевидно, отображение f является линейно-квадратичным и не является линейным. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2x_1 & 1\end{pmatrix}\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^2,$$

и, значит, линейный оператор $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не вырождается ни при каком $x\in\mathbb{R}^2$. В то же время

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x)^{-1}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2x_1 & 1\end{pmatrix}\right\|\geq\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2x_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+4x_1^2}\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^2.$$

Следовательно, $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x)^{-1}\right\|$ не ограничена на $\mathbb{R}^n$.

В связи с приведенным примером зададимся еще одним вопросом. Выполнены ли предположения теоремы Адамара для хотя бы одного линейно-квадратичного, но не линейного, отображения, удовлетворяющего предположениям теоремы 1? Ответ на этот вопрос автору неизвестен. Однако можно показать, что для достаточно широкого класса линейно-квадратичных отображений, удовлетворяющего предположениям теоремы 1, предположения теоремы Адамара не выполняются. Сделаем это.

Пусть заданы линейное над полем $\mathbb{C}$ отображение $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ и симметричное билинейное над полем $\mathbb{C}$ отображение $Q:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$. Зададим линейно-квадратичное отображение $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ по формуле

$$f(x)=Ax+Q[x,x]\quad \forall\, x\in\mathbb{C}^n. \tag{2}$$

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть при любом* $x\in\mathbb{R}^n$ *линейный оператор* $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ *невырожден (производная понимается в комплексном смысле). Тогда существует последовательность* $\{x_k\}\subset\mathbb{C}^n$ *такая, что*

$$\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_k)\right)^{-1}\right\|\to\infty\quad \text{при}\quad k\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что линейный оператор A невырожден. Покажем, что спектральный радиус $\sigma(A^{-1}Q[x,\cdot])$ равен нулю при любом $x\in\mathbb{C}^n$.

Предположим противное, т.е. существуют векторы $x,h\in\mathbb{C}^n$ и число $\lambda\in\mathbb{C}$ такие, что $h\neq 0$, $\lambda\neq 0$ и $A^{-1}Q[x,h]=\lambda h$. Тогда $A^{-1}Q[-\lambda^{-1}x,h]=-h$, и, значит, для $u:=-2^{-1}\lambda^{-1}x$ линейный оператор $2A^{-1}Q[u,\cdot]$ имеет своим собственным числом минус единицу. Следовательно, линейный оператор $I+2A^{-1}Q[u,\cdot]$ вырождается, а, значит, вырождается и линейный оператор $A+2Q[u,\cdot]$. Последнее противоречит предположению невырожденности производной, так как $\frac{\partial f}{\partial x}(u)=A+2Q[u,\cdot]$. Таким образом, доказано, что $\sigma(A^{-1}Q[x,\cdot])=0$.

Поскольку $\sigma(A^{-1}Q[x,\cdot])=0$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right)^{-1} = \left(A+2Q[x,\cdot]\right)^{-1} = \left(I+2A^{-1}Q[x,\cdot]\right)^{-1}A^{-1} = \sum_{j=0}^{n}(2A^{-1}Q[x,\cdot])^{j}A^{-1}.$$

Возьмем вектор x такой, что $Q[x,\cdot]\neq 0$ (указанный вектор x существует, поскольку по предположению предложения отображение Q является ненулевым). Положим $x_k:=kx$ для натуральных k. Обозначим через N наибольшее из всех чисел $j=\overline{0,n}$ такое, что $(2A^{-1}Q[x,\cdot])^{j}\neq 0$. Имеем $N>0$, так как линейный оператор $Q[x,\cdot]$ является ненулевым. Тогда

$$\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_k)\right)^{-1}\right\| = \|\sum_{j=0}^{N}(2A^{-1}Q[x_k,\cdot])^{j}A^{-1}\| \geq$$

$$\geq k^{N}\|(2A^{-1}Q[x,\cdot]A^{-1})^{N}\| - \sum_{j=0}^{N-1}(k^{j}\|(2A^{-1}Q[x,\cdot])^{j}A^{-1}\|).$$

Поскольку коэффициент при k^N отличен от нуля, то выражение в правой части неравенства стремится к бесконечности при $k\to\infty$. Значит, последовательность $\{x_k\}$ является искомой. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
2. *Bialynicki-Birula A., Rosenlicht M.* Injective morphisms of real algebraic varaities // Proc. AMS. 1962. V. 13. P. 200–203.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
4. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

БЛАГОДАРНОСТИ: Результаты §1 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01168). Результаты §2 получены при поддержке фонда Volkswagen.

Поступила в редакцию 13 августа 2017 г.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

UDC 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1293-1297

LINEARLY-QUADRATIC HOMEOMORPHISMS

© **S. E. Zhukovskiy**

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Linearly-quadratic mappings of finite-dimensional linear spaces over reals are considered. A criterion for a linearly-quadratic mapping to be a homeomorphism is obtained.
Keywords: homeomorphism; linearly-quadratic mapping

REFERENCES

1. *Ortega J., Rheinboldt W.* Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press. NY, 1970.
2. *Bialynicki-Birula A., Rosenlicht M.* Injective morphisms of real algebraic varaities // Proc. AMS. 1962. V. 13. P. 200–203.
3. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. M.: Nauka, 1976.
4. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension Theory. Princeton Univ. Press. Princeton, 1941.

ACKNOWLEDGEMENTS: The results of Section 1 were obtained with the support of the grant of the Russian Science Foundation (project № 17-11-01168). The results of Section 2 were obtained with the support of the Volkswagen Foundation.

Received 13 August 2017

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Жуковский С.Е.* Линейно-квадратичные гомеоморфизмы // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1293–1297. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1293-1297.

For citation: Zhukovskiy S.E. Lineyno-kvadratichniye gomeomorfizmi [Linearly-quadratic homeomorphisms]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1293–1297. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1293-1297 (In Russian, Abstr. in Engl.).