ФИЗИКА

УДК 530.145

Л. В. Прохоров

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И КИНЕТИКА

1. Введение. В последние несколько лет стало ясно, что концепция квантового описания должна появляться вместе с концепцией пространства-времени на малых (планковских) расстояниях, характеризуемых длинами порядка $l_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$ см, где G – гравитационная постоянная. Предполагается, что теория должна базироваться на классической физике.

Так, Хофт [1] пришел к выводу, что для построения непротиворечивой квантовой теории гравитации необходимо: 1) обратиться к физике на планковских расстояниях; 2) предположить дискретность пространства-времени и всех физических переменных; 3) постулировать на планковских расстояниях детерминизм, т. е. классическую механику; 4) допустить (локально) возможность диссипативных процессов. В недавней работе [2] пространство-время моделируется некоторым графом, погруженным в плоское пространство, узлы которого (частицы) в пределе низких энергий описываются нерелятивистской классической механикой; в модели имеется минимальная длина, а некоторые частицы находятся в контакте с термостатом. Оказывается, что тогда понятие физического пространства и квантовая механика появляются одновременно. Другой подход к проблеме получения квантовой теории из классической предлагается в работе [3]. Авторы вводят понятие «изначально статистических квантовых событий» и метрику в пространстве вероятностных распределений. Предположение о существовании в этом пространстве канонического гамильтонова потока позволяет ввести в теорию комплексные волновые функции. Физический смысл постоянной Планка h в статьях [2,3] не обсуждался.

В работах автора [4–9] изучался вопрос о природе квантового описания. В первых статьях [4,5] комплексность амплитуд вероятности связывалась с двумерностью фазового пространства (ФП); условие пропорциональности $\psi \sim q + ip$ превращало их в динамические переменные. Последующие работы [6–9] исходили из предположения о существовании элементарных систем с компактным ФП. Было установлено: 1) в таких системах имеется фундаментальная постоянная размерности действия (объем двумерного фазового пространства), которая отождествлялась с постоянной Планка h; 2) если ФП есть сфера, то естественным образом появляется вероятностное описание (на сфере радиуса R имеется единственное инвариантное распределение вероятности, задаваемое плотностью $p = 1/4\pi R^2$); 3) система «частица со сферическим ФП» эквивалентна системе «гармонический осциллятор в термостате»; 4) случайные величины такой системы образуют пространство Фока для осциллятора; 5) возбуждения цепочки подобных осцилляторов описываются амплитудами вероятности; 6) цепочка осцилляторов в непрерывном пределе моделирует квантованную бозонную струну, одномерную квантовую теорию поля и одномерное пространство; 7) частица есть квант соответствующего поля, а ее волновая функция описывает одночастичное возбуждение поля; 8) бозе-струны позволяют моделировать суперструну; 9) модель пространства дается многомерной сетью, построенной из суперструн. Таким образом, в данной модели в рамках классической теории одновременно появляются и понятие пространства, и квантовая механика.

В п. 2 обращается внимание на некоторые, подчас малоизвестные особенности гамильтоновой динамики, имеющие отношение к квантовому описанию, но не упоминаемые в современных учебниках и монографиях. Речь идет о свойствах, общих как для классической, так и для квантовой теории. Прежде всего подчеркнута важность *неканонических* преобразований в механике Гамильтона. Примером служит переход от канонических переменных q, p к комплексным $z = (q + ip)/\sqrt{2}$, $\bar{z} = (q - ip)/\sqrt{2}$. Гамильтонову механику можно сформулировать целиком в терминах комплексных канонических переменных; «мнимая единица» изначально присутствует в стандартных гамильтоновых уравнениях движения – в виде вещественной антисимметричной матрицы. Далее, операторы являются столь же неотъемлемым атрибутом классической теории, сколь и квантовой. Особое внимание обращается на то, что классическая детерминированная механика обладает статистическими свойствами, которые изучает эргодическая теория, т. е. ей присущи вероятности. Это ведет к появлению распределения Гиббса для сложных систем. Последнее обстоятельство имеет крайне важные следствия: в теории появляются, во-первых, постоянная размерности действия («постоянная Планка»), во-вторых, гильбертово пространство комплексных функций, определенных на фазовом пространстве. В конце п. 2 показано, что произвольные вариации канонических переменных («флуктуации») бывают двух типов. Первые не меняют распределения Гиббса и удовлетворяют уравнениям Гамильтона; вторые модифицируют равновесное состояние, т. е. порождают неравновесные распределения.

В п. 3 отмеченные особенности классической теории изучаются на примере гармонического осциллятора в термостате. Показано, что в случае больших времен релаксации малые (в определенном смысле) отклонения от равновесного состояния осциллятора описываются с помощью амплитуд вероятности. Роль последних играют фазовые функции $f(z)$; соответствующее гильбертово пространство есть пространство Фока, а классическое уравнение движения для $f(z)$ идентично уравнению Шредингера. Квантование энергии оказывается следствием того обстоятельства, что функции $f(z)$ удовлетворяют волновому уравнению на окружности $|z| = \text{const}$. Сумма $E_n = \hbar\omega n + \hbar\omega/2$ складывается из энергии классического движения по упомянутой окружности (отвечающего фазовой функции $f(z) = z^n$) и универсального слагаемого $\hbar\omega/2$ – тепловой энергии. Отмечаются два важных обстоятельства.

Во-первых, так как неравновесное состояние переходит в равновесное, то в уравнение классического движения следует ввести трение, вследствие чего всякое упорядоченное движение в данной модели вымирает. Это означает, что амплитуды вероятности всех состояний приобретают фактор $\exp(-\alpha t/2)$, где $1/\alpha$ – время релаксации. Другими словами, мир, описываемый квантовой механикой, имеет конечное время жизни – в конце концов система переходит в основное состояние.

Во-вторых, обращается внимание на то, что гамильтонова механика задает стрелу времени. ФП – симплектическое, т. е. ориентируемое, многообразие, и задание его ориентации для гармонического осциллятора автоматически задает направление течения времени: симплектическая форма определяет вид скобок Пуассона, а изменение ориентации пространства эквивалентно обращению времени $t \to -t$.

В конце п. 3 демонстрируется, что если детерминированное движение порождает хаос (перемешивание в ФП), то хаос, в свою очередь, порождает детерминированное движение. Случайные перемещения точки в фазовой плоскости, согласно предельным теоремам теории вероятностей, описываются распределением Гиббса для гармонического осциллятора. Но вариации канонических переменных, сохраняющие распределение Гиббса, удовлетворяют уравнениям Гамильтона (см. п. 2.7), и квазиравновесные состояния меняются со временем по законам классической механики.

В п. 4 рассмотрена цепочка гармонических осцилляторов. Круговое движение в фазовой плоскости для одного осциллятора переходит в движение по спирали, так как возмущение распространяется вдоль цепочки. Будучи помещенной в термостат, она моделирует и одномерное пространство, и одномерную квантовую теорию поля.

В заключение кратко рассмотрены наиболее важные особенности модели. Приложение посвящено вопросу учета трения в гамильтоновой механике.

2. Гамильтонова механика. Классической гамильтоновой теории изначально присущи операторы и комплексные канонические переменные. Детерминированные динамические системы обладают статистическими свойствами, которые изучаются эргодической теорией. Последнее означает, что классической теории присущи и вероятности. Более того, в случае сложных систем их эргодичность влечет появление меры Гиббса на ФП и (если она конечна) некоторой постоянной, имеющей размерность действия. Таким образом, в гамильтоновой механике содержатся главные особенности квантовой теории: операторы, комплексные функции, вероятности и постоянная размерности действия.

2.1. Скобки Пуассона и неканонические преобразования. Чтобы задать гамильтонову механическую систему, нужно задать фазовое пространство, т. е. четномерное многообразие, а на нем симплектическую форму и функцию Гамильтона H. Симплектическая форма

$$\omega^2(q,p) = \sum_k \omega_k^{-1}(q,p)dq_k \wedge dp_k \tag{2.1}$$

определяет скобку Пуассона функций f, g

$$\{f(q,p), g(q,p)\} = \sum_k \omega_k(q,p)\{f, g/q_k, p_k\}; \tag{2.2}$$

здесь введено обозначение

$$\{f, g/q,p\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \tag{2.3}$$

для коэффициентов при ω_k, в котором явно указаны канонические переменные. С учетом (2.2), (2.3) пишем уравнения движения

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \{f, H\} = \sum_k \omega_k(q,p)\{f, H/q_k, p_k\}. \tag{2.4}$$

Уравнения (2.4) можно переписать в виде

$$\dot{f} = \sum_k \omega_k(q,p)\frac{D(f,H)}{D(q_k,p_k)}, \tag{2.5}$$

поскольку

$$\{f, g/q,p\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

есть функциональный определитель, якобиан преобразования $D(f,g)/D(q,p)$ от переменных f, g к переменным q, p. Для скобок (2.3) выполняются тождества

$$\{f, g/q,p\} = \{f, g/Q,P\}\{Q,P/q,p\}, \qquad \{Q,P/q,p\} = 1/\{q,p/Q,P\}. \tag{2.7}$$

Формулы (2.5), (2.6) полезны, во-первых, при неканонических преобразованиях [10] к новым каноническим переменным, во-вторых, они позволяют по-новому взглянуть на скобку Пуассона – например, в одномерной механике при $\omega(q,p) = 1$

$$\dot{f} = \frac{D(f,H)}{D(q,p)}, \tag{2.8}$$

т. е. производная $\dot{f}$ равна якобиану преобразования от (f, H) к (q, p). При канонических преобразованиях к новым каноническим переменным Q, P якобиан равен единице: $D(q,p)/D(Q,P) = 1$, тогда как при неканонических преобразованиях

$$\{q, p/Q, P\} = \omega^{-1}(Q, P),$$
$$\dot{f} = \{f, H/q, p\} = \omega(Q, P)\{f, H/Q, P\}. \tag{2.9}$$

Подчеркнем, что неканонические преобразования в гамильтоновой механике не менее важны, чем канонические, поскольку иногда они позволяют упростить формулы и по-новому взглянуть на задачу. Наиболее известный пример неканонического преобразования – это переход от q, p к комплексным каноническим переменным $z, \bar{z}$

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z} = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}, \quad \{\bar{z}, z/q, p\} = i. \tag{2.10}$$

В квантовой теории поля этим переменным сопоставляются соответственно операторы уничтожения и рождения.

2.2. Операторы. То, что уравнения движения классической гамильтоновой механики могут быть записаны с помощью операторов, было обнаружено еще в 1931 г. [11]. Перепишем (2.4) в виде

$$\dot{f} = \hat{H}_{cl} f, \quad \hat{H}_{cl} = \sum_k \omega_k(q,p)\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right) \equiv \sum_k \omega_k(q,p)\{H,\ /q_k, p_k\} \tag{2.11}$$

(введено скобочное обозначение для оператора $\{H,\ /q, p\}$: $\{H,\ /q, p\}f = \{f, H/q, p\}$). Уравнение (2.11) имеет вид уравнения движения в квантовой механике; особенность «оператора Гамильтона» $\hat{H}_{cl}$ в том, что он действует в пространстве функций, определенных на ФП [12]. Для того чтобы оператору $\hat{H}_{cl}$ придать точный смысл, необходимо указать класс функций, на которых он определен, и правила обращения с ними. Разумеется, в операторной форме можно представить воздействие на фазовые функции генераторов любых других линейных преобразований.

2.3. Комплексные канонические переменные. Покажем, что гамильтонова механика естественным образом формулируется в комплексных канонических переменных (2.10). Другими словами, классическая гамильтонова механика содержит мнимую единицу. Рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{p}^2}{m} + \gamma\tilde{q}^2\right) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2), \quad \omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}, \quad p^2 = \frac{\tilde{p}^2}{\sqrt{\gamma m}}, \quad q^2 = \tilde{q}^2\sqrt{\gamma m}, \tag{2.12}$$

и уравнениями движения

$$\dot{q} = \omega p, \quad \dot{p} = -\omega q. \tag{2.13}$$

Найдем соответствующие нормальные координаты. В переменных $x_1 = q$, $x_2 = p$ уравнения (2.13) переписываются в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \omega \hat{J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^2 = -1. \tag{2.14}$$

Вектор $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ с помощью унитарного преобразования $\mathbf{x} \to U\mathbf{x}$, где

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

превращается в вектор $\mathbf{z}(z, \bar{z}) = U\mathbf{x}(x_1, x_2)$ с компонентами (2.10), подчиняющимися уравнениям движения

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Теперь вместо двух уравнений (2.13) можно ограничиться одним

$$\dot{z} = -i\omega z, \tag{2.16}$$

поскольку второе уравнение $\dot{\bar{z}} = i\omega\bar{z}$ получается из (2.16) комплексным сопряжением. Вместо вещественной матрицы $\hat{J}$ в (2.14) появляется мнимая единица i.

Переход к комплексным каноническим переменным возможен (и полезен) в случае любого числа степеней свободы [13,14]. Например, если в (2.1) $\omega_k(q,p) = 1$, то, согласно (2.10),

$$\omega^2 = \frac{1}{i} \sum_k d\bar{z}_k \wedge dz_k \tag{2.17}$$

и

$$\dot{f} = i \sum_k \{H, /\bar{z}_k, z_k\} f. \tag{2.18}$$

Функция $f(\bar{z}, z)$ есть некоторая функция канонических переменных, т. е. некоторая динамическая характеристика системы. Известно, что переменные $z, \bar{z}$ наиболее удобны в теории гармонического осциллятора *) [15].

2.4. Вероятности в классической механике: эргодическая теория и распределение Гиббса. Вероятности в классической теории могут появиться по различным причинам, например, вследствие: 1) помещения динамической системы в термостат; 2) эргодичности динамической системы; 3) наличия внешней случайной силы. С первой причиной все ясно (простейший пример – броуновская частица). Вторая связана с обширной и глубокой *эргодической теорией* [16–21], изучающей статистические свойства детерминированных динамических систем. В действительности первая причина сводится ко второй, поскольку статистические свойства микроканонического ансамбля «система + термостат» есть следствие эргодичности данной сложной системы. В случае эргодических систем среднее любой фазовой функции $f(q,p)$ равно среднему по времени:

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(q(t), p(t))dt. \tag{2.19}$$

Для квазизамкнутой подсистемы (слабо связанной с остальной системой) это, как известно [22], порождает распределение Гиббса

$$\bar{f} = Z^{-1} \int f(q,p)G(q,p)d\Gamma, \quad G(q,p) = e^{-\beta H(q,p)}, \tag{2.20}$$

где $\beta = 1/kT_K$; T_K – температура термостата; k – постоянная Больцмана; $H(q,p)$ – функция Гамильтона; Γ – фазовое пространство подсистемы; $d\Gamma = dq_1...dq_n dp_1...dp_n$ и

$$Z = \int e^{-\beta H(q,p)} d\Gamma. \tag{2.21}$$

---

*) «Систему координат всегда можно выбрать так, как нам заблагорассудится, однако полезным и удобным этот выбор окажется только в том случае, когда выбранная система координат неким специальным образом связана с важными аспектами рассматриваемой задачи» [15, с. 39].

Функция Гамильтона должна быть такой, чтобы существовал интеграл (2.21) (финитность движения).

Итак, статистические свойства незамкнутой (или квазизамкнутой) системы, т. е. системы в термостате, можно рассматривать как следствие эргодичности некоторой более общей классической детерминированной системы.

Что касается третьей причины, то, вообще говоря, источником случайных воздействий на систему может быть не только термостат.

2.5. Распределение Гиббса и универсальная постоянная размерности действия. В статистической физике естественным образом появляется постоянная размерности действия («постоянная Планка h»). Действительно, если распределение Гиббса $G(q,p)$ (2.20) задает конечную меру в ФП системы, то интеграл (2.21) существует, а его размерность равна размерности ФП. Тогда

$$Z^{1/n} = h, \tag{2.22}$$

где h – характерная для данной системы постоянная, имеющая размерность действия. Постоянная h (2.22) зависит от особенностей динамической системы (функции Гамильтона) и температуры термостата, т. е. она не может быть универсальной. Она будет универсальной лишь в двух случаях: 1) в мире существует только данная система; 2) мир построен из каких-то простейших одинаковых систем, характеризуемых постоянной h.

2.6. Гильбертово пространство. Наличие меры в ФП позволяет ввести гильбертово пространство комплексных функций $f(q,p)$, заданных в ФП [11,12]. Действительно, для функций f, g из L^2 ($\int G|f|^2 d\Gamma < \infty$) можно ввести скалярное произведение

$$(g,f) = \int \overline{g(q,p)} f(q,p) G(q,p) d\Gamma. \tag{2.23}$$

Как подчеркивал фон Нейман [12, с. 594], функции f, g в (2.23) заданы в ФП, тогда как в квантовой механике волновые функции определены в конфигурационном (или импульсном) пространстве. Связь (2.23) с пространством Фока осталась незамеченной. Ниже (в п. 3.3) мы вернемся к этому вопросу.

2.7. Распределение Гиббса и гамильтоновы уравнения движения. В п. 2.4 было подчеркнуто, что статистические свойства сложных динамических систем появляются в рамках классической механики (в случае их эргодичности). Ниже обращается внимание на то, что классическая динамика (гамильтоновы уравнения движения) вытекают из условия стационарности равновесного состояния системы, заданного распределением Гиббса.

Предположим, что состояние системы характеризуется функцией распределения Гиббса $G(q,p)$ (2.20). Канонические переменные q, p меняются со временем:

$$q_i(t+\delta t) \approx q_i(t) + \delta q_i, \quad p_i(t+\delta t) \approx p_i(t) + \delta p_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.24}$$

Произвольное изменение канонических переменных q_i, p_i может превратить равновесное состояние в неравновесное. Вопрос: какие вариации $\delta q_i = \dot{q}_i \delta t$, $\delta p_i = \dot{p}_i \delta t$ сохраняют распределение Гиббса?

Очевидно, условие $\delta G(q,p) = 0$ эквивалентно условию

$$\delta H(q,p) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \equiv \sum_i \nabla_i H \delta \mathbf{x}_i = 0. \tag{2.25}$$

Решение уравнения (2.25) есть

$$\delta \mathbf{x}_i = \hat{J} \nabla_i H \delta t, \tag{2.26}$$

где $\hat{J}$ – антисимметричная матрица в ФП (многомерное обобщение матрицы $\hat{J}$ в (2.14) для общего случая, когда в (2.1) $\omega_k(q,p) \neq 1$), такая, что

$$\sum_i \nabla_i H \hat{J} \nabla_i H = 0. \tag{2.27}$$

Если $\omega_k(q,p) = 1$, то уравнения (2.26) идентичны уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.28}$$

(для наших целей нет необходимости рассматривать вопрос о наиболее общем решении уравнения (2.25)).

Из (2.25) ясно, что произвольную вариацию $\delta \mathbf{x}$ можно представить в виде (индекс i опускаем)

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}_\perp + \delta \mathbf{x}_\parallel, \tag{2.29}$$

где $\delta \mathbf{x}_\perp$ дается (2.26), а вариация $\delta \mathbf{x}_\parallel$ деформирует распределение Гиббса, т. е. выводит систему из равновесного состояния. Представление (2.29) потребуется в п. 3.3.

3. Гармонический осциллятор в термостате. Чтобы уяснить следствия, вытекающие из утверждений п. 2, обратимся к простейшей механической системе – гармоническому осциллятору. Оказывается, что это не только простейшая, но и, с точки зрения теории вероятностей, уникальная система.

3.1. Равновесные и неравновесные состояния. **Равновесные состояния.** Что нового вносит в динамику помещение осциллятора в термостат? Если речь идет о статистической физике, то не так много. Вместо фиксированной энергии $E = \omega A^2/2$, где $A = q_{\max}$ – амплитуда колебаний, осциллятор теперь может обладать *любой энергией*, распределение по которой задается функцией Гиббса (2.20). В комплексных переменных $z, \bar{z}$ (2.10) распределение (2.20) с гамильтонианом (2.12) порождает меру $\mu(\bar{z}, z)$ (симплектическую форму) в ФП

$$d\mu(\bar{z}, z) = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{ih} e^{-\bar{z}z/\hbar}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{\beta\omega}. \tag{3.1}$$

Распределение (3.1) стационарно, т. е. оно не меняется со временем и описывает равновесное состояние. Ничего интересного при таком усредненном описании системы не происходит.

Отметим, что (3.1) можно получить и «стереологарифмическим» проецированием сферы на комплексную плоскость [6, 7, 9], т. е. механика с симплектической формой (3.1) эквивалентна гамильтоновой механике, в которой ФП – сфера.

Неравновесные состояния. Более интересна и содержательна задача описания эволюции *неравновесных состояний* гармонического осциллятора, характеризуемых некоторой мерой $\mu_p(\bar{z}, z)$. Здесь появляется новый (размерный) параметр – *время релаксации* t_r. Пусть $t_r \gg T = 2\pi/\omega$; тогда приобретает смысл вопрос об описании эволюции системы за период времени, меньший t_r, но много больший T. Именно такой режим и будет рассматриваться. Главной особенностью задачи является необходимость принимать во внимание состояния с любой энергией, т. е. речь должна идти об эволюции некоторой фазовой функции $f(q,p)$, а не только переменных q, p

(или z, $\bar{z}$). При достаточно большом параметре t_r можно поставить вопрос об изучении средних по времени за время порядка t_r («квазиэргодическая теория»). При этом некоторые состояния движения оказываются выделенными (эргодически значимыми).

3.2. Эволюция неравновесных состояний. Что же происходит с регулярным (детерминированным) движением осциллятора после помещения его в термостат? В переменных $z, \bar{z}$ гамильтониан (2.12) записывается в виде

$$H = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} U^* U^+ \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2}(z\bar{z} + \bar{z}z), \quad (3.2)$$

где U дается (2.15), и можно ограничиться одним уравнением (2.16) (напомним, что $\bar{z}z$ имеет размерность действия). Матрица Паули σ_1 в (3.2) играет еще и роль упорядочивающего (симметризующего) оператора. Напишем уравнение движения (2.18) для фазовой функции $f(z)$

$$\dot{f} = i\{f, H/\bar{z}, z\} = -i\omega z\frac{d}{dz}f(z) = -i\frac{d}{d\ln z}f(z). \quad (3.3)$$

Обозначая $\varphi = \arg z$ ($z = |z|e^{i\varphi}$) и учитывая, что фиксация энергии эквивалентна фиксации $|z|$ ($d|z| = 0$), перепишем (3.3) в виде $\partial f/\partial t = -\omega\partial f/\partial\varphi$, т. е.

$$(\partial_t + \omega\partial_\varphi)f = 0. \quad (3.4)$$

Решением уравнения (3.4) будет любая функция $f(\varphi - \omega t)$. «Квадрируя» уравнение (3.4), получаем волновое уравнение на окружности $|z| = \mathrm{const}$

$$(\partial_t - \omega\partial_\varphi)(\partial_t + \omega\partial_\varphi)f = (\partial_t^2 - \omega^2\partial_\varphi^2)f = 0. \quad (3.5)$$

Отсюда немедленно заключаем, что (квази)стационарное движение должно быть периодическим.

К условию периодичности можно прийти разными путями. Например, движению с частотой $\alpha\omega$, где α – произвольное число, отвечает функция z^α. Но если α не есть целое число, то z^α – неоднозначная функция на плоскости z, т. е. задание z (или q, p) не характеризует однозначно состояние осциллятора (в противоречии с исходными принципами гамильтоновой механики).

Для последующего важно и другое соображение. В случае достаточно больших интервалов времени t ($t_r > t \gg \omega^{-1}$) непериодические движения будут вымирать (волна на окружности деструктивно интерферирует сама с собой). Рассмотрим в духе эргодической теории среднее от $z^\alpha(t) = z^\alpha(0)e^{-i\alpha\omega t}$ ($T = 2\pi/\omega$)

$$\overline{z^\alpha}(t) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N} z^\alpha(t + nT) = \frac{z^\alpha(t)}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N} e^{-i\alpha n2\pi} = \frac{z^\alpha(t)}{2N+1}e^{i\alpha 2\pi N}\frac{1 - e^{-i\alpha 2\pi 2N}}{1 - e^{-i\alpha 2\pi}}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что если $\alpha = N_0$ (целое число), то $\overline{z^\alpha}(t) \neq 0$ при $N \to \infty$. Во всех остальных случаях $\overline{z^\alpha}(t) = 0$.

Таким образом, при больших временах релаксации в неравновесных состояниях реализуются классические детерминированные движения с частотами ωn; они доминируют при $t \gg \omega^{-1}$, $t_r > t$.

Итак, функция $f(z)$ должна разлагаться в ряд Лорана (или в ряд Фурье). Если потребовать, чтобы $f(z)$ характеризовала любые физические состояния осциллятора, включая состояние покоя (точка $z = 0$), то нужно ограничиться рядом Маклорена и рассматривать только целые функции, для которых этот ряд сходится во всей плоскости. Положив $Z_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$, имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z_n(z). \tag{3.7}$$

Уравнение движения для Z_n есть

$$\dot{Z}_n = -i\omega n Z_n, \tag{3.8}$$

из которого следует, что Z_n отвечает движению с кратной частотой ωn. Очевидно, периодическое движение, описываемое функцией Z_n, связано с какой-то энергией, тем большей, чем больше n. Этот вопрос обсуждается в п. 3.5.

Замечание. Может возникнуть вопрос: откуда берутся классические движения с частотами ωn, $n > 1$, если их нет в классической теории? Ответ: случайные силы, которые вывели осциллятор из равновесного состояния, могли сообщить частице любые импульсы; с течением времени ($t_r \gg t \gg \omega^{-1}$) выживают только движения с кратными частотами.

3.3. Амплитуды вероятности. Выясним, какая информация о системе содержится в функциях $f(z)$. Во-первых, ясно, что речь должна идти о вероятностях, ибо данное неравновесное состояние возникло в силу случайных причин. Во-вторых, соответствующая плотность вероятности должна быть определена на фазовой плоскости z. Ситуацию можно прояснить, обратившись к фазовой плоскости (q,p). Например, если задана бесконечная мера μ, $d\mu = dqdp$, то с помощью неканонического преобразования можно перейти к мере $\mu(Q,P)$, $d\mu(Q,P) = w_1(Q)w_2(P)dQdP$, $w_{1,2} \geq 0$. Тогда, если $\int w_i(x_i)dx_i = 1$, функции w_i можно отождествить с плотностями вероятности на осях Q,P. В случае комплексных переменных $z,\bar{z}$ переход $dz \to dF(z) = f(z)dz$ автоматически влечет соответствующий переход для переменной $\bar{z}$; при этом

$$d\bar{z} \wedge dz \to |f(z)|^2 d\bar{z} \wedge dz. \tag{3.9}$$

Функцию $f(z)$ в (3.9) отождествляем с функцией (3.7). Но если $f(z)$ – целая функция, то (3.9) задает бесконечную меру. Вспомним, однако, что уже имеется мера (3.1) (мера Гиббса), задающая распределение в равновесном состоянии. Тогда для целых комплексных функций порядка $\rho \leq 2$ приходим к мере

$$d\mu_f(\bar{z},z) = |f(z)|^2 d\mu(\bar{z},z) = \frac{d\bar{z}\wedge dz}{ih}|f(z)|^2 e^{-\bar{z}z/\hbar}. \tag{3.10}$$

Подобные меры рассматриваются в статистической теории. Например, если мера μ описывает равновесное распределение, то для некоторой другой меры μ_p имеем

$$d\mu_p = (d\mu_p/d\mu)d\mu \equiv p d\mu, \quad p \geq 0;$$

мера μ_p описывает неравновесное состояние [20, с. 7] (в полном согласии с (3.10)).

Неравновесные состояния появляются как следствие «негамильтоновых вариаций» канонических переменных $\delta\mathbf{x}_{\parallel}$ в (2.29). Например, в случае малости таких вариаций

$$\omega \bar{z} z \to \omega \bar{z} z + f z + \bar{f} \bar{z} + a(z^2 + \bar{z}^2) + b(\bar{z} z)^2 + O(|z|^3),$$

экспоненты $\exp(fz) = f(z)$ в новой мере $d\mu_f$ отвечают когерентным состояниям. Можно было бы учесть и квадратичные члены: член, пропорциональный a, модифицирует когерентные состояния (превращает их в «сжатые»), ничего не меняя по существу, тогда как член, пропорциональный b, изменяет температуру термостата; подобное воздействие на систему нельзя считать малым. Члены $O(|z|^3)$ радикально меняют распределение. Итак, для малых негамильтоновых вариаций имеем

$$e^{-\beta\omega\bar{z}z} \to |f(z)|^2 e^{-\beta\omega\bar{z}z}$$

и $d\mu \to d\mu_f$. Целые функции $f(z)$ порядка $\rho \leq 2$ образуют пространство Гильберта со скалярным произведением

$$(g, f) = \int d\mu(\bar{z}, z)\overline{g(z)} f(z). \tag{3.11}$$

Это и есть пространство Фока [23, с. 72] (ср. (2.23)).

Теперь уже несложно увидеть связь $f(z)$ с амплитудами вероятности. Функции $f(z)$ удовлетворяют линейному уравнению (3.3) (или (3.5)). Следовательно, суперпозиция их независимых решений также есть решение. Далее, легко убедиться, что функции $Z_n = z^n/\sqrt{\hbar^n n!}$ образуют ортонормированный базис в пространстве Фока

$$(Z_n, Z_m) = \delta_{nm}. \tag{3.12}$$

Действительно,

$$\int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{ih} \bar{z}^n z^m e^{-\bar{z}z/\hbar} = (\hbar^{n+m})^{1/2} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi i} z^m (-\frac{d}{dz})^n e^{-\bar{z}z} = \hbar^n n! \delta_{nm} \tag{3.13}$$

(последнее равенство получается интегрированием по частям). Отсюда для функций (3.7) немедленно следует условие нормировки

$$||f||^2 = (f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1, \tag{3.14}$$

$$c_n = (Z_n, f) = \int d\mu(\bar{z}, z)\overline{Z_n(z)} f(z). \tag{3.15}$$

Из (3.10), (3.14) видно, что, во-первых, $|f(z)|^2$ можно рассматривать как плотность вероятности на плоскости z, во-вторых, числа $|c_n|^2$ задают дискретное распределение вероятности, и их можно считать вероятностями того, что осциллятор находится в состояниях Z_n, поскольку, например, при $|c_m|^2 = \delta_{nm}$ осциллятор достоверно находится в состоянии, характеризуемом фазовой функцией Z_n.

Итак, функции $f(z)$ можно отождествить с амплитудами вероятности: они являются динамическими переменными [7], подчиняются надлежащим уравнениям движения и образуют гильбертово пространство, а квадрат их модуля имеет смысл плотности вероятности.

Покажем еще, что $|(g, f)|^2$ есть вероятность найти осциллятор в «состоянии g», если его состояние описывается фазовой функцией $f(z)$. Нормированную функцию g

всегда можно считать элементом некоторого ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Тогда, разлагая f по этому базису, обнаруживаем, что (g, f) есть коэффициент разложения в ряд, т. е. аналог c_n (3.15), а квадрат его модуля, подобно $|c_n|^2$, можно интерпретировать как вероятность найти осциллятор, который описывается функцией f, в состоянии g.

Заметим, что $\bar{c}_n, c_n$ также можно рассматривать как канонические переменные. Действительно, согласно (3.8),

$$Z_n(t) = e^{-i\omega n t} Z_n(0).$$

Подставляя $Z_n(t)$ в (3.7), имеем

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega n t} Z_n(0) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) Z_n(0). \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что информация об изменении функции $f(t)$ со временем может содержаться не только в $Z_n(t)$, но и в $c_n(t)$. Легко видеть, что зависимость от времени

$$c_n(t) = c_n e^{-i\omega n t} \tag{3.17}$$

генерируется гамильтонианом

$$H = \omega \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{c}_n c_n, \tag{3.18}$$

если $\bar{c}_n, c_n$ считать комплексными каноническими переменными со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = i \sum_{n=0}^{\infty} \{f, g / \bar{c}_n, c_n\}. \tag{3.19}$$

Тогда

$$\dot{c}_n = \{c_n, H\} = -i\omega n c_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{3.20}$$

и (3.17) есть решение уравнений (3.20).

Вопрос: гамильтониан (3.18) зависит от счетного числа канонических переменных $\bar{c}_n, c_n$, хотя рассматривается система с одной степенью свободы; откуда берутся остальные степени свободы?

Во-первых, рассматривается не осциллятор сам по себе, а осциллятор в термостате, т. е. система с бесконечным числом степеней свободы. Во-вторых, фактически это «вре́менные», эффективные степени свободы, существенные лишь в период, когда система находится в неравновесном квазистационарном состоянии. В процессе перехода к равновесному состоянию все они вымирают (см. п. 3.7).

В заключение обратим внимание на еще одно крайне важное обстоятельство. Уравнение движения (3.3) и мера $d\mu_f(\bar{z}, z)$ (3.10) являются равноправными составными элементами теории. Это разрешает вопрос о механизме превращения $\psi \to |\psi|^2$ в процессе измерения. Ответственность за данную нелинейную операцию в линейной теории возлагалась на экспериментатора. Из формул (3.3) и (3.10) ясно, что линейные уравнения движения и мера $d\mu_f$ присутствуют в теории изначально, на равных основаниях. Не требуется никакого постороннего вмешательства [7].

3.4. Коммутационные соотношения. Из выражений (3.10), (3.11) автоматически вытекают коммутационные соотношения для операторов $\hat{z}, \hat{\bar{z}}$, фигурирующих в (3.3). Если $\hat{z}f(z) = zf(z)$, то результат применения к $f(z)$ оператора $\hat{\bar{z}}$ получается из формулы (3.11)

$$(g, \hat{\bar{z}}f) = \int \frac{d\bar{z}\wedge dz}{2\pi i\hbar}\overline{g(z)}(-\hbar\frac{d}{d\bar{z}})e^{-\bar{z}z/\hbar}f(z) = \int d\mu(\bar{z}, z)\overline{\hbar\frac{d}{dz}g(z)}f(z) = (\hbar\frac{d}{dz}g, f), \quad (3.21)$$

т. е.

$$\hat{\bar{z}} = \hbar\frac{d}{dz}, \qquad [\hat{\bar{z}}, \hat{z}] = \hbar. \quad (3.22)$$

Замечание. Такие коммутационные соотношения получаются для операторов в пространстве функций $f(z)$. В пространстве функций $g(\bar{z})$ мы имели бы $\hat{\bar{z}}g(\bar{z}) = \bar{z}g(\bar{z})$, $\hat{z} = \hbar d/d\bar{z}$ и вместо (3.22)

$$[\hat{z}, \hat{\bar{z}}] = \hbar. \quad (3.23)$$

Выбор пространства функций $f(z)$ связан с нежеланием усложнять формулы (писать $\bar{z}$ вместо z). Но выбор $z, \bar{z}$ (2.10) не случаен. В квантовой теории поля фигурируют операторы $\hat{a}, \hat{a}^+$ и функционалы $\Phi[a^*]$, причем именно операторы $\hat{a}^+$ являются операторами рождения ($\hat{a}^+\Phi[a^*] = a^*\Phi[a^*]$, $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar$). Коммутатор (3.23) как раз и воспроизводит правильный коммутатор для операторов $\hat{q}, \hat{p}$:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \frac{1}{2}[\hat{z} + \hat{\bar{z}}, -i(\hat{z} - \hat{\bar{z}})] = \frac{i}{2}([\hat{z}, \hat{\bar{z}}] - [\hat{\bar{z}}, \hat{z}]) = i\hbar. \quad (3.24)$$

Использование (3.22) изменило бы знак в правой части (3.24). Теперь гамильтониан (2.12), (3.2) становится оператором энергии

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2) = \frac{\omega}{2}(\hat{z}\hat{\bar{z}} + \hat{\bar{z}}\hat{z}). \quad (3.25)$$

3.5. Уравнение Шредингера. Уравнение (3.3) есть классическое уравнение движения, записанное в операторной форме. Оператор $\hat{H}_{cl} = \{H, /\bar{z}, z\}$ в (3.3) (см. (2.11), (2.18)) определен на векторах из пространства Фока, но его нельзя отождествить с «оператором энергии», т. е. с оператором, среднее значение которого $(f, \hat{H}f)$ равнялось бы среднему значению энергии E_f состояния f. Причин тому две: у него чисто мнимый спектр и ненадлежащая размерность. Обе причины связаны с игнорированием фактора $1/ih$ в симплектической форме (3.1). Оператор

$$\hat{H}_{Cl} = i\hbar\hat{H}_{Cl} = \hbar\omega z\frac{d}{dz}$$

лишен этих недостатков. Умножая классическое уравнение движения (3.3) на $i\hbar$, получаем уравнение Шредингера

$$i\hbar\dot{f} = \hat{H}_{Cl}f. \quad (3.26)$$

Спектр оператора $\hat{H}_{Cl}$

$$\hat{H}_{Cl}Z_n = \hbar\omega nZ_n$$

вещественен и дискретен. Он представляет упоминавшуюся в п. 3.2 энергию классического движения, описываемого уравнением (3.8).

Однако это лишь часть полной энергии неравновесного квазистационарного состояния осциллятора, которая должна складываться из энергии классического движения (3.8), появляющейся при описании квазиравновесных состояний с $n > 0$, и из чисто тепловой энергии. Найдем вклад тепловой энергии. Динамические переменные φ и $|z|$ независимы, поэтому следует ожидать, что данный вклад будет универсальным, т. е. одним и тем же для всех n ($E_n = \hbar\omega n + E_0$). Но при $n = 0$ случайная сила (сила Ланжевена) меняет только импульс, и естественно предположить, что постоянная E_0 равна средней кинетической энергии частицы, т. е.

$$E_0 = \frac{1}{2}kT_K = \frac{1}{2}\frac{\omega}{\beta\omega} = \frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{3.27}$$

Заключаем, что энергия гармонического осциллятора в термостате с большим временем релаксации (квазиравновесное состояние) квантована:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{3.28}$$

Результат (3.27) автоматически следует из выражения для $\hat{H}$ (3.25), поскольку, ввиду (3.22), $\hat{H} = \hbar\omega(zd/dz + 1/2) \equiv \hat{H}_{Cl} + \hbar\omega/2$. Тем самым проясняется смысл «энергии нулевых колебаний» $\hbar\omega/2$: это результат воздействия термостата.

Итак, именно термостат (хаос) выполняет квантующую функцию. Не лишен любопытства и тот факт, что отождествление классического уравнения движения (3.3) с уравнением Шредингера (3.26) возможно лишь при $h \neq 0$.

3.6. Переход к конфигурационному пространству. Встает очевидный вопрос: как от теории, сформулированной на комплексной плоскости z, перейти к теории на оси координат q? Аналитические функции определяются своими значениями на границе, поэтому, казалось бы, ввиду аналитичности функций $f(z)$, цель достигается переходом $z \to q$. Но этого делать нельзя. Дело в том, что определяющая меру экспонента $e^{-\bar{z}z}$ не есть аналитическая функция. Поскольку функции на комплексной плоскости принадлежат гильбертову пространству, речь должна идти о гильбертовом пространстве функций $\psi(q)$ на оси q. Собственные функции оператора (3.25) есть функции Эрмита (положено $\omega = 1$)

$$\mathcal{H}_n(q) \equiv \langle n|q\rangle = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(q) e^{-q^2/2}, \tag{3.29}$$

где $H_n(q)$ – полиномы Эрмита. Функции (3.29) образуют ортонормированный базис. Обозначая $Z_n(\bar{z}) = \langle\bar{z}|n\rangle$, получаем ядро унитарного оператора $U(\bar{z}, q)$, связывающего оба пространства:

$$\begin{gathered} U(\bar{z}, q) = \langle\bar{z}|q\rangle \equiv \sum_n \langle\bar{z}|n\rangle\langle n|q\rangle = \sum_n Z_n(\bar{z})\mathcal{H}_n(q) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{\bar{z}^2+q^2}{2} + \sqrt{2}q\bar{z}}, \\ \langle q|z\rangle = U(q, z) = \overline{U(\bar{z}, q)}. \end{gathered} \tag{3.30}$$

Функции $U(\bar{z}, q)$ обладают следующими свойствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq U(\bar{z}, q) U(q, z) = e^{\bar{z}z};$$

экспонента $e^{\bar{z}z}$ есть ядро единичного оператора для скалярного произведения с мерой (3.1) (при $\hbar = 1$) – «комплексная δ-функция». Далее,

$$\int d\mu(\bar{z}, z) U(q, z) U(\bar{z}, q') = \delta(q - q')$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq U(\bar{z}, q) \mathcal{H}_n(q) = Z_n(\bar{z}), \quad \int d\mu(\bar{z}, z) Z_n(z) U(\bar{z}, q) = \mathcal{H}_n(q),$$

т. е. функции $Z_n(z)$ отвечают собственным функциям гармонического осциллятора на оси q с энергией E_n.

Поучителен переход от ядра «классического оператора» (3.2) $\bar{z}ze^{\bar{z}z}$ ($\omega = 1$) к ядру оператора Гамильтона на оси q. Имеем

$$\int d\mu(\bar{z}, z) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta) \langle q|z\rangle \bar{z}\zeta e^{\bar{z}\zeta} \langle \bar{\zeta}|q'\rangle = \int d\mu(\bar{z}, z) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta) (\sqrt{2}q - z)(\sqrt{2}q' - \bar{\zeta}) \langle q|z\rangle e^{\bar{z}\zeta} \langle \bar{\zeta}|q'\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dq} - q\right)\left(\frac{d}{dq'} - q'\right) \int d\mu(\bar{z}, z) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta) \langle q|z\rangle e^{\bar{z}\zeta} \langle \bar{\zeta}|q'\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dq} - q\right)\left(\frac{d}{dq'} - q'\right) \delta(q - q') =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 - 1\right) \delta(q - q'). \tag{3.31}$$

Здесь, как и в (3.13), производилось интегрирование по частям и использовались равенства

$$\frac{d}{dz}\langle q|z\rangle = (\sqrt{2}q - z)\langle q|z\rangle, \quad \frac{d}{dq}\langle q|z\rangle = (\sqrt{2}z - q)\langle q|z\rangle \tag{3.32}$$

и сопряженные им. Сравнивая (3.31) с (3.25), (3.28), убеждаемся в правильности проведенных вычислений.

3.7. Переход системы в равновесное состояние. В данной модели описание перехода системы в равновесное состояние не менее важно, чем описание ее эволюции в квазиравновесном режиме. Допустим, что причиной перехода к равновесному распределению является трение. В случае осциллятора соответствующее уравнение движения выглядит так:

$$\ddot{q} + \alpha\dot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{3.33}$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент трения. При $\alpha \to 0$ общее решение уравнения (3.33) дается суммой

$$q(t) = c_1 e^{-i(\omega - i\alpha/2)t} + c_2 e^{i(\omega + i\alpha/2)t}, \tag{3.34}$$

откуда следует, что при $t \to \infty$ $q(t) \to 0$, т. е. *классическое* (детерминированное) движение вымирает. Не будь термостата, частица оказалась бы в состоянии покоя ($q = p = 0$). Тепловой резервуар обеспечивает нетривиальное распределение по энергии (распределение Гиббса). Очевидно, $t_r \sim 1/\alpha$. Учет затухания для развиваемой идеологии (о связи между классической и квантовой теориями) не столь важен. Он окажется существен при переходе к более сложным структурам, таким, как цепочка осцилляторов, моделирующая пространство. Тогда наличие трения будет означать, что «квантовый режим» в одномерном пространстве имеет преходящий характер и система нестационарна, т. е., в конце концов, она перейдет в равновесное состояние.

3.8. Стрела времени. Из (3.4) следует, что волна движется по окружности $|z|$ =const «направо» (в сторону возрастания φ). Волны, движущиеся в противоположном направлении, отсутствуют. Это может показаться странным – ведь термостат должен как-будто воздействовать на частицу в обоих направлениях. Дело в том, что здесь речь идет о перемещении точки не в конфигурационном, а в фазовом пространстве. Знак приращения «координаты» (угла φ) обусловлен знаком симплектической формы, т. е. знаком при скобке Пуассона. Это значит, что направление движения определяется ориентацией фазовой плоскости. Поскольку такая ориентация задается изначально, существует только волна $f(\varphi - \omega t)$, движущаяся «направо».

Отметим, что данный факт вместе с тем означает, что изменение ориентации ФП влечет изменение «стрелы времени». Действительно, уравнение (2.4) инвариантно относительно преобразований

$$\omega_k(q,p) \to -\omega_k(q,p), \quad t \to -t. \tag{3.35}$$

Отсюда заключаем: задание ориентации фазового пространства задает стрелу времени. Между тем известно, что классические уравнения движения инвариантны относительно обращения времени. Причина этого очевидна: информация теряется или при «квадрировании» (см. (3.5)), или при исключении импульса из уравнений (2.13).

Примечателен и еще один факт. Симплектическую форму можно задать только на ориентируемом многообразии. Ее, например, нельзя задать на проективной плоскости или сфере S^4 [24, с. 16]. Последнее обстоятельство может представлять интерес в связи с тем, что в теории с лагранжианом, зависящим не только от скоростей, но и от ускорений, ФП материальной точки в одномерном пространстве 4-мерно. Следовательно, в данной модели уже нельзя совершить неканоническое преобразование к сфере S^4, как в случае 2-мерного ФП [6–9], – гамильтоновой динамики на сфере S^4 просто не существует.

3.9. Детерминизм и хаос. Эргодические детерминированные динамические системы обладают статистическими свойствами (см. [16–21] и п. 2.4). Но верно и обратное: хаос порождает распределение Гиббса (для осциллятора) и, следовательно, классическую гамильтонову динамику (см. п. 2.7).

Рассмотрим случайные перемещения частицы по оси x. Пусть $F(x-x', t-t')$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке x в момент времени t, если в момент t' она находилась в точке x'. Функция F удовлетворяет уравнению

$$F(x-y,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' F(x-x', t-t') F(x'-y, t') \tag{3.36}$$

(стационарный процесс в однородном пространстве). Пусть частица совершает последовательность n переходов, каждый за время τ, т. е. $x_1 = x(\tau) - x(0), \ldots, x_n = x(n\tau) - x((n-1)\tau)$. Тогда, если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = p \tag{3.37}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + \ldots + x_n - np)^2}{n} = \sigma^2, \tag{3.38}$$

то для $\xi = (x_1 + ... + x_n - np)/\sigma\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ имеет место распределение с плотностью вероятности [25, с. 285]

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}. \tag{3.39}$$

Данная предельная теорема обобщается на пространства произвольной конечной размерности.

Рассмотрим случайные перемещения точки в фазовой плоскости (q, p). Соответствующее предельное распределение дается функцией

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(p^2+q^2)/2}, \tag{3.40}$$

т. е. совпадает с распределением Гиббса для гармонического осциллятора (в надлежащих единицах). Но, как показано в п. 2.7, вариации канонических переменных, сохраняющие распределение Гиббса, подчиняются уравнениям Гамильтона.

Заключаем: чисто стохастический процесс (случайные перемещения точки в фазовой плоскости) порождает распределение Гиббса, последнее же для неравновесных состояний с большим временем релаксации допускает классическое движение, описываемое уравнениями Гамильтона.

Итак, связь между строго детерминированной и хаотической динамиками не столь проста, как может показаться на первый взгляд: детерминированная динамика порождает хаос (см. эргодическую теорию), а хаотическая динамика – детерминированную гамильтонову механику (см. п. 2.7).

4. Цепочка гармонических осцилляторов в термостате. Осциллятор в термостате дает простейший пример связи между классической и квантовой механиками. Для физики важен более сложный пример – цепочка осцилляторов в термостате. Теперь каждый осциллятор цепочки квантован, поэтому следует ожидать, что в непрерывном пределе получится одномерная квантовая теория поля. Цепочка конечной длины моделирует бозонную струну.

4.1. Цепочка взаимодействующих осцилляторов. Уравнение движения для цепочки, характеризуемой лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \sum_n [m\dot{q}_n^2 - \tilde{\gamma}(q_n - q_{n-1})^2 - \gamma q_n^2] \tag{4.1}$$

(постоянная $\tilde{\gamma} > 0$), в непрерывном пределе совпадает с уравнением Клейна–Фока–Гордона (КФГ)

$$(\Box - M^2)\varphi = 0,$$

отвечающим лагранжиану

$$L = \frac{1}{2} \int dx(\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2 - M^2\varphi^2) \tag{4.2}$$

(здесь $\varphi(x, t)$ есть предельное значение q_n, когда расстояния между соседними осцилляторами $a \to 0$, а $n \to \infty$ так, что $an \to x$, $a^2\tilde{\gamma}/m \to 1$, $\gamma/m = M^2$ и $q_n\sqrt{m/a} \to \varphi(x, t)$; $\varphi' = d\varphi/dx$). Лагранжиан (4.2) задает одномерную теорию скалярного поля. Ему отвечает допредельный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{p_n^2}{m} + \tilde{\gamma}(q_n - q_{n-1})^2 + \gamma q_n^2 \right). \tag{4.3}$$

В нормальных координатах $u(k), p(k)$

$$q_n = \int_{-\Delta}^{\Delta} dk u(k)\varphi_n^*(k), \quad p_n = \int_{-\Delta}^{\Delta} dk p(k)\varphi_n(k), \quad \varphi_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} e^{\frac{i\pi n}{\Delta}k}, \quad \Delta = \frac{\pi}{a}, \tag{4.4}$$

где $\int_{-\Delta}^{\Delta} dk\varphi_n^*(k)\varphi_{n'}(k) = \delta_{nn'}$, гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\Delta}^{\Delta} dk\left(\frac{p(k)p(-k)}{m} + m\omega^2(k)u(k)u(-k)\right) = \frac{1}{2}\int_{-\Delta}^{\Delta} dk\omega(k)\left(a^*(k)a(k) + a(k)a^*(k)\right); \tag{4.5}$$

здесь $\omega^2(k) = \gamma/m + 4(\tilde{\gamma}/m)\sin^2(\pi k/2\Delta)$, $u(k) = (a^*(k) + a(-k))/\sqrt{2m\omega(k)}$, $p(k) = i(a^*(k) - a(-k))\sqrt{m\omega(k)/2}$.

В связи с формулами (4.2), (4.5) отметим два важных обстоятельства.

Во-первых, предельная теория $(a \to 0)$ обладает явной релятивистской инвариантностью. Пространство (x, t) есть пространство Минковского M^2. Это же верно и в отношении плоскости $(\omega(k), k)$: $\omega^2(k) - k^2 = \gamma/m$. Следовательно, все осцилляторы в (4.5) одинаковы и переводятся друг в друга преобразованием Лоренца; они находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы Лоренца.

Во-вторых, гамильтониан (4.5) представляет набор невзаимодействующих осцилляторов, каждому из которых присуща своя частота $\omega(k)$.

Выясним в заключение, как меняются со временем $a(k) = \sum_n a_n\varphi_n(k)$, где $a_n = z_n = (q_n + ip_n)/\sqrt{2}$. Учитывая, что $\{u(k), p(k')\} = \delta(k - k')$, находим скобки Пуассона $\{a(k), a^*(k')\} = -i\delta(k - k')$. Вместо уравнения движения (2.16) имеем

$$\dot{a}(k,t) = -i\omega(k)a(k,t), \quad a(k,t) = e^{-i\omega(k)t}a(k,0), \tag{4.6}$$

и, согласно (4.4),

$$q_n(t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dk}{dku} u(k)\varphi_n^*(k) \to \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dk}{\sqrt{2m\omega(k)2\Delta}}[|a(k,0)|e^{i(\varphi_k + kx - \omega(k)t)} + H.c] \tag{4.7}$$

(по аналогии с п. 3.2 введен угол φ_k: $a(k,t) = |a(k,t)|\exp(i\varphi_k)$). Из (4.7) видно, что вместо кругового движения в фазовой плоскости

$$z(t) = |z(0)|e^{i(\varphi - \omega t)} \tag{4.8}$$

имеем спиральное

$$a(k,t) = |a(k,0)|e^{i(\varphi_k + kx - \omega(k)t)}. \tag{4.9}$$

Движение происходит по спирали, навитой на цилиндр радиуса $|a(k,0)|$, поскольку из двух ортогональных координатных направлений на цилиндре

$$\mathbf{y}_+ = \varphi\mathbf{e}_\varphi + kx\mathbf{e}_x = y_+\mathbf{e}_+, \quad \mathbf{y}_- = kx\mathbf{e}_\varphi - \varphi\mathbf{e}_x = y_-\mathbf{e}_-$$

в (4.9) фигурирует только y_+ (здесь $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\pm$ – единичные орты на цилиндре: ортогональный оси цилиндра, параллельный оси цилиндра и в направлении векторов $\mathbf{y}_\pm$).

Итак, для осцилляторов $a(k)$ классическое движение по окружности приобретает составляющую вдоль оси x: $a = |a|\exp(iy_+ - i\omega t)$.

4.2. Цепочка осцилляторов в термостате. Как следует из п. 2, 3, помещение классической системы в термостат порождает гильбертово пространство со скалярным произведением (2.23). В случае гармонического осциллятора следствием было появление постоянной Планка h и пространства Фока. При переходе к цепочке осцилляторов оба этих важнейших утверждения, казалось бы, теряют силу. В самом деле, поскольку $\hbar = 1/\beta\omega$, а $\omega \to \omega(k)$, то $\hbar \to \hbar_k$, т. е. постоянная размерности действия теряет универсальность. Более того, мера в пространстве Фока задается экспонентой $\exp(-\int dka^*(k)a(k)/\hbar)$, отличной от функции Гиббса $\exp[-\beta\int dk\omega(k)a^*(k)a(k)]$. В действительности первое обстоятельство несущественно, поскольку, как мы видели, осциллятор с волновым вектором k получается из базового осциллятора с частотой $\omega(0) = \omega$ преобразованием Лоренца, т. е. переходом к другой системе отсчета. Универсальность постоянной Планка h сохраняется. В отношении же меры Гиббса следует обратить внимание на следующее. В квантовой теории поля имеется определенный произвол в выборе операторов $\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)$. Например, в одномерной теории можно задаться коммутатором $[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = \delta(k-k')$, а можно выбрать релятивистски инвариантное выражение $[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = 2\omega(k)\delta(k-k')$. Очевидно, операторы $\hat{a}(k)$ второго коммутатора получаются из операторов первого умножением их на $\sqrt{\omega(k)}$.

Воспользуемся этим обстоятельством для преобразования меры Гиббса. В гамильтониане (4.5) перейдем к новым переменным $\tilde{a}(k) = \sqrt{\lambda_k}a(k)$, $\lambda_k = \omega(k)/\omega$. В новых канонических переменных гамильтониан перепишется так:

$$H = \omega\int_{-\Delta}^{\Delta} dk\tilde{a}^*(k)\tilde{a}(k), \tag{4.10}$$

и мера Гиббса в фазовом пространстве приобретет вид

$$\prod_k \lambda_k^{-1}\beta\omega\frac{d\tilde{a}^*(k)\wedge d\tilde{a}(k)}{2\pi i}e^{-\beta\omega\int dk\tilde{a}^*(k)\tilde{a}(k)}; \tag{4.11}$$

здесь опущены пределы интегрирования. Бесконечный множитель $\prod\lambda_k^{-1}$ убирается выбором нормировки, а соответствующее изменение функционала $\Phi[a] \to \Phi[\lambda^{-1/2}\tilde{a}]$ эквивалентно его переобозначению $\Phi[\lambda^{-1/2}\tilde{a}] = \tilde{\Phi}[\tilde{a}]$. В последующем тильду опускаем. Итак, для случайных величин (функционалов $\Phi[a^*]$) мера (4.11) позволяет задать скалярное произведение

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int\prod_k\frac{da^*(k)\wedge da(k)}{ih}e^{-\int dka^*(k)a(k)/\hbar}\Phi_1[a]\overline{\Phi_2[a]}. \tag{4.12}$$

Согласно (4.12), операторы $\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)$ $(\hat{a}^+(k)\Phi[a^*] = a^*(k)\Phi[a^*],\quad \hat{a}(k)\Phi[a^*] = \hbar\delta\Phi[a^*]/\delta a^*(k))$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = \hbar\delta(k-k')$, а оператор Гамильтона дается интегралом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int_{-\Delta}^{\Delta} dk\omega(k)(\hat{a}^+(k)\hat{a}(k) + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k)). \tag{4.13}$$

В пределе при $a \to 0$, $\Delta \to \infty$ формула (4.12) задает скалярное произведение в пространстве Фока одномерной квантовой теории поля. Каждый осциллятор в цепочке квантован, поэтому не удивительно, что такая цепочка моделирует одномерную квантовую теорию поля.

Резюмируем: одномерная квантовая теория скалярного поля моделируется цепочкой классических осцилляторов в термостате. Появляется новая случайная сила, которая выводит осцилляторы цепочки из равновесных состояний – это воздействие их соседей.

5. Заключение. Отметим наиболее важные моменты работы. Бросается в глаза то, что классической гамильтоновой механике присущи наиболее характерные атрибуты квантовой теории: операторы и комплексные числа. Стохастизация теории (термостат, распределение Гиббса) ведет к появлению остальных необходимых элементов квантового описания: постоянной размерности действия, вероятности, гильбертова пространства. Отсюда еще далеко до реальной физики – электрон не есть материальная точка, электрон не находится в термостате. Квантовое описание микромира связано с обращением к планковским расстояниям. Привлечение термостата не противоречит никаким экспериментальным данным. Выясняется выдающаяся роль гармонического осциллятора: так как все поля представляют из себя наборы гармонических осцилляторов, постоянная размерности действия для осциллятора становится универсальной и допускает отождествление с постоянной Планка. Существование различных полей может поставить под сомнение тезис об универсальности осцилляторов. Но это не так. Все поля есть возбуждения суперструн, которые можно строить из одних и тех же осцилляторов. Сеть из суперструн моделирует пространство; концепции пространства и поля возникают одновременно как разные аспекты этой фундаментальной структуры. Например, цепочка осцилляторов образует одномерное пространство, а распространяющиеся по цепочке возбуждения и есть движущиеся в нем волны (кванты, частицы). Таким образом, на данном пути представляется возможным построить единую теорию мира: осуществить объединение всех полей, включая гравитацию, на базе простой модели пространства. При этом автоматически появляется релятивистская квантовая теория. А в основе всего построения лежит нерелятивистский осциллятор в термостате.

Остановимся на некоторых наиболее примечательных особенностях классической и квантовой теорий.

Квантовая механика поражает сочетанием казалось бы несовместимых черт: когерентность, причинность, стохастичность (предсказываются лишь вероятности событий). Предлагаемая модель объясняет этот феномен следующим образом. Согласно п. 3, эволюция неравновесного состояния осциллятора определяется: 1) причинным, классическим уравнением движения (3.4) для угла φ и 2) распределением Гиббса для $|z|$. Другими словами, по одной из координатных линий в фазовой плоскости движение чисто классическое, детерминированное, а по другой – чисто стохастическое. Причинный характер уравнения эволюции волновой функции объясняется тем, что она, во-первых, есть динамическая переменная, а во-вторых, связана с классическим движением в фазовой плоскости.

Гармонический осциллятор играет ключевую роль во всем построении. Выбор осциллятора в качестве базового элемента модели может показаться произвольным. В действительности гармонический осциллятор – не только некий простейший объект, это уникальный объект: распределение Гиббса с гамильтонианом (2.12) появляется как результат случайных перемещений частицы в фазовой плоскости (хорошо известный результат теории вероятностей). Можно сказать, что гармонический осциллятор есть порождение хаоса.

Гамильтонова механика, как выясняется, сосуществует с хаосом. Согласно (2.29), именно вариации канонических переменных $\delta x_{\perp}$, не выводящие систему из равновесного состояния (сохраняющие распределение Гиббса), подчиняются уравнениям Гамильтона (2.26).

Отметим также следующие особенности модели.

Пространство есть структура, сеть, построенная из суперструн. Сами суперструны строятся из классических осцилляторов [8]. Модель, с одной стороны, объясняет, почему в каждой «точке» пространства можно возбудить любые поля, а с другой – вносит в теорию необходимый элемент дискретности.

Стрела времени есть следствие гамильтонова характера классических уравнений движения (см. п. 3.7): изменение ориентации фазовой плоскости (изменение знака симплектической формы) меняет направление стрелы времени. Данный факт приобретает фундаментальный характер в связи с тем, что он имеет место для гармонического осциллятора, последний же является основой всех физических структур, включая пространство.

Затухание упорядоченного движения, т. е. переход всех квантовых состояний в основное (вакуум) – важное и весьма характерное свойство данной модели. Вселенная есть гигантская «квантовая флуктуация», и волновые функции всех объектов Вселенной стремятся к нулю. Это, однако, не означает нарушение закона сохранения энергии, понимаемого в широком смысле: квантовая механика описывает эволюцию квазиравновесных состояний системы и их энергия, в конце концов, передается термостату. Возможно, отчасти этим объясняется ослабление излучения далеких звезд (расстояния порядка 10^{10} световых лет), приписываемое наличию «космической пыли» [26]. Отсюда же следует, что Вселенная со временем должна *исчезнуть*; не просто перейти в термически равновесное состояние материи («тепловая смерть»), а отдать энергию термостату и перейти в состояние с наименьшей энергией (вакуум) – «квантовая смерть». Отсюда получается оценка времени релаксации (времени жизни Вселенной) $t_R \geq 10^{17}$ с. По-видимому, имеет смысл ввести трение в уравнения космологии.

Итак, главная особенность модели – одновременное появление в рамках нерелятивистской классической теории *полей и пространства, квантовой механики и группы Лоренца*.

6. Приложение. Появление в теории трения ставит вопрос о включении его в механику Гамильтона. В случае свободной частицы можно перейти от функции Гамильтона $p^2/2$ к $H(t) = e^{-\alpha t}p^2/2$ [10]. Тогда из гамильтоновых уравнений движения $\dot{q} = e^{-\alpha t}p$, $\dot{p} = 0$ получаем стандартное уравнение $\ddot{q} + \alpha\dot{q} = 0$. Применение этой идеи к осциллятору также дает разумный результат: $H(t) = \omega_0 e^{-\alpha t}(p^2 + q^2)/2$, $\dot{q} = \omega_0 e^{-\alpha t}p$, $\dot{p} = -\omega_0 e^{-\alpha t}q$, или, $\dot{z} = -i\omega_0 e^{-\alpha t}z$, т.е. движение затухает.

Обратим внимание на то, что имеется альтернативная возможность модификации динамики – изменение симплектической формы. Например, полагая $\omega^2 = e^{\alpha t}dq \wedge dp$, имеем для скобки Пуассона $\{f,g\} = e^{-\alpha t}i\{f, g/\bar{z}, z\}$, откуда находим уравнение движения ($H = \omega_0\bar{z}z$): $\dot{z} = \{z, H\} = -i\omega_0 e^{-\alpha t}z$. Отметим также, что эффективно это ведет к зависимости постоянной Планка h от времени (см. (3.1)): $h(t) = e^{\alpha t}h(0)$.

Summary

Prokhorov L. V. Quantum mechanics and kinetics.

The relations between Hamiltonian and quantum mechanics are studied. It is shown that classical mechanics possesses all specific features of quantum theory: operators, complex variables, probabilities (in case of ergodic systems). The Planck constant and the Fock space appear after putting a dynamical system into a thermal bath. For a harmonic oscillator in a thermal bath it is shown that the probability amplitudes are the phase functions describing deviations from the

equilibrium state when the time of relaxation is large. A chain of such oscillators models both the one-dimensional space (or string), and one-dimensional quantum field theory. Then, if space is a superstring network the Universe has finite lifetime.

Литература

1. *'t Hooft G.* //Class. Quant. Grav. 1999. Vol. 16. P. 3263–3279. **2**. *Markopoulou F., Smolin L.* Quantum theory from quantum gravity // gr-qc/0311059. **3**. *Minic D., Tze C. H.* //Phys. Rev. 2003. Vol. D 68. P. 061501–061505 (hep-th/0401028). **4**. *Прохоров Л. В.* //Вестн. С.-Петерб.ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1999. Вып. 4 (№ 25). С. 136–137. **5**. *Прохоров Л. В.* //Вестн. С.-Петерб.ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 2000. Вып. 4 (№ 28). С. 3–12. **6**. *Прохоров Л. В.* О принципиальных проблемах квантовой механики. СПб., 2002. **7**. *Прохоров Л. В.* Квантовая механика – проблемы и парадоксы. СПб., 2003. **8**. *Прохоров Л. В.* Пространство как сеть. СПб., 2004. **9**. *Прохоров Л. В.* //Ядерная физика. 2004. Т. 67. С. 1322–1334. **10**. *Прохоров Л. В., Шабанов С. В.* Гамильтонова механика калибровочных систем. СПб., 1997. **11**. *Koopman B. O.* //Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1931. Vol. 17. P. 315–318. **12**. *Neumann J., v.* //Ann. Math. 1932. Bd 33. S. 587–642. **13**. *Strocchi F.* //Rev. Mod. Phys. 1966. Vol. 38. P. 36–40. **14**. *Mc Ewan J.* //Found. Phys. 1993. Vol. 23. P. 313–327. **15**. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой теории поля / Пер. с англ.; Под ред. А. А. Соколова. М., 1971. **16**. *Халмош П.* Лекции по эргодической теории / Пер. с англ. и доп. С. В. Фомина. М., 1959. **17**. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы / Пер. с англ. Б. М. Гуревича. М., 1978. **18**. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М., 1980. **19**. *Синай Я. Г.* Современные проблемы эргодической теории. М., 1995. **20**. *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М., 1996. **21**. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the theory of dynamical systems. Cambridge, 1995. **22**. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М., 1976. **23**. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии / Пер. с англ. А. А. Кириллова. Череповец, 2000. **24**. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2 т. Ижевск, 1999. Т. 1. **25**. *Лоэв М.* Теория вероятностей / Пер. с англ.; Под ред. Ю. В. Прохорова. М., 1962. **26**. *Goobar A., Bergstroem L., Moertsell E.* //Astron. & Astrophys. 2002. Vol. 384. P. 1–11.

Статья поступила в редакцию 22 марта 2005 г.