

16. Кудрявцева Е.А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН. 2012. **445**, № 4. 383–385.
17. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, № 10. 127–176.

Поступила в редакцию
19.06.2019

УДК 514

КРИТЕРИИ ВЫСОТНОСТИ АТОМА

В. А. Трифонова¹

В работе устанавливаются три критерия высотности атома в терминах его f -графа. Найдены препятствия к ориентированной вложимости f -графа в плоскость. Исследуются комбинаторные свойства меченых ориентированных циклов, представляющих собой обобщение хордовых диаграмм.

Ключевые слова: атом, высотный атом, f -граф, хордовая диаграмма, граф пересечений.

In this paper we establish three criteria for the height of an atom in terms of its f -graph. The obstacles to the oriented embeddability of the f -graph into the plane are found. We investigate the combinatorial properties of labeled oriented cycles, which are a generalization of chord diagrams.

Key words: atom, height atom, f -graph, chord diagram, intersection graph.

1. Введение. Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1–12]. Понятие атома в гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко [3] и используется для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем [8].

Задача классификации высотных атомов была сформулирована А.Т. Фоменко. Изучению этого класса атомов посвящены работы В.О. Мантурова [2], И.М. Никонова [10], В.А. Трифоновой [11], а также И.М. Никонова и Н.В. Волчанецкого [12]. Высотные атомы играют важную роль в теории узлов. Оказывается, что все узлы могут быть закодированы (неоднозначно) высотными атомами.

А.А. Ошемковым в работе [13] было введено понятие f -графа. Выяснилось, что с помощью f -графов удобно описывать перестройки торов Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, а также легко реализовать алгоритм перечисления таких перестроек. И.М. Никонов [10] обнаружил, что высотность атома эквивалентна ориентированной вложимости его f -графа в плоскость (теорема 1).

В настоящей работе устанавливаются три новых критерия высотности атома в терминах его f -графа. Хотя все критерии высотности по сути эквивалентны, они весьма полезны в разных ситуациях для доказательства высотности различных классов атомов. Также найдены препятствия к ориентированной вложимости f -графа в плоскость.

2. Основные понятия и определения. Пусть M^2 — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2: f(x) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, — ее связный критический уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ не содержит критических точек, кроме лежащих на критическом уровне ($\{f = k\}$).

Определение. Атомом называется пара $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$. Атом называется *ориентируемым*, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется *остовом* атома. Два атома называются *изоморфными*, если

¹ Трифонова Виктория Александровна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: trifonovaviktoriya2012@yandex.ru.

Trifonova Viktoriya Aleksandrovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию.

Определение. Назовем атом, порожденный функцией f , *высотным*, если существует такое вложение $i: f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]) \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(i(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $i(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]))$.

Замечание. Все высотные атомы являются ориентируемыми (см. [2]).

Также нам будет полезно другое определение атома, позволяющее изучать бифуркации независимо, а именно

Определение. *Атомом* назовем пару (P^2, K) , где P^2 — компактная ориентированная поверхность с краем; K — непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0, 1]$, $S^1 \times 1 \subset \partial P^2$, и выполнено следующее условие. Множество колец и их граничных окружностей разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец и соответствующих окружностей на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K) .

Два ориентированных оснащенных атома считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм оснащенных пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Всюду далее под атомом будем понимать ориентированный оснащенный атом, рассматриваемый с точностью до изоморфизма.

Атом может быть определен также как f -граф (см. [13]), что в свою очередь позволяет работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение. Конечный связный граф G , некоторые ребра которого ориентированы, назовем f -графом, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного полуребра.

Соответствующий f -граф строится по атому (P^2, K) следующим образом: в качестве неориентированного ребра берется отрезок, проходящий через вершину графа K и соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы отрезка. В роли ориентированных ребер выступают примыкающие к вершинам дуги белых колец с соответствующей ориентацией. f -Граф, построенный по черным кольцам атома (P^2, K) , назовем *двойственным f -графом*.

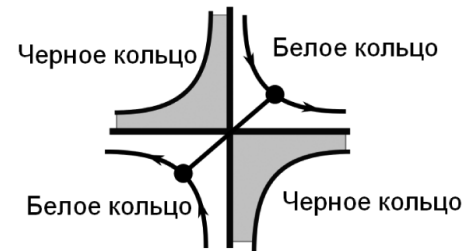


Рис. 1. Построение f -графа по атому

Из данного построения ясно, что f -граф (двойственный f -граф) состоит из непустого множества ориентированных циклов, которым соответствуют ориентированные граничные окружности белых (соответственно черных) колец, и неориентированных ребер. Ориентированные циклы будем называть *окружностями*.

Определение. Неориентированное ребро будем называть *внутренней хордой*, если оба его конца лежат на одной окружности. Иначе ребро назовем *внешней хордой*.

Определение. Назовем f -граф *ориентированно вложимым в плоскость*, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные хотя бы одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным*.

Следующий критерий позволяет нам свести задачу проверки высотности атома к проверке ориентированной вложимости его f -графа в плоскость.

Теорема 1 (И.М. Никонов, критерий высотности атома [10]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда f -граф ориентированно вложим в плоскость.*

Замечание. Теорема 1 будет верна, если f -граф заменить на двойственный f -граф.

Определим понятие под- f -графа.

Определение. f -Граф G называется *под- f -графом* некоторого f -графа H , если множество ориентированных циклов f -графа G является подмножеством ориентированных циклов f -графа H , а каждое неориентированное ребро f -графа G является неориентированным ребром f -графа H .

Теперь дадим определение изоморфности и f -гомеоморфности f -графов.

Определение. f -Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f: V_1 \rightarrow V_2$ множества V_1 вершин f -графа G_1 на множество V_2 вершин f -графа G_2 , удовлетворяющее условию: вершины $A, B \in V_1$ соединены неориентированным (ори-

ентированным) ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены неориентированным (ориентированным) ребром, причем если ребро ориентировано от A к B , то соответствующее ребро ориентировано от $f(A)$ к $f(B)$.

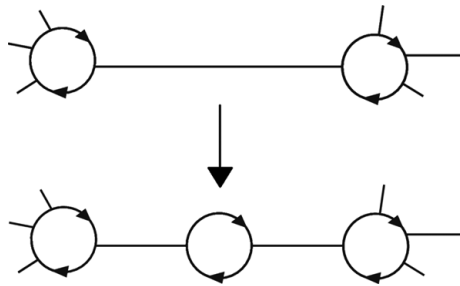


Рис. 2. Операция подразбиения неориентированного ребра f -графа

Определение. f -Граф G f -гомеоморфен f -графу H , если существует конечная цепочка преобразований $f_1, \dots, f_n$, композиция которых переводит G в H и каждое из которых относится к одному из следующих видов:

- 1) изоморфизм f -графов;
- 2) подразбиение неориентированного ребра f -графа (см. рис. 2);
- 3) обратная операция к подразбиению неориентированного ребра.

Определение. Препятствием V назовем f -граф, состоящий из двух ориентированных циклов с вершинами v_1, v_2, v_3 на одном цикле и u_1, u_2, u_3 на другом цикле, занумерованными в порядке обхода циклов, и хордами $(v_1, u_1), (v_2, u_2), (v_3, u_3)$ (см. рис. 3,а).

Определение. Препятствием $V(r), r \geq 1$, назовем f -граф, представляющий собой один цикл с вершинами $v_1, \dots, v_{4r+2}$, занумерованными в порядке обхода ориентированного цикла, и хордами $(v_{4i-3}, v_{4i}), 1 \leq i \leq r, (v_{4i-1}, v_{4i+2}), 1 \leq i \leq r$, и (v_{4r+1}, v_2) (см. рис. 3,б).

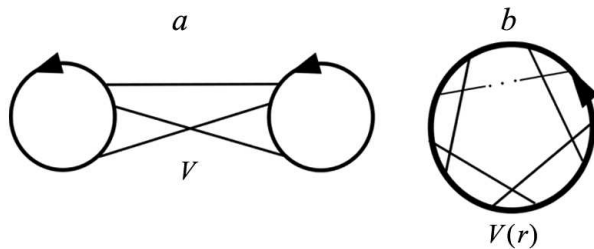


Рис. 3. Препятствия V и $V(r)$

Любой под- f -граф L этого f -графа является ориентированно вложимым в плоскость. Действительно, множество окружностей и хорд L является подмножеством окружностей и соответственно хорд в R , причем любые окружности, соединенные хотя бы одним ребром в R , лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Это означает, что L ориентированно вложим в плоскость.

Также нетрудно показать, что любой f -граф, f -гомеоморфный ориентированно вложимому f -графу в плоскость, также является ориентированно вложимым в плоскость.

Докажем, что f -граф, представляющий собой препятствие V или препятствие из серии $V(r)$, $r \geq 1$, не является ориентированно вложимым в плоскость.

Поскольку атом с f -графом V имеет двойственный f -граф $V(1)$, то ориентированная вложимость V эквивалентна ориентированной вложимости $V(1)$. Таким образом, достаточно рассмотреть f -графы серии $V(r), r \geq 1$.

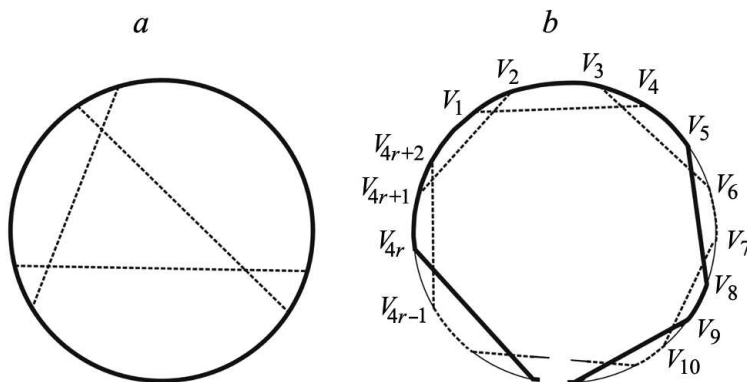


Рис. 4. Выделение подграфа в $V(r)$, гомеоморфного $K_{3,3}$

3. Основные теоремы.

Теорема 2 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома). Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть дан высотный атом, а F — его f -граф. Тогда по теореме 1 существует ориентированное вложение R f -графа F в плоскость.

Лемма 1. Каждый f -граф из серии $V(r), r \geq 1$, содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$.

Доказательство. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ можно реализовать на плоскости в виде окружности и трех внутренних хорд, показанных пунктирной линией на рис. 4,а. На рис. 4,б представлено препятствие $V(r)$ с выделенным, гомеоморфным $K_{3,3}$ подграфом, ребра которого изображены жирными и пунктирными линиями.

Лемма доказана. $\square$

Из леммы 1 и теоремы Понтрягина–Кураковского следует, что каждый f -граф из серии $V(r), r \geq 1$, в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения $V(r), r \geq 1$, в плоскость.

Таким образом, f -граф F не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть f -граф F атома не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Покажем, что F ориентированно вложим в плоскость.

Если ориентированный граф является циклом, все вершины которого помечены буквами, то назовем его *меченым циклом*. При этом буквы могут повторяться. Меченый ориентированный цикл, состоящий из r вершин, — это то же самое, что циклическое слово длиной r в алфавите $\mathcal{X}$ из n , $n \leq r$, букв $x_1, \dots, x_n$, в котором буквы могут повторяться. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв, произвольной перенумерации переменных $x_1, \dots, x_n$ и замены алфавита.

Далее через $S_{x_i}, x_i \in \mathcal{X}$, будем обозначать множество всех вершин $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, на меченом ориентированном цикле, где $\mathcal{X}$ — алфавит, а n — его размер.

Определение. Буквы a и b , соответствующие некоторым вершинам меченого цикла, назовем *зацепленными*, если существуют две пары вершин (a_1, a_2) и $(b_1, b_2), a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, которые мы встречаем последовательно $(\dots a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2)$ при циклическом обходе.

Определение. Меченый ориентированный цикл назовем *оснащаемым*, если множество его вершин можно разбить на два класса, причем буквы любых двух вершин из одного класса не зацеплены и вершины, обозначенные одной и той же буквой, принадлежат одному классу. Фиксированное разбиение на два класса назовем *оснащением* ориентированного цикла.

Определение. *Хордовой диаграммой* назовем меченый ориентированный цикл, в котором каждая буква встречается ровно два раза. Оснащаемую хордовую диаграмму назовем *d-диаграммой*.

Замечание. Хордовую диаграмму можно также эквивалентно определить как f -граф, состоящий из одного ориентированного цикла.

Определение. *Графом пересечений* $\Gamma(O)$ меченого ориентированного цикла O назовем неориентированный граф, образованный из семейства множеств $S_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$, путем создания вершины v_i для каждого множества S_{x_i} и соединения двух вершин v_i и v_j ребром, если буквы вершин из соответствующих множеств зацеплены.

Графом пересечений $\Gamma(H)$ f -графа H , состоящего из одного ориентированного цикла, будем называть граф пересечений хордовой диаграммы, соответствующей H .

Существует полное описание графов, представимых как графы пересечений хордовых диаграмм (см. [14]). Графы пересечений содержат довольно много информации о своих хордовых диаграммах. С.В. Чмутов, С.В. Дужин и С.К. Ландо выдвинули [15] гипотезу о том, что класс эквивалентности хордовых диаграмм можно определить их графом пересечений; они доказали гипотезу в случае, когда граф пересечений является деревом. В статье [16] гипотеза была доказана для более общего случая, когда граф пересечений $\Gamma(H)$ хордовой диаграммы H унициклический, т.е. $\pi_1(\Gamma(H)) = \mathbb{Z}$. В частности, верно следующее утверждение: f -графы, имеющие один ориентированный цикл (хордовые диаграммы), изоморфны, если их графы пересечений совпадают и представляют собой единственный цикл. Окончательно точку в обсуждениях о связи инвариантных хордовых диаграмм и их графов пересечений поставили С.В. Чмутов и С.К. Ландо в статье [17].

Исследуем теперь меченые ориентированные циклы, имеющие циклический граф пересечений.

Лемма 2. Пусть граф пересечений некоторого меченого ориентированного цикла O представляет собой замкнутый цикл K (имеющий $n \geq 3$ вершин). Тогда из каждого множества S_{x_i} можно выделить подмножество $S'_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,n}$, совпадает с K .

Доказательство. Меченый ориентированный цикл O с k вершинами имеет следующую запись: $(i_1 i_2 \dots i_k)$, где вершины $i_1, i_2, \dots, i_k$ расположены именно в этом порядке при циклическом обходе.

Также цикл O можно представить как ориентированную окружность с вершинами $i_1, i_2, \dots, i_k$. Пусть a, b, d_1, d_2 — некоторые вершины цикла O , причем вершины d_1 и d_2 лежат на разных дугах, на которые вершины a и b разбивают окружность. Пусть Z — произвольное непустое подмножество множества вершин цикла O . Далее будем писать, что вершины множества Z ограничены на цикле O вершинами a и b (соответственно a и d_1) в виде $(a \dots z \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$, если каждая вершина z множества Z лежит на дуге окружности, ограниченной a и b и содержащей вершину d_1 (соответственно на дуге окружности, ограниченной a и d_1).

Будем доказывать индукцией по n — количеству вершин $K = \Gamma(O)$.

База индукции. Пусть $n = 3$ и вершины цикла O обозначены буквами a, b, c . Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ цикла O представляет собой замкнутый цикл, имеющий три вершины v_a, v_b, v_c , т.е. треугольник. Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c), причем вершине v_a (соответственно v_b, v_c) соответствует множество S_a (соответственно S_b, S_c). Вершины v_a и v_b графа пересечений соединены ребром, следовательно, существуют две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , $a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, расположенных на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$. Разберем все случаи расположения вершин из множества S_c на цикле O .

Если существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots c_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_2 \dots)$ или $(a_1 \dots c_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c_2 \dots b_2 \dots)$, то утверждение леммы при $n = 3$ доказано (граф пересечений каждой из хордовых диаграмм $(a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2)$ и $(a_1 c_1 b_1 a_2 c_2 b_2)$ представляет собой треугольник).

Осталось рассмотреть следующие случаи.

1. Вершины множества S_c ограничены a_1 и b_1 в виде $(a_1 \dots c \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
2. Вершины множества S_c ограничены b_1 и a_2 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots c \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
3. Вершины множества S_c ограничены a_2 и b_2 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c \dots b_2 \dots)$.
4. Вершины множества S_c ограничены b_2 и a_1 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c \dots)$.
5. Вершины множества S_c ограничены a_1 и a_2 , причем вершина b_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
6. Вершины множества S_c ограничены b_1 и b_2 , причем вершина a_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots c_1 \dots a_2 \dots c_2 \dots b_2 \dots)$.
7. Вершины множества S_c ограничены a_2 и a_1 , причем вершина b_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c_1 \dots b_2 \dots c_2 \dots)$.
8. Все вершины из множества S_c расположены между b_1 и b_2 , причем вершина a_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$.

Остановимся на случае 1 (случаи 2–4 аналогичны). Вершины v_a и v_c графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, следовательно, существуют пара (c_1, c_2) и буква a_3 , расположенные в последовательности $(a_1 \dots c_1 \dots a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$. Далее вершину a_1 на цикле O рассматривать не будем, а вершину a_3 обозначим a_1 . Тогда (т.е. если поменять обозначение вершины a_3 на a_1) мы пришли к случаю 8 (случаи 5–7 аналогичны случаю 8).

Так как вершины v_c и v_b графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, то возможны следующие подслучаи.

1.1. Существует вершина b_3 , ограниченная c_1 и a_3 : $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots b_3 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 c_2 b_1 a_2 c_1 b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.2. Существует вершина b_3 , ограниченная a_3 и c_2 в виде $(a_3 \dots b_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 b_3 c_2 a_2 b_2 c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.3. Существуют вершины b_3 и c_3 , ограниченные c_2 и b_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_3 \dots c_3 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 b_3 c_3 a_2 b_2 c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.4. Существуют вершины b_3 и c_3 , ограниченные b_2 и c_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_3 \dots b_3 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_2, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 c_2 b_1 a_2 c_3 b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

Таким образом, утверждение леммы при $n = 3$ полностью доказано.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы верно при $n = k, k \geq 3$. Докажем, что оно верно при $n = k + 1$. Пусть вершины цикла O помечены буквами a, b, c, d и т.д. Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ представляет собой замкнутый цикл, имеющий $k + 1$ вершину v_a, v_b, v_c, v_d и т.д.

Не ограничивая общности, полагаем, что вершина v_a соединена ребром с v_d и v_b , а вершина v_b соединена ребром с v_a и v_c . Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c, S_d) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c, d), причем вершине v_a (v_b, v_c, v_d) соответствует множество S_a (S_b, S_c, S_d). Теперь обозначим букву b буквой a , получим цикл O' . Через $S_{a'}$ будем обозначать множество всех вершин цикла O' , помеченных буквой a . Тогда граф пересечений $\Gamma(O')$ цикла O' представляет собой замкнутый цикл, имеющий k вершин v_a, v_c, v_d и др., и для $\Gamma(O')$ выполняется утверждение леммы по предположению индукции. То есть существуют двухэлементные подмножества $S'_a, S'_c, S'_d, \dots$ множеств $S_{a'}, S_c, S_d, \dots$ соответственно, такие, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_a, S'_c, S'_d, \dots\}$, совпадает с $\Gamma(O')$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ соединены ребром, т.е. $k = 3$ и $\Gamma(O)$ представляет собой четырехугольник. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества $S_{a'}$; c_1, c_2 из множества S_c ; d_1, d_2 из множества S_d , расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(a_{i_1} \dots d_1 \dots c_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots c_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O' . Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c , а v_b — с v_d , то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Рассмотрим случай, когда вершина a_{i_1} является элементом множества S_a , обозначим ее a_1 , а a_{i_2} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 . Случай, когда a_{i_1} является элементом S_b , а a_{i_2} — элементом S_a , рассматривается аналогично. Так как v_a не соединена ребром с v_c , то каждая вершина a из множества S_a ограничена c_1 и c_2 в виде $(c_2 \dots a \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Также каждая вершина b из множества S_b ограничена d_1 и d_2 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Так как v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существуют a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , ограниченные c_1 и d_1 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Таким образом, из множества S_a выделяется подмножество $\{a_1, a_2\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_2\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$, из S_d — подмножество $\{d_1, d_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(c_2 a_1 d_1 b_2 a_2 c_1 b_1 d_2)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой четырехугольник.

Случай 2. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ не соединены ребром, т.е. $k \geq 4$. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества $S_{a'}$; c_1, c_2 из множества S_c ; d_1, d_2 из множества S_d , расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(c_1 \dots a_{i_1} \dots c_2 \dots d_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O' . Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c , а v_b — с v_d , то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Тогда возможны следующие подслучаи.

Подслучай 2.1. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_a , обозначим ее a , а a_{i_2} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 . Так как вершина v_a не соединена ребром с v_c в графе $\Gamma(O)$, то вершины множества S_a ограничены c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. А поскольку v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, то существуют вершины a_1, a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , расположенные на цикле O в циклической последовательности $(c_1 \dots a_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Но такое расположение противоречит тому, что v_b не соединена с v_d в графе $\Gamma(O)$.

Подслучай 2.2. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 , а a_{i_2} является элементом множества S_a , обозначим ее a_1 . Заметим, что так как v_a не соединена ребром с v_c , то не существует вершины a из множества S_a , ограниченной c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$. Также заметим, что не существует вершины b из множества S_b , ограниченной d_1 и d_2 в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Учитывая эти замечания и то, что v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существует a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , ограниченные c_2 и d_1 (или d_2 и c_1) в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots a_2 \dots b_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$ (соответственно в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots b_2 \dots a_2 \dots)$).

Рассмотрим граф пересечений $\Gamma(U)$ хордовой диаграммы U , образованной из $\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, S' \setminus S'_a$. Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{a_1, a_2\}$, соединена только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{b_1, b_2\}$, а другая — множеству S'_d . Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{b_1, b_2\}$, соединена также только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{a_1, a_2\}$, а другая — множеству S'_c . Вершины графа $\Gamma(U)$, соответствующие элементам множества $S' \setminus S'_a$, имеют степень два. Таким образом, $\Gamma(U)$ совпадает с $\Gamma(O)$. Лемма доказана. $\square$

Отметим, что утверждение леммы 2 перестает быть верным, если граф K не является замкнутым циклом. Примером служит следующий меченый ориентированный цикл: $(d_1, a_1, c_1, d_2, a_2, c_2, b_1, a_3, b_2)$.

Опишем процедуру снабжения вершин произвольного f -графа буквами.

Для каждого ориентированного цикла A f -графа сделаем следующее. Разными буквами поме-

тим все внутренние хорды цикла A . Концам каждой хорды припишем ту же букву, что и у хорды. Если на цикле A остались вершины, не помеченные буквами, то поступим таким образом. После удаления цикла A вместе с хордами, хотя бы один конец которых принадлежит A , f -граф разбивается на $m \geq 1$ непустых связных компонент. Обозначим эти компоненты разными буквами (при этом обозначения внутренних хорд и компонент должны быть попарно разными). Теперь для каждой компоненты сделаем следующее. Одна компонента соединена с циклом A ребрами. Пометим вершины этих ребер на цикле A той же буквой, что и у компоненты. В конечном итоге получим из A ориентированный цикл, все вершины которого обозначены буквами.

f -Граф назовем *меченым*, если все его вершины помечены буквами указанным образом (вообще говоря, неоднозначным, так как метки на вершинах разных циклов вводятся независимо друг от друга, т.е. могут повторяться у разных циклов). Далее будем рассматривать только меченые f -графы.

Лемма 3. *Если f -граф не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$, то каждый его меченый ориентированный цикл оснащаем.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ориентированный цикл A f -графа и построим граф пересечений $\Gamma(A)$.

Предположим, что $\Gamma(A)$ содержит цикл нечетной длины. Если циклов несколько, выберем среди них наименьший по числу звеньев и выделим его в графе пересечений. Заметим, что в $\Gamma(A)$ не существует ребра, соединяющего две несмежные вершины выделенного цикла C (иначе получим, что существует цикл нечетной длины в $\Gamma(A)$, у которого звеньев меньше). Теперь будем рассматривать только те множества вершин с одинаковыми буквами на цикле A , которым соответствуют вершины цикла C . По лемме 2 из каждого множества S_{x_i} (соответствующего некоторой вершине цикла C) можно выделить подмножество S'_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,n}$, совпадает с C . Это означает, что в самом f -графе существует под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Противоречие с условием леммы.

Итак, граф пересечений $\Gamma(A)$ не содержит цикла нечетной длины. А значит, является двудольным. То есть множество вершин графа $\Gamma(A)$ можно разбить на два класса таким образом, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из одного класса с некоторой вершиной из другого класса. Из двудольности $\Gamma(A)$ следует существование оснащения ориентированного цикла A . Лемма доказана. $\square$

Вернемся к рассмотрению f -графа F . Пусть F состоит из одного ориентированного цикла A , который по лемме 3 оснащаем (т.е. цикл A является d -диаграммой). Зафиксируем какое-либо оснащение цикла и рассмотрим его реализацию на плоскости без самопересечений. А именно: заметим, что любые буквы из одного класса зацепленными не являются. Тогда все хорды f -графа F , концы которых лежат в одном классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися криволинейными отрезками без самопересечений внутри цикла. Аналогично все хорды f -графа F , концы которых лежат в другом классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися и без самопересечений вне цикла. Получим ориентированное вложение F в плоскость.

Далее будем считать, что F содержит $\ell \geq 2$ ориентированных циклов. Зафиксируем оснащение на каждом ориентированном цикле. Один класс из определения оснащения пометим числом 0, второй класс пометим 1. Тогда все вершины f -графа F разбиваются на классы 0 и 1.

Хвостом вершины в f -графе назовем полуребро хорды (т.е. неориентированного ребра), содержащее данную вершину. Хвост назовем *внешним (внутренним)*, если он лежит на внешней (соответственно внутренней) хорде f -графа. В произвольном неориентированном графе под хвостами вершины будем понимать содержащие ее полуребра.

Замкнутой цепью назовем f -граф, состоящий из $s \geq 1$ ориентированных циклов и циклически соединяющих хорд, как на рис. 5,а. При $s = 1$ замкнутая цепь состоит из одного ориентированного цикла с внутренней хордой.

Построим для f -графа F дерево T следующим образом. Если в графе F есть замкнутая цепь, то выберем произвольную хорду, входящую в цепь, и *разделим* ее: выделим на хорде две вершины (см. рис. 5,б), обозначим их красным цветом, а часть хорды, соединяющую красные вершины, удалим (см. рис. 5,с). Повторяем предыдущий шаг для полученного графа, пока не построим граф, не содержащий замкнутых цепей. Далее каждый ориентированный цикл стянем в точку (рис. 5,д). Получим дерево T , при этом для каждой вершины дерева естественным образом определен ориентированный циклический порядок ее хвостов.

Далее под циклическим порядком вершины дерева будем понимать ориентированный циклический порядок ее хвостов.

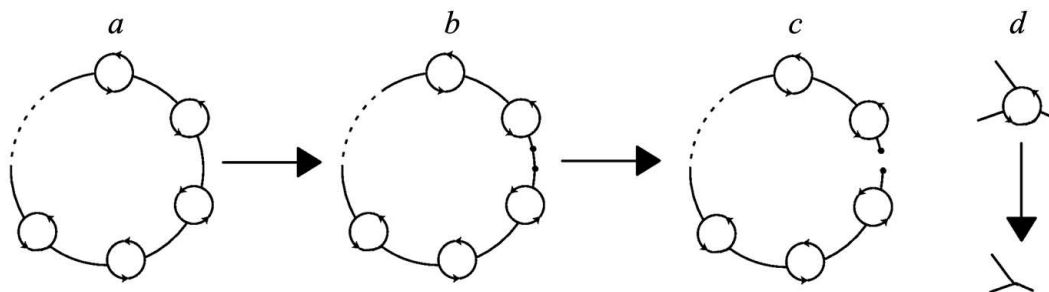


Рис. 5. Разделение хорды, входящей в замкнутую цепь

Если две красные вершины лежали на одной внешней (внутренней) хорде в F , то такие вершины назовем *out-идентичными* (соответственно *in-идентичными*). Будем говорить, что вершины *идентичны*, если они являются *out-идентичными* или *in-идентичными*.

Лемма 4. Любое дерево с заданным циклическим порядком его вершин (см. выше) можно изобразить с учетом этого порядка без самопересечений на плоскости внутри окружности, причем вершины дерева будут лежать на окружности, а ребра представлять собой прямые отрезки.

Замечание. Вложение дерева с учетом циклического порядка его вершин состоит в следующем. Обозначим через U указанную реализацию дерева внутри окружности. Для каждой вершины v в U ориентированный циклический порядок полуребер в вершине v , задаваемый вложением и ориентацией полуребер против часовой стрелки, должен совпадать с циклическим порядком дерева в вершине v .

Доказательство. Индукция по N — числу вершин дерева. При $N = 2$ (т.е. для простого ребра) утверждение леммы очевидно.

Пусть лемма верна при $N = \kappa$. Рассмотрим дерево с $N = \kappa + 1$ числом вершин. В любом дереве существует висячая вершина (т.е. вершина степени 1). Выделим ребро в нашем дереве, которому принадлежит висячая вершина, и обозначим буквой l вершину-конец ребра, отличную от висячей. Очевидно, что степень вершины l больше или равна двум.

Удалим висячую вершину. Получится дерево с $N = \kappa$ вершинами, которое можно вложить в плоскость указанным образом. Рассмотрим такое вложение. Обозначим через X множество замкнутых связных областей, на которые окружность и вложенное в него дерево разбивают плоскость. Отметим, что все элементы множества X являются выпуклыми.

1. Рассмотрим случай, когда вершина l после удаления висячей вершины стала висячей. Поскольку в дереве нет циклов, то существует замкнутая область, которая является элементом множества X и границей которой являются ребра дерева, в том числе ребро с концом l , и некоторая дуга окружности. Соединим отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l . Очевидно, этот отрезок будет находиться внутри области, а значит, не будет пересекаться с другими отрезками. Получим искомое вложение в плоскость дерева с $N = \kappa + 1$ числом вершин.

2. Теперь рассмотрим случай, когда степень вершины l до удаления висячей вершины была больше трех. Тогда существуют два ребра: одно предшествует удаленному, другое следует за удаленным в соответствии с циклическим порядком вершины l .

Предположим, что существует область — элемент множества X , в границу которой входят предшествующее и последующее ребра. Поскольку в дереве нет циклов, в границу этой области входит некоторая дуга окружности, внутреннюю точку которой можно соединить отрезком с вершиной l , что даст искомое вложение.

Пусть в множестве X не существует замкнутой области с границей, содержащей предшествующее и последующее ребра. Тогда рассматриваем область, границей которой являются ребра дерева, в том числе предшествующее (или последующее) ребро. Данная область аналогична рассмотренной из п. 1. Она содержит в качестве границы некоторую дугу окружности. Соединив отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l , в итоге получим искомое вложение.

3. Осталось рассмотреть случай, когда степень вершины l до удаления висячей вершины была равна трем. Тогда в множестве X существуют три области. Первую (вторую) область ограничивают ребра дерева, в том числе предшествующее (соответственно последующее) ребро. В границу третьей области входят предшествующее и последующее ребра. В зависимости от циклического порядка вершины l в дереве выбираем область. Случай свелся к рассмотренному.

Лемма доказана. $\square$

Определение. Препятствием V^1 назовем граф, состоящий из трех ребер l_1, l_2, l_3 и двух вершин, на которых задан ориентированный циклический порядок: (l_1, l_2, l_3) на одной вершине и такой же на второй (рис. 6,а).

Пусть T_1 — описанное вложение дерева T в плоскость; E — окружность, на которой лежат вершины дерева T_1 . Если дерево T_1 не содержит красных вершин, то искомое вложение f -графа F в плоскость получается из T_1 заменой каждой вершины ориентированным циклом. Далее считаем, что дерево T_1 содержит красные вершины.

Получим из T_1 связный граф G следующим образом: соединим ребром идентичные вершины дерева T_1 . Отметим, что каждая пара идентичных вершин в графе G лежит на некотором цикле. Также ясно, что произвольная не красная вершина на каком-либо цикле в G имеет лежащие на этом цикле хвосты, которые помечены одной буквой и поэтому принадлежат одному классу.

Пусть существуют красные вершины A, B, A_1, B_1 дерева T_1 , лежащие на E в этом циклическом порядке, причем вершина A идентична A_1 , а вершина B идентична B_1 . Соединим A с A_1 и B с B_1 путями в дереве T_1 .

Если эти пути в дереве пересекаются по некоторому пути u , то в графе G выделяется препятствие V^1 . Вершинами V^1 будут концы u . На рис. 6,б показан пример, как выделяется препятствие V^1 в графе G . Пунктиром обозначена окружность E . Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f -граф F содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V , а это противоречит условию. Следовательно, пути в дереве T_1 , соединяющие A с A_1 и B с B_1 , пересекаются по точке. Эту точку назовем *точкой пересечений* и обозначим буквой O . Путь в дереве, соединяющий A с A_1 , будем обозначать через AA_1 , а соединяющий B с B_1 — через BB_1 .

Предположим, что существует путь u_1 в графе G , соединяющий AA_1 и BB_1 . И этот путь точку пересечений не содержит. Буквой K (соответственно L) обозначим конец пути u_1 , лежащий на AA_1 (соответственно на BB_1). Через k_1 (соответственно l_1) обозначим хвост вершины K (соответственно L), лежащий на пути u_1 . Рассмотрим два пути γ_1, γ_2 в графе G , соединяющие K и O : путь γ_1 лежит на BB_1 и не содержит B и B_1 , путь γ_2 проходит через вершины B и B_1 . Через k_2 (соответственно k_3) обозначим хвост вершины K , лежащий на γ_1 (соответственно γ_2). Хвосты l_2 и l_3 вершины L определяются аналогично хвостам k_2 и k_3 . Хвосты k_i и l_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, могут четырьмя способами образовывать циклический порядок на вершинах K и L :

- 1) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 6,с);
- 2) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 6,д);
- 3) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_2, l_3) (рис. 6,е);
- 4) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_2, l_3) .

Четвертый случай аналогичен второму. На рис. 6, с,д,е путь u_1 изображен пунктиром. Во всех четырех случаях в графе G выделяется препятствие V^1 . На рис. 6, ф,г,х ребра препятствия V^1 выделены жирными пунктирными линиями, а вершинами V^1 являются O и L .

Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f -граф F содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V , что противоречит условию.

Таким образом, при удалении точки пересечения из графа G вершины A и B (также A_1 и B_1) не могут лежать в одной компоненте связности. Также класс хвостов точки пересечения, лежащих на AA_1 , отличается от класса хвостов этой точки, лежащих на BB_1 . Иначе на ориентированном цикле в f -графе F , соответствующем точке пересечения, существовали бы две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , идущих по циклу в порядке $(a_1 b_1 a_2 b_2)$ и принадлежащих одному классу. Это противоречит существованию оснащения каждого ориентированного цикла f -графа F . Здесь буквой a (b) обозначены хвосты точки пересечения, лежащие на AA_1 (BB_1) и соответствующие хвостам вершины на ориентированном цикле в f -графе F . Отметим также, что путь AA_1 (BB_1) лежит на некотором цикле в G . Поэтому не существует вершины на AA_1 (BB_1) с внешними хвостами на AA_1 (BB_1) из разных классов.

Вернемся к рассмотрению дерева T_1 и вершин A, B, A_1, B_1 .

Вершину в T_1 назовем *особой*, если она имеет хотя бы два внешних хвоста, лежащие в разных классах. Заметим, что точка пересечений AA_1 и BB_1 является особой, если вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 .

В зависимости от наличия особых вершин в дереве T_1 рассмотрим два случая. И в каждом случае докажем, что существует ориентированное вложение f -графа F в плоскость, причем для каждого ориентированного цикла будет верно следующее:

хорды с вершинами на ориентированном цикле лежат одновременно внутри или вне этого цикла тогда и только тогда, когда они входят в один класс (относительно вершин на цикле).

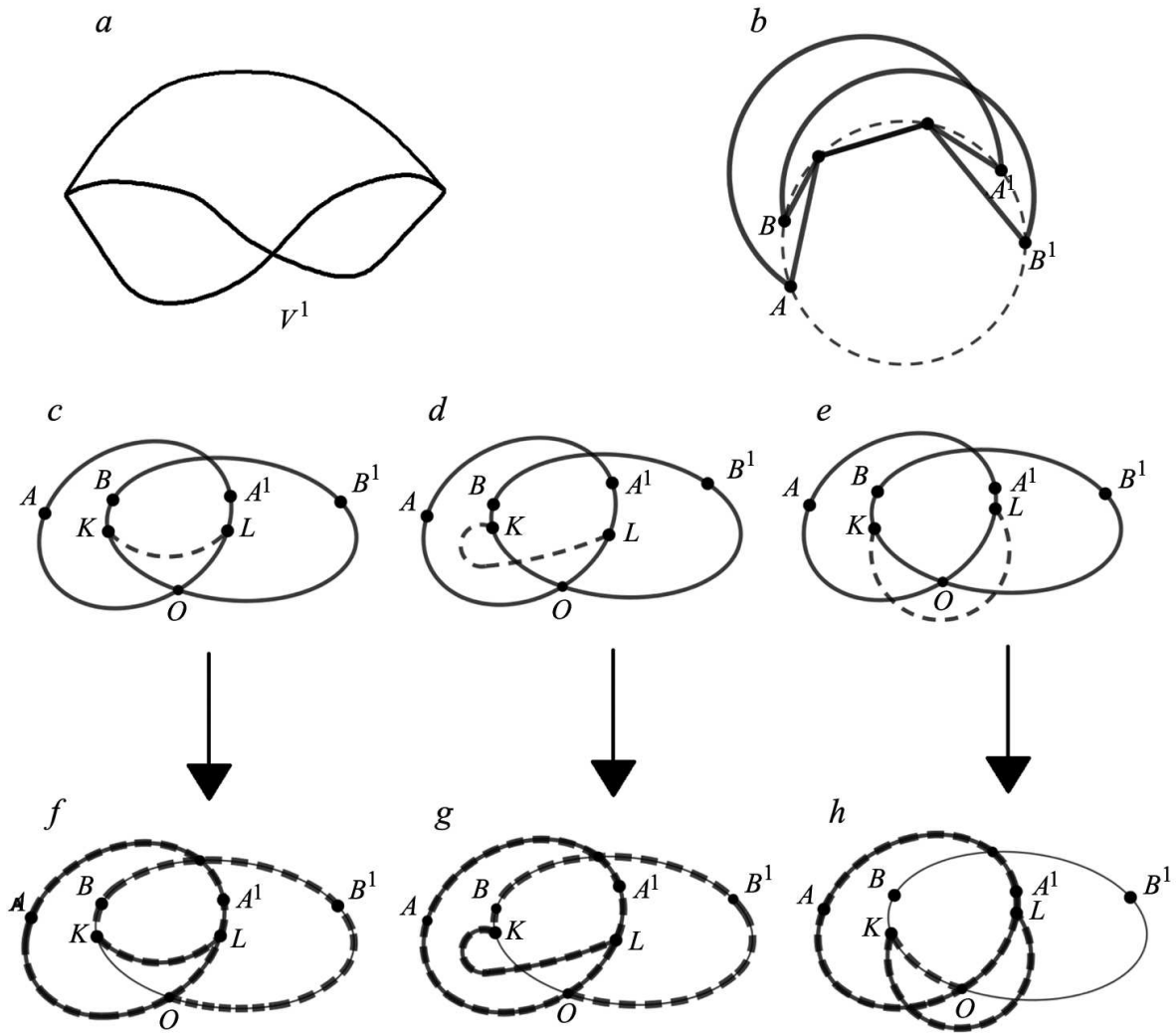


Рис. 6. Выделение препятствия V^1 в графе G

1. Пусть в дереве T_1 нет особых вершин. Тогда все внешние хвосты произвольной не красной вершины дерева помечены одним классом. Припишем каждой не красной вершине дерева тот же класс, что и у ее внешних хвостов. Распределим красные вершины дерева T_1 по классам K_1 и K_2 следующим образом.

Очевидно, что каждая красная вершина является концом некоторого ребра, второй конец которого красным не является. Рассмотрим каждое ребро дерева T_1 с одним красным концом. Если класс хвоста второго конца отличен от класса самого конца, то красную вершину ребра определим в класс K_2 , иначе определим в класс K_1 . Отметим, что идентичные вершины определены в один класс, причем все out-идентичные вершины принадлежат классу K_1 . В класс K_2 попадают, очевидно, только in-идентичные вершины.

Пусть вершины A, B, A_1, B_1 попали в один класс. Докажем, что такое невозможно. Для этого рассмотрим следующие варианты.

1.1. Вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 . Тогда в дереве T_1 есть особая вершина, что противоречит условию.

1.2. Вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B in-идентична вершине B_1 . (Случай, когда A in-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 , рассматривается аналогично.) Тогда класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает с классом хвостов a_1 и a_2 . Но, как мы ранее выяснили, класс хвостов b_1 и b_2 отличен от класса хвостов a_1 и a_2 . Поэтому вершины B и B_1 имеют класс K_2 . Так как A out-идентична вершине A_1 , то A и A_1 имеют класс K_1 . Получили противоречие с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

1.3. Вершина A in-идентична вершине A_1 , а вершина B in-идентична вершине B_1 . Класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает либо с классом хвостов a_1 и a_2 , либо с классом хвостов b_1 и

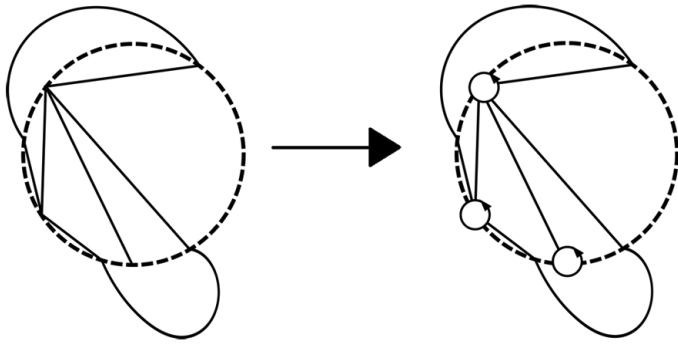


Рис. 7. Замена вершин ориентированными циклами

Заметим, что если существуют две пересекающиеся хорды в полученном f -графе, то на каждой из них выделены красные вершины, причем класс вершин на одной хорде отличен от класса вершин на другой. Пересечения хорд устраним следующим образом. Каждую внутреннюю хорду полученного f -графа, на которой выделены красные вершины из класса K_2 , переведем внутрь соответствующего цикла с помощью инверсии.

В итоге получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость. Заметим, что в этом вложении все ориентированные циклы лежат вне друг друга.

2. Пусть в дереве T_1 есть особые вершины. Индукцией по n — числу особых вершин — докажем, что существует указанное вложение f -графа F в плоскость.

База индукции. Пусть $n = 1$. Разобьем на два класса множество вершин дерева T_1 , исключая особую вершину w , следующим образом. Существует единственный путь, соединяющий произвольную вершину v дерева с особой. Определим вершину v в тот же класс, в котором и хвост особой вершины, лежащий на этом пути.

Идентичные вершины попадут в один класс (иначе в графе G существовал бы цикл с вершиной w , хвосты которой, лежащие на цикле, имеют разные классы).

Деревом T_1^1 (соответственно T_1^2) назовем поддерево дерева T_1 , множество вершин которого состоит из w и всех вершин класса 0 (соответственно 1).

Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (соответственно T_1^2). Из T_1^1 и T_1^2 получим ориентированное вложение некоторых f -графов (см. случай 1), ориентированные циклы которых лежат вне друг друга. Эти f -графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w), причем все хорды f -графов лежат вне этого цикла. Инверсией переведем один из f -графов внутрь этого цикла. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость.

Шаг индукции. Пусть при $n = k$ существует ориентированное вложение f -графа F в плоскость. Рассмотрим случай, когда $n = k + 1$. Выберем произвольную особую вершину w дерева T_1 .

Аналогично описанному в базе индукции определим деревья T_1^1 и T_1^2 . Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (T_1^2). Значит, из T_1^1 и T_1^2 по предположению индукции можно получить ориентированные вложения двух f -графов. Эти f -графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w). Если оба f -графа реализованы одновременно внутри или вне общего цикла, применим инверсию (относительно этого цикла) к одному из них. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость.

Таким образом, f -граф F ориентированно вложим в плоскость. Следовательно, по теореме 1 атом с соответствующим f -графом F является высотным. Достаточность доказана. $\square$

Следствием из теоремы 2 является

Теорема 3 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф не содержит подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$, и не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V .*

Доказательство. Если f -граф F атома содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$, то по теореме Понтрягина–Куратовского такой f -граф в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения F в плоскость.

Пусть атом высотным не является. Рассмотрим его f -граф. По теореме 2 этот f -граф содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Но любое препятствие из этой серии содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (лемма 1). Теорема доказана. $\square$

b_2 . Для определенности будем считать, что класс точки пересечения совпадает с классом хвостов a_1 и a_2 . Далее по аналогии с п. 1.2 получаем противоречие с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

Таким образом, любые четыре вершины A, A_1, B, B_1 из одного класса, где A идентична A_1 , а B идентична B_1 , лежат на E в этом циклическом порядке. Значит, в каждом классе идентичные вершины можно соединить вне окружности E непересекающимися криволинейными отрезками. Соединим их в T_1 и заменим каждую вершину (не красную) ориентированным циклом (рис. 7).

Пусть дан высотный атом с f -графом F . В рамках доказательства достаточности теоремы 2 мы определяли дерево T_1 (из F), вложенное в плоскость с вершинами на окружности E . Предположим, что на окружности E есть красные вершины. Построим меченый ориентированный цикл из E и красных вершин и покажем оснащаемость этого цикла.

Все вершины дерева T_1 , имеющие хотя бы два хвоста из разных классов, обозначим синим цветом.

Рассмотрим сначала все вершины дерева T_1 , не обозначенные синим или красным цветом. Для каждой из них переобозначаем классы так, чтобы внешние хвосты относились к классу 1 (все внешние хвосты принадлежит одному классу, так как после удаления вершины остается одна компонента связности, не считая внутренних хорд).

Произвольным образом обозначим разными именами все синие вершины (при их наличии) дерева T_1 . Выберем (произвольно) одну не красную вершину v_0 и объявим ее корневой. Для каждой вершины v дерева T_1 сделаем следующее. Существует единственный путь γ , соединяющий v_0 с v . Классы для вершины v переобозначаются таким образом, чтобы хвост ребра $e \in \gamma$, инцидентного вершине v , принадлежал классу 1. Ориентируем путь γ от v_0 к v . Пусть $u_1, u_2, \dots, u_l$ — синие вершины, имеющие хвост из класса 0 на пути γ . Каждому ребру $e \in \gamma$ присвоим имя и класс следующим образом. Пусть q — конец ребра, ближайший к корневой вершине на пути γ . Тогда ребру e дадим то же имя, что и у ближайшей к q (или совпадающей с q) вершины u_i , которая лежит на пути от v_0 к q . Если на этом пути четное число вершин u_j , то ребро e отнесем к классу $\bar{A}$, иначе — к классу $\bar{B}$. Если на пути от v_0 к q нет вершин u_j , то ребро e обозначим v_0 и отнесем к $\bar{A}$. Ввиду единственности пути γ имя и класс каждого ребра пути однозначны.

Рассмотрим дерево T_1 , каждое ребро которого имеет имя и класс. Каждой красной вершине дерева припишем то же имя и тот же класс, что и у ребра с этой вершиной. Красные вершины на ориентированной окружности E образуют меченый ориентированный цикл. Ориентацию берем произвольно.

Заметим, что ребра, инцидентные одной вершине, имеют разные имена и классы тогда и только тогда, когда у этой вершины хвосты на этих ребрах из разных классов. Ранее мы показали, что путь в дереве T_1 , соединяющий идентичные вершины, не содержит вершин с хвостами из разных классов на этом пути. Это значит, что все ребра этого пути имеют одинаковые имена и классы. Тогда идентичные вершины одинаково обозначены.

Пусть существуют четыре красные вершины A, B, A_1, B_1 из одного класса, идущие в этом циклическом порядке на E , причем $A, A_1 \in S_a; B, B_1 \in S_b$. Нетрудно показать, что ребра каждого из путей AA_1 и BB_1 принадлежат одному классу и названы одним именем. Тогда, очевидно, пути AA_1 и BB_1 пересекаются по точке. Однако ранее мы показали, что класс хвостов точки пересечения AA_1 и BB_1 , лежащих на AA_1 , отличается от класса хвостов, лежащих на BB_1 . Поэтому существуют ребра на AA_1 и BB_1 из разных классов. Получили противоречие, которое означает оснащаемость меченого ориентированного цикла E .

Рассмотрим теперь f -граф F , который содержит под- f -граф L , f -гомеоморфный препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Предполагаем, что F не содержит препятствия V . Покажем, что в этом случае отсутствует оснащение меченого ориентированного цикла E .

Под- f -граф L состоит из замкнутых цепей (см. рис. 5,а) с одним общим ориентированным циклом R . Рассмотрим две такие цепи l_1 и l_2 со следующим свойством: концы хорд первой и второй цепи на R чередуются при циклическом обходе. В процессе построения дерева T_1 на хорде каждой замкнутой цепи в F выделялись красные вершины (см. рис. 5,б). Дерево T_1 может содержать группу пар идентичных вершин, выделенных на нескольких хордах некоторой замкнутой цепи в F . Вернемся к рассмотрению цепей l_1 и l_2 . Пусть вершины A и A_1 (B и B_1) выделены на цепи l_1 (соответственно l_2) и являются ближайшими к циклу R красными вершинами. Тогда A с A_1 и B с B_1 можно соединить путями в дереве T_1 . Так как в графе G вершины A и A_1 (B и B_1) лежат на одном цикле, то ни один из этих путей не содержит вершин с разными хвостами на этом пути. Тогда вершины A и A_1 (B и B_1) обозначены одинаково на окружности E . Из чередования концов хорд l_1 и l_2 на A следует, что вершины A, B, A_1, B_1 лежат на E в этом циклическом порядке. Предположим, что ориентированный цикл E оснащаем (т.е. красные вершины на E можно разделить на два класса особым образом). Тогда класс вершин A и A_1 отличается от класса вершин B и B_1 .

Для каждой цепи в L назовем на цикле R одним и тем же именем концы хорд данной цепи. Получим хордовую диаграмму O . Припишем каждой замкнутой цепи в L тот же класс, что и у ближайших к R красных вершин на этой цепи. Вершинам на R присвоим класс соответствующих цепей. В итоге получим оснащение хордовой диаграммы O . Однако заметим, что хордовая диаграм-

ма O , рассматриваемая как f -граф с одним циклом, изоморфна препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Из невлости каждого препятствия из этой серии в плоскость следует, что хордовая диаграмма O не является d -диаграммой. Противоречие.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда при наличии замкнутых цепей его f -граф не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V , и меченый ориентированный цикл E оснащаем.*

Автор приносит благодарность А.Т. Фоменко и И.М. Никонову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ–6399.2018.1, соглашение № 075–02–2018–867), а также фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
2. Мантуров В.О. Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. № 1. 3–8.
3. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, №6. 1276–1307.
4. Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функци. анализ и его прил. 1988. **22**, вып. 4. 38–51.
5. Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып. 1. 145–173.
6. Фоменко А.Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **55**, №4. 747–779.
7. Фоменко А.Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функци. анализ и его прил. 1991. **25**, вып.4. 23–35.
8. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, №3. 546–575.
9. Plyutko D.P., Manturov V.O. Virtual knots: the state of the art. Series on knots and everything. Vol. 51. Singapore: World Scientific, 2012.
10. Никонов И. М. Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №6. 17–25.
11. Трифонова В.А. Высотные частично симметричные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. №2. 33–41.
12. Волчанецкий Н.В., Никонов И.М. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 3–6.
13. Ошемков А.А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. **205**. 131–140.
14. Bouchet A. Circle graph obstructions // J. Combin. Theory. Ser. B. 1994. **60**. 107–144.
15. Chmutov S., Duzhin S., Lando S. Vassiliev knot invariants II. Intersection graph conjecture for trees, singularities and bifurcations // Adv. Sov. Math. 1994. **21**. 127–134.
16. Mellor B. The intersection graph conjecture for loop diagrams // J. knot theory ramifications. 2000. **9**. 187–211.
17. Chmutov S., Lando S. Mutant knots and intersection graphs // Algebr. and Geom. Topol. 2007. **7**. 1579–1598.

Поступила в редакцию
19.06.2019