

Квантовое вейвлет-преобразование Добеши

Вейвлеты (всплески) представляют собой новую технологию обработки сигналов, как аналоговых так и цифровых. Рассматривается одномерный трехуровневый вейвлет-анализ, позволяющий получать массив вейвлет-коэффициентов с линейной сложностью. Новым направлением в теории квантовых вычислений является применение квантовых схем, позволяющих реализовать с их помощью вейвлет-преобразование Добеши. При этом классические биты заменяются на кубиты (квантовые биты), которые хранятся в квантовом регистре. Отличительной чертой вейвлет-анализа является введение новых операций, которые ранее не использовались в цифровой обработке сигналов. Это операция прореживания сигнала (downsampling) и операция вставки нулей (upsampling). Иногда вейвлеты называют "электронной лупой". Это связано с тем, что в вейвлет-анализе используются уровни разрешения, связанные с операцией сжатия (растяжения). Локальность вейвлет-анализа позволяет эффективно очищать сигналы от импульсных помех и осуществлять гибкое сжатие сигналов. На рис. 3 приведена общая структурная схема трехуровневого вейвлет-анализа и восстановления сигнала. Применение вейвлетов Добеши связано с их простой схемной реализацией в виде набора фильтров низкой частоты (ФНЧ) и фильтров высокой частоты (ФВЧ). Порядок вейвлета Добеши определяется как половина числа весовых коэффициентов фильтров. Подробно рассмотрен пример обычного вейвлет-преобразования Добеши для тестового сигнала (массив длины 1024) в виде зашумленной синусоиды. Для перехода к квантовому вейвлет-преобразованию необходимо рассмотреть матричную запись вейвлет-преобразования. В случае трехуровневого вейвлет-преобразования массива длины 16 матричная запись содержит три разреженные матрицы, которые и обеспечивают линейную сложность вейвлет-преобразования. Рассматривается реализация быстрого алгоритма (алгоритма Малла) вейвлет-преобразования Добеши (db2) с использованием квантовых элементов (гейтов). Теорема Готтесмана-Нилла утверждает, что квантовые схемы можно моделировать на классических компьютерах с помощью двух однокубитовых элементов: H (элемент Адамара), P (фазовый элемент) и одного двухкубитового элемента CNOT. В качестве примеров рассмотрены квантовое вейвлет-преобразование Хаара (db1) для четырехкубитового массива и матричное представление квантового вейвлет-преобразования Добеши (db2) также для четырехкубитового входного массива.

Ключевые слова: вейвлеты Добеши, алгоритм Малла, унитарный оператор, квантовые элементы, теорема Готтесмана-Нилла.

Кренкель Т.Э.,

доцент кафедры ТВиПМ МТУСИ, Российская Федерация, Москва, krenkel2001@mail.ru

Бажанова М.А.,

аспирантка МТУСИ, Российская Федерация, Москва, mastyamar@gmail.com

Введение

Вейвлеты являются двухпараметрическим семейством ортогональных функций. Непрерывный вейвлет обозначается

$$\psi\left(\frac{x-a}{a}\right) \tag{1}$$

и представляет собой волнообразную функцию, самоподобную относительно параметров растяжения (сжатия) $0 < a < \infty$ и сдвига $-\infty < b < \infty$.

Замена синусов и косинусов (классический гармонический анализ) на вейвлеты приводит к повышению разрешающей способности спектральных приборов по отношению к коротким всплескам сигналов. Поэтому вейвлет-анализ иногда сравнивают с «электронной лупой». Это свойство вейвлетов связано с их локализацией по осям a и b .

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) является скалярным произведением анализируемого сигнала с вейвлетом ψ , так же как преобразование Фурье представляет собой скалярное произведение сигнала с комплексной экспонентой. Но в случае НВП, вследствие зависимости вейвлетов от двух параметров и их локализованности, мы получаем вейвлет-спектрограмму – 2-мерный образ анализируемого сигнала в координатной плоскости (a, b) .

Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) применяется при анализе дискретных сигналов (последовательностей) с помощью дискретных вейвлетов

$$\psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где целочисленные параметры j и k обозначают, соответственно, уровень разрешения (масштаб) и сдвиг.

Общая теория вейвлетов была создана в начале 80-х прошлого века [1]. Кроме энциклопедии вейвлетов [2] сейчас имеется множество книг по вейвлетам, в том числе практические пособия по применению вейвлетов в системе MATLAB [3,4].

Большинство семейств дискретных вейвлетов строится на основе нескольких аксиом кратного-масштабного анализа [5].

В общем случае вейвлеты обладают *только* двумя свойствами из трех фундаментальных свойств:

1) Ортогональность (Это основное свойство, оно обязательно должно соблюдаться между различными уровнями разрешения, но не всегда соблюдается в пределах одного заданного уровня разрешения. В этом случае семейство вейвлетов называется полуортогональным).

2) Компактность носителя.

3) Симметричность формы.

Семейств вейвлетов, которые обладают всеми тремя свойствами, не существует.

Вейвлеты Добеши и быстрый алгоритм Малла дискретного вейвлет-преобразования

Любая квадратично интегрируемая функция $f(x)$ может быть представлена в виде вейвлет-разложения

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{jk} \psi_{jk}(x), \tag{3}$$

где

$$c_{jk} = \int f(x) \psi_{jk}(x) dx \tag{4}$$

вейвлет-коэффициенты.

Рассмотрим вейвлеты Добеши [1]. Эти вейвлеты ортогональны, имеют компактный носитель, но несимметричны и не имеют аналитической формы. В нотации Wavelet toolbox в системе MATLAB вейвлеты Добеши обозначаются db2, db3, ..., db11 и задаются конечной импульсной характеристикой (КИХ) – набором весовых вейвлет-коэффициентов, соответственно, 4, 6, ..., 22. Выберем db2, имеющими следующий набор (КИХ) весовых вейвлет-коэффициентов, соответствующими масштабирующей функции $\varphi(x)$:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.483, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.8365, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.2241, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx -0.1294 \quad (5)$$

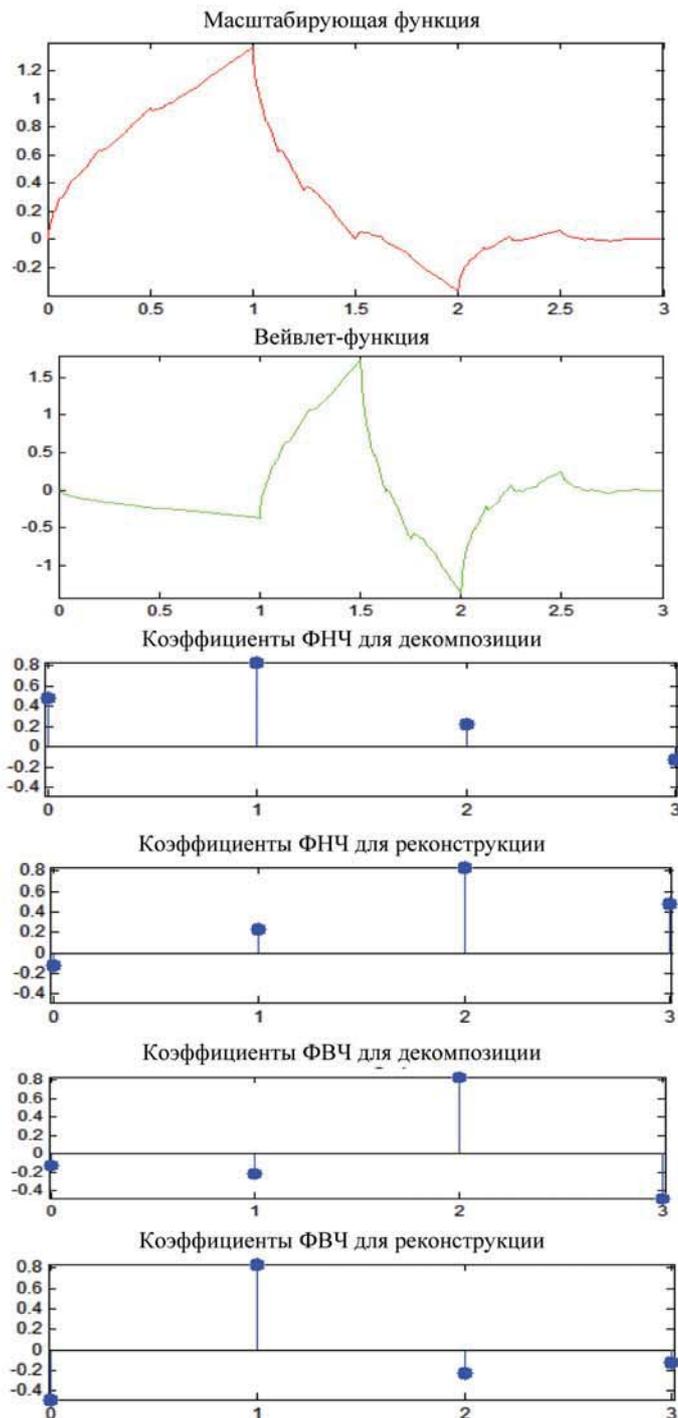


Рис. 1

На рис. 1 приведены графики масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлета Добеши $\psi(x)$ для случая db2, а также графики весовых вейвлет-коэффициентов фильтров низкой (ФНЧ) $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$ и высокой (ФВЧ) частоты $\{g_0 \approx -0.1294, g_1 \approx -0.2241, g_2 \approx 0.8365, g_3 \approx -0.483\}$ для декомпозиции и реконструкции (восстановления) сигнала.

На рис. 2 приведен пример ДВП для тестового сигнала синусоида + шум (heavysin), имеющего длину 2^{10} в случае трех уровней разрешения $j = 1, 2, 3$.

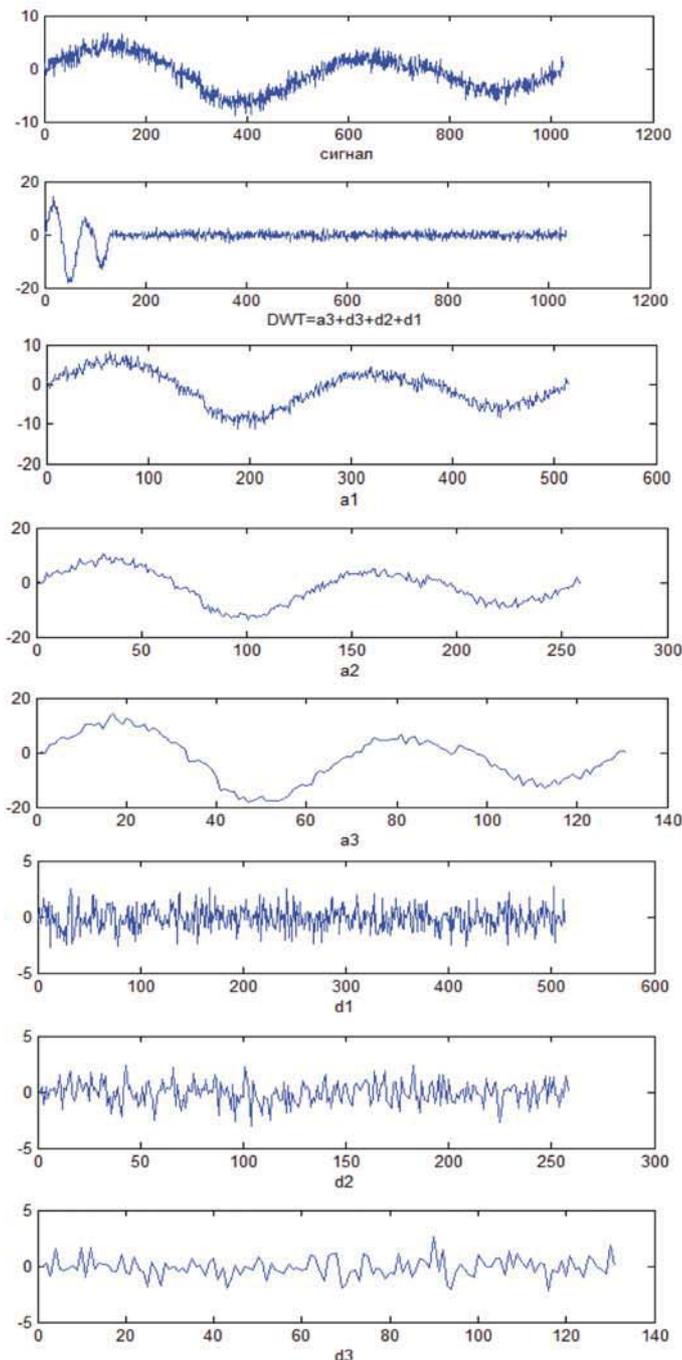


Рис. 2

Из графика вейвлет-разложения видно, что аппроксимирующие коэффициенты 3-го уровня a_3 описывают полезный сигнал (синусоиду), детализирующие коэффициенты d_3 описывают низкочастотный шум, детализирующие коэффи-

циенты d_2 – среднечастотный шум, а детализирующие коэффициенты d_1 – высокочастотный шум.

Как видно из этого рисунка массив вейвлет-коэффициентов (результат ДВП) имеет вид $\{a_3; d_3; d_2; d_1\}$, где массивы a_3 и d_3 имеют длину равную 1/8 исходного массива, массив d_2 имеет длину равную 1/4 исходного массива, а массив d_1 имеет длину равную 1/2 исходного массива.

Вейвлет-разложение сигнала (т.е. сигнал, восстановленный по массиву вейвлет-коэффициентов ДВП) $s(x)$ для приведенного примера записывается следующим образом:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} a_{3k} \varphi_{3k}(x) + \sum_{j=3}^1 \sum_{k=0}^{2^{n-j}-1} d_{jk} \psi_{jk}(x). \quad (6)$$

Ошибка восстановления имеет порядок 10^{-12} , что связано с выбором 4 верных знаков после запятой в наборе весовых вейвлет-коэффициентов.

Быстрый алгоритм Малла для трех уровней разрешения может быть изображен в виде структурной схемы приведенной на рис. 3. Верхняя часть схемы соответствует процедуре декомпозиции сигнала, а нижняя – процедуре реконструкции.

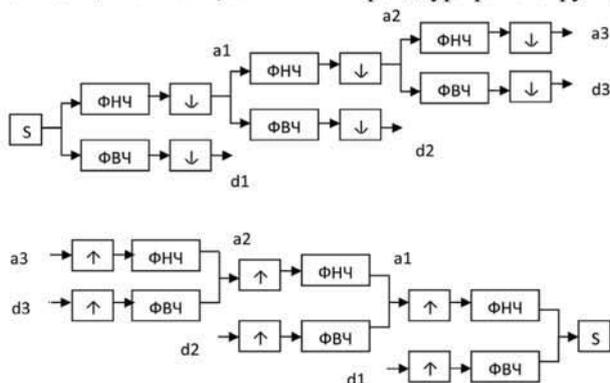


Рис. 3

В этой структурной схеме имеются блоки прореживания (даунсэмплинг-downsampling), изображаемые квадратами со стрелкой вниз, и блоки вставления нулей (апсэмплинг-upsampling) в виде квадратов со стрелкой вверх. Коэффициент прореживания M выбран равным 2.

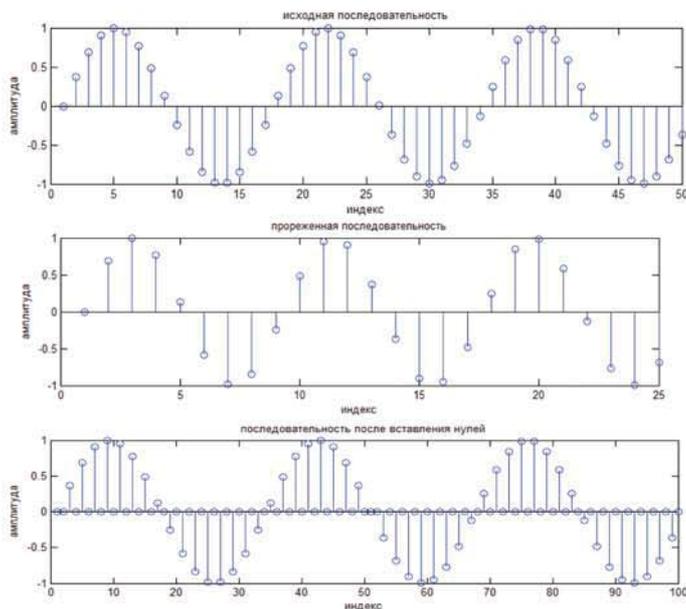


Рис. 4

Операции даунсэмплинга и апсэмплинга, необходимые для проведения вейвлет-анализа, изображены на рис. 4 для синусоиды.

Запись алгоритма Малла вейвлет-преобразования Добеши в матричном виде выглядит следующим образом (для трех уровней разрешения и для $2^4=16$):

$$W_{16} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & 0 \\ (g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$W_8 = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & 0 & g_1 & 0 & g_2 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 & g_1 & 0 & g_2 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 & g_1 & 0 & g_2 & 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Легко можно проверить, что

$$W_{16} \cdot W_8 \cdot W_4 \cdot W_4^T \cdot W_8^T \cdot W_{16}^T = I_{16}. \quad (10)$$

где T обозначает транспонирование матрицы.

Квантовый n -кубитовый регистр. Группа Паули P_n и группа Клиффорда C_n . Теорема Готтесмана-Нилла

Квантовый бит или кубит $|\psi\rangle$ (q-бит) является ключевым понятием в квантовых вычислениях. Он представляет собой состояние двухуровневой квантово-механической системы и является элементом двумерного комплексного гильбертова пространства $H = C^2$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in C, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

$|0\rangle$ и $|1\rangle$ называется вычислительным базисом, α и β представляют комплексные вероятности, а сам кубит $|\psi\rangle$ (кет-вектор по Дираку [6]) является волной вероятности (волновой функцией), описывающей состояние элементарной частицы (электрон, нейтрон, протон) со спином $1/2$. Скалярное произведение в H определяется как

$$\langle \psi | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2, \text{ где } |\psi\rangle - \text{ бра-вектор. Два}$$

базисных состояния одного кубита, обозначаемые $|0\rangle$ и $|1\rangle$ представляют собой единичные ортогональные векторы, т.е.

$$\langle k | l \rangle = \delta_{kl}, \quad (12)$$

где $k, l \in \{0, 1\}$.

Квантовый регистр, который представляет основной элемент квантового компьютера, хранит состояние n -кубитовой системы (2^n уровней квантово-механической системы).

Гильбертово пространство n -кубитового квантового регистра $H^{\otimes n}$ есть тензорное (кронекеровское) произведение n пространств $H : H^{\otimes n} = H \otimes H \otimes \dots \otimes H$.

Кронекеровское или тензорное произведение матриц:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пространство $H^{\otimes n}$ является 2^n -мерным комплексным линейным пространством. Вычислительный базис в $H^{\otimes n}$ выбирается в виде 2^n ортонормированных состояний (векторов) $|k\rangle$, где k его двоичное представление. Состояние $|k\rangle$ есть тензорное произведение состояний $|k_i\rangle$ в $H^{\otimes n}$:

$$|k\rangle = |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \dots \otimes |k_n\rangle = |k_1 k_2 \dots k_n\rangle, \quad (13)$$

где $k_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$.

Состояние n -кубитового квантового регистра $|\psi\rangle \in H^{\otimes n}$ в общем случае записывается в виде суперпозиции базисных состояний в виде:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k |k\rangle, \quad (14)$$

где $\sum_{k=0}^{2^n-1} |\alpha_k|^2 = 1$.

Например, в случае 2-кубитового квантового регистра:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle, \quad (15)$$

где $\alpha_{ij} \in C$ и $\sum_{k=0}^3 |\alpha_k|^2 = 1$, т.е. два кубита в общем случае представляют собой состояние 4-уровневой квантово-механической системы и являются элементом гильбертова пространства $H^{\otimes 2} = C^4$.

В квантовой теории вычислений используются матрицы Паули:

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Матрицы Паули являются эрмитовыми операторами, т.е.

$A = (\overline{A^T})$, где черта сверху обозначает взятие комплексного сопряжения.

Самосопряжённый оператор – это оператор с эрмитовой матрицей и действительными собственными числами. Унитарный оператор – это самосопряженный оператор, удовлетворяющий дополнительному условию

$$U \cdot \overline{U^T} = I, \quad \overline{U^T} = U^{-1} \quad (17)$$

Группа обобщенных матриц Паули P_n для n -кубит определяется как $P_n = \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n} \times \{\pm 1 \pm i\}$, где X, Y, Z – матрицы Паули 2×2 .

Таким образом, группа P_n является группой всех кронекеровских произведений матриц Паули совместно с $\{\pm 1 \pm i\}$.

$$\text{Пример: } P_1 = \{I, X, Y, Z\} \quad |P_1| = 16,$$

$$P_2 = \{I, X, Y, Z\}^{\otimes 2} \times \{\pm 1 \pm i\} \quad |P_2| = 64.$$

Нормализатором называется унитарный оператор U , действующий на элемент P_n , такой, что $UMU^{-1} \in P_n, \forall M \in P_n$.

Нормализаторы обобщенной группы Паули P_n образуют группу Клиффорда $C_n = N(P_n)$ с образующими элементами $H, P, CNOT$. Группа Клиффорда C_2 имеет порядок 92160.

Теорема Готтесмана-Нилла [6]. Пусть квантовое вычисление выполняется с использованием приготовления состояний в вычислительном базисе, элементов Адамара, Паули, фазовых и элементов $CNOT$, измерений наблюдаемых из группы Паули, классического управления в зависимости от результатов измерений. Такое квантовое вычисление может эффективно моделироваться на классическом компьютере.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (\text{Адамар}); P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} (\text{фаза}) - \text{поворот на } \frac{\pi}{2} \text{ вокруг оси } z. \quad (18)$$

Операция $CNOT$:

$$CNOT = \begin{matrix} A: |a\rangle \\ B: |b\rangle \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \downarrow \\ \text{---} \square \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} |a\rangle \\ |b'\rangle = |a \oplus b\rangle \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Квантовое вейвлет-преобразование Добеши db2

На рис. 5 изображена общая структурная схема унитарного оператора, осуществляющего общее унитарное квантовое преобразование.



Рис. 5

Следует отметить, что в случае квантового преобразования Хаара и Добеши (то есть их моделирования на классическом компьютере) отсутствуют этапы подготовки квантового регистра и этап измерения состояния, т.е. рассматривается только процедура вычисления конкретного преобразования Хаара или Добеши с использованием элементов H и $CNOT$.

Постановка задачи [7]. Как реализовать 3-уровневое вейвлет-преобразование Добеши db2 в виде унитарного преобразования (оператора) на 2-уровневой квантовомеханической системе, используя элемент (гейт) $CNOT$?

Прежде чем приступить к решению этой задачи рассмотрим пример квантового трехуровневого вейвлет-преобразования Хаара (в системе MATLAB вейвлеты Хаара обозначаются haag или db1, что соответствует 2 весовым коэффициентам ФНЧ и ФВЧ.) для сигнала, представляющего собой последовательность из восьми чисел. Следовательно, нам надо найти схемотехническое решение поставленной задачи и изобразить его в виде структурной схемы с применением элементов H и $CNOT$.

Так как любое квантовое вейвлет-преобразование состоит из прямых сумм, тензорных произведений и произведений унитарных матриц, то оно описывается с использованием матриц перестановок двух типов: матрицы совершенной перестановки P_{2^n} и двоичной инверсии P_{2^n} .

Матрица совершенной перестановки P_{2^n} в выражениях её элементов P_{ij} для $i, j = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ определяется следующим образом:

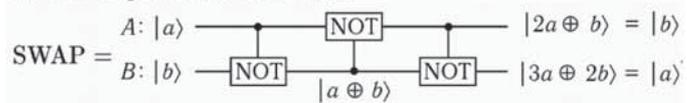
$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \frac{i}{2} \text{ и } i \text{ четное, или если } j = \frac{i-1}{2} 2^{n-1} \text{ и } i \text{ нечетное} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (19)$$

Квантовое описание P_{ij} может быть представлено в виде:

$$P_{2^n} : |a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0\rangle \mapsto |a_0a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1\rangle, \quad (20)$$

т.е. эта операция совершает циклический правый сдвиг в n -кубитовом регистре.

Элемент перестановки двух кубитов $SWAP = P_4$, который может быть реализован в виде последовательного соединения трех элементов $CNOT$



записывается как $P_4 : |a_1a_0\rangle \mapsto |a_0a_1\rangle$ (21) и его матрица имеет вид:

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Матрица двоичной инверсии P_{2^n} в выражениях её элементов P_{ij} для $i, j = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ определяется следующим образом:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ является двоичной инверсией } i \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (23)$$

Квантовое описание P_{2^n} может быть представлено в виде:

$$P_{2^n} : |a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0\rangle \mapsto |a_0a_1 \dots a_{n-2}a_{n-1}\rangle, \quad (24)$$

Матрица P_{2^n} может быть профакторизована в выражениях P_{2^i} , а P_{2^i} в свою очередь может быть выражена через

P_4 , которая в общем случае реализуется в виде трех элементов $CNOT$. Таким образом, перестановочные матрицы в целом могут быть реализованы на квантовом компьютере.

В операторном виде трехуровневое квантовое преобразование Хаара $haar_{2^3}$ записывается следующим образом:

$$haar_{2^3} = (I_4 \otimes H)(I_2 \otimes H \oplus I_4)(H \oplus I_6)(P_4 \oplus I_4)P_8 \quad (25)$$

На вход структурной схемы на Рис.6 по четырем кубитовым проводам подается входная последовательность в виде четырех псевдокубитов (Псевдокубит – 2 числа (действительных или комплексных) без условия нормировки $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$).

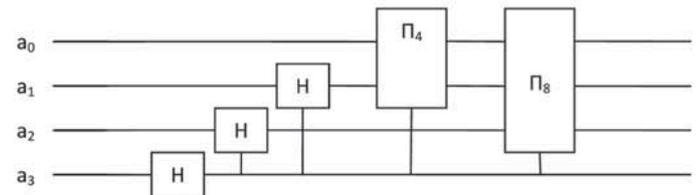
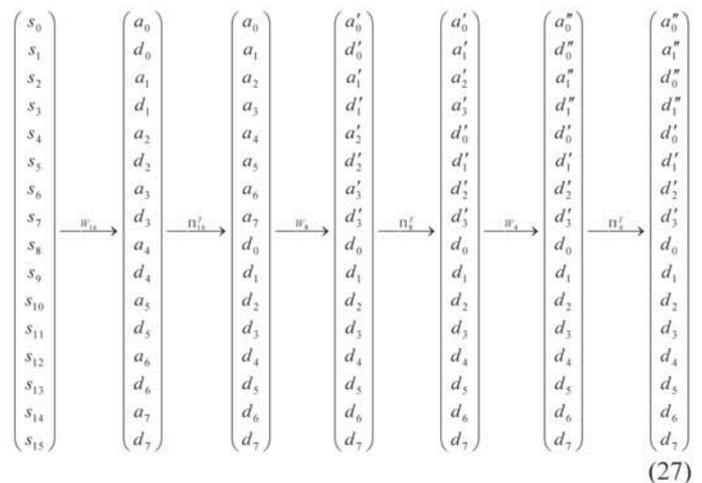


Рис. 6. Структурная схема трехуровневого квантового вейвлет-преобразования $haar_{2^3}$

В общем случае операторная запись квантового вейвлет-преобразования Хаара $haar_{2^3}$ записывается в виде:

$$H_{2^n} = (I_{2^{n-1}} \otimes H) \dots (I_{2^{n-i}} \otimes H \oplus I_{2^{n-2^{i+1}}}) \dots (H \oplus I_{2^{n-2}}) \times (P_4 \oplus I_{2^{n-4}}) \dots (P_{2^i} \oplus I_{2^{n-2^i}}) \dots (P_{2^{n-1}} \oplus I_{2^{n-1}}) P_{2^n} \quad (26)$$

Решение задачи получения квантового вейвлет-преобразования Добеши db2 представлено ниже в виде последовательности преобразований вектор-столбцов:



Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. – М.: Изд-во «РХД», 2001. – 450 с.
2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: пер. с англ. – М.: Изд-во «Мир», 2005. – 672 с.
3. Дьяконов В. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: Изд-во «Солон Пресс», 2004. – 397 с.
4. Соломенцев Н.К. Основы теории вейвлетов. – М.: Изд-во «ДМК», 2005. – 303 с.
5. Кренкель Т. Э., Кюркчан А.Г. Вейвлеты их применение в задачах связи. – М.: МТУСИ, 2005. – 42 с.
6. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информатика: пер. с англ. – М.: Изд-во «Мир», 2006. – 822 с.
7. Williams C.P. Explorations in quantum computing. – Springer, 2007. – 450 p.

Quantum Daubechies wavelet-transform

Krenkel Teodor E.,

Moscow Technical University of Communications and Informatics, Russian Federation, Assistant professor, krenkel2001@mail.ru

Bazanova Maria A.,

Moscow Technical University of Communications and Informatics, Russian Federation, postgraduate, mastymar@gmail.com

Abstract

Wavelets (bursts) is a new technology of signal processing, both analog and digital. We consider a one-dimensional three-level wavelet analysis, which yields an array of wavelet coefficients with linear complexity. A new direction in the theory of quantum computing is the use of quantum circuits that allow to implement with their help Daubechies wavelet transform. Locality of wavelet analysis can effectively clean signals from impulse noise and provide flexible compression signals. Fig. 3 shows an overall block diagram of a three-level wavelet analysis and signal recovery. Application of Daubechies wavelets due to their simple circuit implementation as a set of low-pass filter (LPF) and a high pass filter (HPF). The order Daubechies wavelet is defined as half the number of filter weights. Discussed in detail an example of a conventional wavelet transform Daubechies for the test signal (the array length of 1024) in the form of a noisy sinusoid. To go to the quantum wavelet transform matrix notation is necessary to consider the wavelet transform. In the case of a three-level wavelet transform array of length 16 matrix entry contains three sparse matrices, which provide linear complexity of the wavelet transform. We consider the implementation of a fast algorithm (algorithm Malla) Daubechies wavelet transform (db2) using quantum elements (gates). Theorem Gottesman-Neill argues that quantum circuits can be modeled on classical computers using two single-qubit elements: H (Hadamard element), P (phase element) and a two-qubit element CNOT. As examples, the quantum of the Haar wavelet transform (db1) for chetyrehkubitovogo array and matrix representation of quantum wavelet transform Daubechies (db2) for four qubit input array.

Keywords: *daubechies wavelets, Malla algorithm, unitary operator, quantum gates, theorem of Gottesman-Knill.*

References

1. *Daubechies I. Ten lectures on wavelets. London, 1992. 450 p.*
2. *Malla S. A wavelet tour of signal processing, 2nd ed. New York, 1999. 672 p.*
3. *Dyakonov V. Wavelets. From theory to practice. Moscow, 2004. 397 p.*
4. *Solometsev N. Basics of wavelets. Moscow, 2005. 303 p.*
5. *Krenkel T.E., Kyurkchan A.G. Wavelets in communications. Moscow, 2005. 42 p.*
6. *Nilson M., Chang I. Quantum computing and quantum information. Cambridge, 2001. 822 p.*
7. *Williams C. P. Explorations in quantum computing. Springer, 2007. 450 p.*