$$\|C - A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \sup_{|x|=1} |(C(t) - A(t))x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а в качестве δ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{32n^2} = \frac{\varepsilon}{8m^2}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \subseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ является прямым следствием включения $\mathcal{H}^m \subset \mathcal{M}^m$. Докажем включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \supseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$.

Возьмем произвольные $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ и $\varepsilon > 0$. Для данного ε возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{8m^2} > 0$ (см. доказательство леммы 2). По определению предельного спектра для данного δ найдутся система $B \in \mathcal{M}_\delta(\mathcal{A})$ и решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \delta$.

Согласно лемме 2, для любой системы $B \in \mathcal{M}_\delta(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.

Получили, что для произвольного ε нашлись система $C \in \mathcal{H}_\varepsilon(A)$ и решение $x \in S_*(C)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \delta < \varepsilon$. Отсюда вытекает условие $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$, а с ним и доказываемое включение. Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.Н. Сергееву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. **76**, № 1. 149–172.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
3. *Миллионщиков В.М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**, № 10. 1775–1784.
4. *Былов Б.Ф., Изобов Н.А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения. 1969. **5**, № 10. 1794–1803.
5. *Веременюк В.В.* Некоторые вопросы теории устойчивости показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1982. **18**, № 2. 205–219.
6. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.
7. *Изобов Н.А.* О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. **1**, № 4. 469–477.
8. *Барабанов Е.А.* Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. **22**, № 11. 1843–1853.

Поступила в редакцию
15.10.2014

УДК 514.774.8+515.124.4+519.17+519.224.22

КРИВИЗНА РИЧЧИ ВЗВЕШЕННОГО ДЕРЕВА

О. В. Рублёва[1]

В статье представлена формула грубой кривизны Риччи для взвешенных деревьев со случайным блужданием на множестве их вершин. В качестве следствия получен критерий о восстановлении топологии бинарного дерева по матрице кривизн Риччи.

Ключевые слова: взвешенные деревья, кривизна Риччи, грубая кривизна Риччи, расстояние транспортировок, случайные блуждания на метрических пространствах.

A formula of coarse Ricci curvature for weighed trees with a random walk on vertex set is presented in the paper. A criterion of restoration of binary trees topology from the Ricci curvature matrix is obtained.

Key words: weighed trees, Ricci curvature, coarse Ricci curvature, transportation distance, random walk on metric spaces.

---

[1] *Рублёва Ольга Владимировна* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: rubleva-olga91@mail.ru.

1. Введение и основные понятия. Кривизна Риччи играет важную роль в геометрическом анализе римановых многообразий, в частности отдельный интерес для исследований представляют многообразия с неотрицательной кривизной Риччи и многообразия, имеющие ограниченную снизу кривизну Риччи (см., например, [1]). Внимание к данной проблеме привлекли и знаменитые работы Г. Я. Перельмана о потоках Риччи и гипотезе Пуанкаре [2, 3].

Понятие кривизны Риччи для метрических пространств общего вида впервые возникло в работе Д. Бакри и М. Эмери [4]. Ими была также определена так называемая "нижняя граница" кривизны Риччи на классе измеримых метрических пространств. Были получены свойства измеримых метрических пространств, необходимые для существования "нижней границы" кривизны Риччи на этих пространствах. В 2009 г. в работе [5] было дано определение грубой кривизны Риччи на цепях Маркова, которое можно использовать для метрических пространств, порожденных графами.

Ф. Чанг и Ш. Яу [6] впервые ввели определение кривизны Риччи для графов в 1996 г. А в 2011 г. в работе [7] было модифицировано определение Оливье для кривизны Риччи цепей Маркова на метрических пространствах [5].

Дадим определения, необходимые для формулировки основных результатов.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, где V — множество вершин, E — множество ребер. *Длиной пути*, соединяющего две вершины графа, назовем количество ребер, входящих в этот путь. *Расстоянием между двумя вершинами* в графе назовем длину кратчайшего пути, т.е. пути наименьшей возможной длины.

Распределением вероятности на множестве V назовем функцию $m\colon V \to [0,1]$, такую, что $\sum_{x\in V} m(x) = 1$. Введем функцию расстояния транспортировок $W(m_1, m_2)$, которая будет измерять расстояние между двумя распределениями вероятностей m_1 и m_2:

$$W(m_1, m_2) = \sup_{f\in \mathrm{Lip}\,1} \sum_{x\in V} f(x)(m_1(x) - m_2(x)),$$

где $\mathrm{Lip}\,1$ — множество 1-липшицевых функций.

Далее будем рассматривать функции распределения $m_x^\alpha\colon V \to [0,1]$, называемые *функциями случайного блуждания*, специального вида:

$$m_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x = y;\\ \frac{1-\alpha}{\deg(x)}, & \text{если } x \sim y;\\ 0, & \text{если } x \nsim y \text{ и } x \neq y, \end{cases}$$

где запись $x \sim y$ обозначает, что вершины x и y смежны.

Определим *α-кривизну Риччи* формулой

$$k_\alpha(x, y) = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d(x, y)}.$$

При $\alpha = 0$ величина $k_0(x, y)$ — кривизна Риччи–Оливье. *Кривизной Риччи* назовем функцию

$$k(x, y) := \lim_{\alpha\to 1} \frac{k_\alpha(x, y)}{1-\alpha}.$$

В настоящей заметке получена формула для взвешенных бинарных деревьев, вычисляющая кривизну Риччи между любыми двумя вершинами дерева, а также некоторые следствия из нее. В частности, оказывается, что структура бинарного дерева с постоянной весовой функцией может быть восстановлена по матрице попарных кривизн Риччи между вершинами этого дерева.

2. Основные результаты. Обобщим понятие кривизны Риччи–Оливье на случай деревьев с неотрицательными весами на ребрах.

Определение. Пусть $G = (V, E)$ — некоторое дерево, где V — множество вершин, а E — множество ребер графа G. Зададим неотрицательную функцию $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$, обычно называемую *весовой*, тогда пара $\mathcal{G} = (G, \omega)$ называется *взвешенным деревом* (см. [8]).

Пусть d_ω — функция, измеряющая вес пути между вершинами взвешенного дерева $\mathcal{G} = (G, \omega)$, тогда α-кривизну Риччи для взвешенного дерева определим формулой

$$k_\alpha(x, y) = 1 - \frac{W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{d_\omega(x, y)}.$$

Кривизна Риччи для взвешенного дерева будет иметь вид $k(x, y) := \lim_{\alpha\to 1} \frac{k_\alpha(x,y)}{1-\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево, т.е. связный ацикличный граф, ω — весовая функция, d_ω — функция, измеряющая вес пути между вершинами дерева. Тогда кривизна Риччи между любыми вершинами дерева G вычисляется по следующей формуле:*

$$k(x,y) = \frac{1}{d(x,y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z \cdot d(z,x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z\sim y} k_z \cdot d(z,y)\Big),$$

где $k_z = 1$, если ребро zx входит в путь xy, и $k_z = -1$, если не входит.

Определение. Бинарным деревом назовем дерево, все вершины которого степени 1 или 3.

Следствие. *Рассмотрим бинарное дерево $G = (V, E)$, в котором вес каждого ребра равен 1. Тогда*

1) *кривизна Риччи между вершинами x и y степени 1, для которых $d(x,y)=n$, равна $k(x,y)=\frac{2}{n}$;*

2) *кривизна Риччи между вершинами x и y степени 1 и 3 соответственно, для которых $d(x,y) = n$, равна $k(x,y) = \frac{2}{3n}$;*

3) *кривизна Риччи между вершинами x и y степени 3, для которых $d(x,y) = n$, равна $k(x,y) = -\frac{2}{3n}$.*

Определение. Рассмотрим бинарное дерево G, весовая функция d_ω которого равна 1. Это расстояние измеряет количество ребер в пути, соединяющего две вершины дерева. Матрицей кривизн Риччи $K = (k_{ij})$ для этого дерева G назовем матрицу, элементами которой являются кривизны Риччи k_{ij} между вершинами дерева G с номерами i и j.

Еще одним важным следствием из формулы кривизны Риччи для взвешенных деревьев является следующая теорема.

Теорема 2. *Бинарные деревья изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы кривизн Риччи сопряжены, т.е. равны при подходящей нумерации вершин.*

Автор приносит благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задач и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ”, проект НШ–581.2014.1, и РФФИ, грант № 13–01–00664а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: в 2т. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
2. *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications // arXiv: math.DG/0211159v1.
3. *Perelman G.* Ricci flow with surgery on three-manifolds // arXiv: math.DG/0303109v1.
4. *Bakry D., Emery M.* Diffusions hypercontractives // Lect. Notes Math. 1985. **1123**. 177–206.
5. *Ollivier Y.* Ricci curvature of Markov chains on metric spaces // J. Funct. Anal. 2009. **256**, N 3. 810–864.
6. *Chung F., Yau S.-T.* Logarithmic Harnack inequalities // Math. Res. Lett. 1996. **3**. 793–812.
7. *Lin Y., Lu L.Y., Yau S.T.* Ricci curvature of graphs // Tohoku Math. J. 2011. **63**. 605–627.
8. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. **203**, № 5. 65–118.

Поступила в редакцию
28.11.2014

УДК 532.5+537.8+551.5

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ УСИЛЕНИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ВОРОНКЕ ТОРНАДО

С. А. Маслов[1]

Рассмотрено влияние трипольной структуры заряда грозового облака и возмущений атмосферного электрического поля под облаком на закрутку потока в формирующейся воронке торнадо. Получено теоретическое обоснование сильной локализации завихренности воронки на малых пространственных масштабах.

[1] *Маслов Сергей Алексеевич* — асп. каф. газовой и волновой динамики мех-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergm90@mail.ru.