

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
Passport: <http://sjifactor.com/passport.php?id=22257>

KONUS KESIMLARI VA ULARNING FOKUSLARI

**Sanaqul Xo‘jamovich
Abjalilov**
NavDPI dotsenti

**Otabek Ahmadovich
Begmurodov**
NavDPI o‘qituvchisi

**Iroda Po‘lat qizi
Sadullayeva**
NavDPI magistranti

ANNOTATSIYA

Maqolada qadimgi grek olimi Apolloniy Pergskiyning “Konus kesimlari” asarida keltirilgan konus kesimlarining fokuslari va ularni aniqlash usullari haqida fikr yuritilgan.

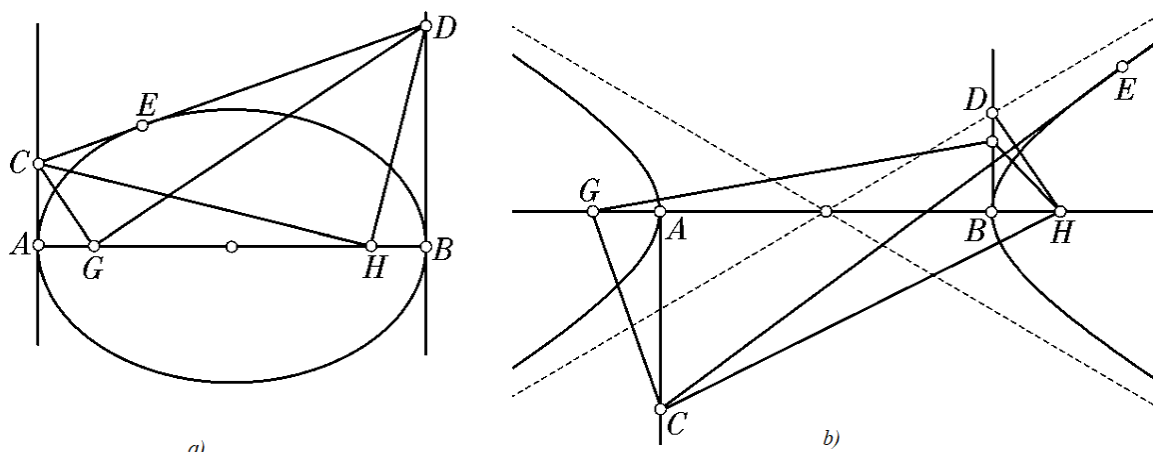
Kalit so‘zlar: Apolloniy Pergskiy, ellips, parabola, giperbola, fokus.

Qadimgi grek olimi Apolloniy Pergskiy o‘zining “Konus kesimlari” asari bilan o‘z zamonasining va keyingi avlod matematiklarining ilmiy izlanishlariga juda katta hissa qo‘shdi. Ushbu ilmiy asar o‘z davridayoq mashhurlikka erishdi va zamondoshlarining ilmiy asarlarida keng qo‘llanila boshladi. Jumladan, Yevklid o‘zining “Negizlar” asarida Apolloniy ishlariga bevosita murojaat qilganligini ko‘rishimiz mumkin [1,2].

Ellips va giperbolaning fokuslari. Hozirgi zamon matematikasida konus kesimlariga ta’rif berishda ularning fokuslari bilan bog‘liq geometrik o‘rinlardan foydalaniladi [3]. Qadimda fokuslar qanday usulda kiritilganligi va ular qanday xossalarga ega ekanligi haqida fikr yuritimiz.

Apolloniy ellips va giperbolaning fokuslarini konus kesimlari asarida III_{45} - tasdiq yordamida kiritgan: “Agar giperbola, ellips, doira aylanasi va qarama-qarshi giperbola o‘qlari uchlarida [o‘qqa] to‘g‘ri burchak ostida [parallel] to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa va o‘qning ikkala oxiriga shunday kesmalar (giperbola holatida qo‘shiladi, ellips holatida ayiriladiki) qo‘yilsaki, uchlari bu nuqtalarda va tomonlari chiziqqa o‘tkazilgan urinmaning parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalarida bo‘lgan burchak to‘g‘ri burchak bo‘ladi.

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
 Passport: <http://sjifactor.com/passport.php?id=22257>



1-chizma

Yuqorida aytilgan o'q AB, AC va BD to'g'ri chiziqlar AB o'qning oxirlaridan o'tgan o'qqa perpendikulyar to'g'ri chiziqlar, CD to'g'ri chiziq ellips (yoki giperbolaning) E nuqtasidan o'tkazilgan urinmasi. CGD va CHD burchaklar to'g'ri burchaklardir (1-chizma a, b).

Bir tomoni ellipsning katta o'qi yoki giperbolaning haqiqiy o'qi $2a$, ikkinchi tomoni $2p = 2b^2/a$ ga teng to'g'ri to'rtburchak, bu erda b - ellipsning kichik o'qi yoki giperbolaning mavhum o'qi. Shuning uchun bu maydonning chorak qismi b^2 ga teng. Apolloniy ellips yoki giperbola o'qining G va H nuqtalarini shunday aniqlaydiki, u quyidagi tengliklar orqali ifodalanadi

$$AG \cdot GB = AH \cdot HB = b^2. \quad (1)$$

Apolloniy aniqlagan G va H nuqtalar zamonaviy geometriyada ellips va giperbolaning fokuslari deb ataladi.

Konus kesimlarini umumiy tenglamasini ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin [1]:

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2. \quad (2)$$

Ushbu tenglikda eksentrisitet e ellips uchun $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, giperbola uchun $e^2 = (a^2 + b^2)/a^2$ ko'rinishida aniqlanadi. Bu yerda a va b ellips va giperbolaning yarim o'qlari.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ va $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamalar bilan berilgan ellips va giperbolaning fokuslari absissalari ae va $-ae$ ga teng ekanligini isbotlash mumkin. Buning uchun fokuslarning absissalarini ak va $-ak$ deb belgilaymiz. Ellips holatida $AG = HB = a - ak$, $AH = GB = a + ak$ bo'lganligidan, (1) tenglikka ko'ra

$AG \cdot GB = AH \cdot HB = (a - ak)(a + ak) = a^2 - a^2k^2 = b^2$, munosabatga ega bo'lamiz. Bundan, $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = e^2$.

Giperbola uchun $AG = HB = ak - a$, $AH = GB = ak + a$ ekanligidan, (1) tenglikka ko'ra

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)

Passport: <http://sjifactor.com/passport.php?id=22257>

$$AG \cdot GB = AH \cdot HB = (ak - a)(ak + a) = a^2 k^2 - a^2 = b^2.$$

$$\text{Bundan quyidagini topamiz } k^2 = (a^2 + b^2)/a^2 = e^2.$$

III_{45} - tasdiqning isboti III_{42} - tasdiqdan kelib chiqadi. Ya'ni, ellips (yoki giperbola) diametrining oxirlaridan ordinataga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, chiziqqa o'tkazilgan urinma bu parallel to'g'ri chiziqlardan kesgan kesmalar ko'paytmasi $AC \cdot BD = b^2$ munosabatni qanoatlantiradi. Ushbu tenglik va $AG \cdot GB = AH \cdot HB = b^2$ tengliklardan, $AG \cdot GB = AC \cdot BD$ va $AH \cdot HB = AC \cdot BD$ tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklarning birinchisi ACG va BDG uchburchaklarining o'xshashlini, ikkinchisi ACH va BDH uchburchaklarning o'xshashligini anglatadi. Ushbu to'rtta uchburchakning barchasi to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli, AGC va BGD burchaklarning yig'indisi xuddi AHC va BHD burchaklarining yig'indisi kabi to'g'ri burchakka teng bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, CGD va CHD burchaklar ham ellips yoki giperbolani E nuqtasining istalgan holati uchun to'g'ri burchaklardir.

Yuqoridagi ma'lumotlar Appoloniylar asarlaridagi ellipsning fokusini topish masalasi edi. Endi zamonaviy geometriyada ellips haqidagi mulohazalarga to'xtalib o'tamiz.

Bizga ellips fokuslari $G(-c;0)$, $H(c;0)$ va ellipsga tegishli ixtiyoriy $E(x;y)$ nuqta berilgan bo'lsin. Ellipsga berilgan zamonaviy ta'rifga ko'ra ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqtadan uning fokuslari G va H gacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ bo'lishi kerak, ya'ni, $\rho(G, E) + \rho(H, E) = 2a$. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \rightarrow (c^2 - a^2)(x^2 - a^2) + y^2 a^2 = 0$$

Bu yerda $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash olsak, $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ bo'ladi.

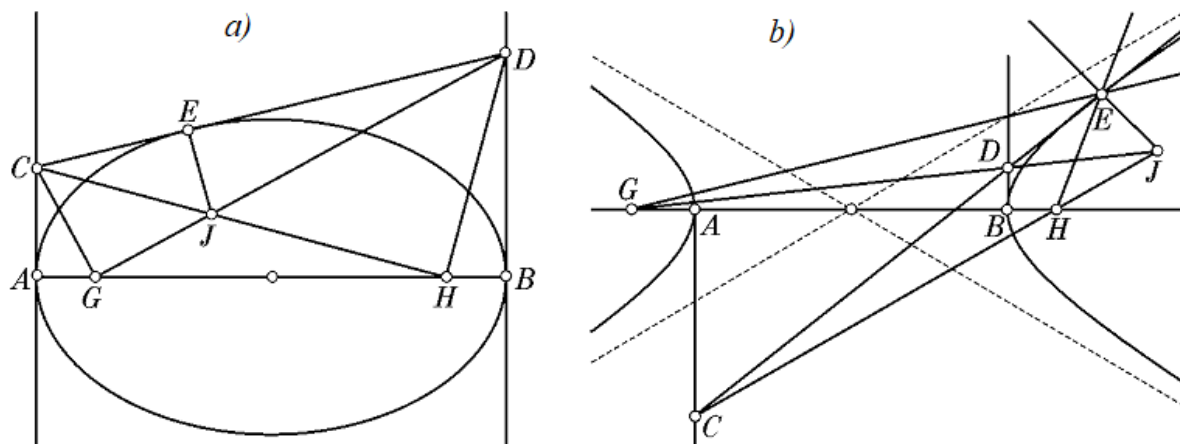
Tenglikni har ikkala tarafini $a^2 b^2$ ga bo'lib yuborsak,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellips kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

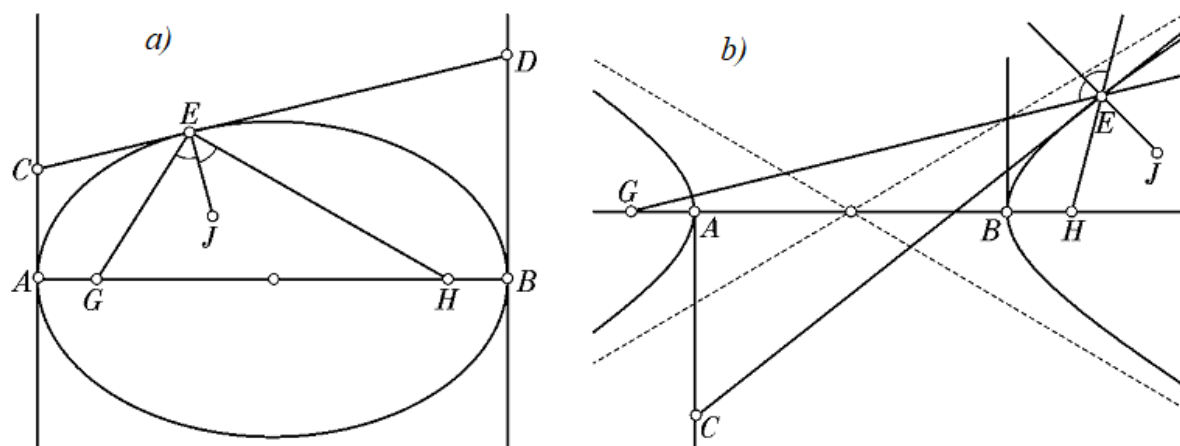
Fokuslarning optik xossalari. III_{47} tasdiqda CH va GD larning kesishgan nuqtasi J nuqta desak, JE to'g'ri chiziq konus kesimining E nuqtadan o'tgan CD urinmasiga ortogonal bo'lishi isbotlangan (2-chizma). Zamonaviy differensial geometriyada JE to'g'ri chiziq ellips (giperbola) ning E nuqtasidagi normali deyiladi.

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)
 Passport: <http://sjifactor.com/passport.php?id=22257>



2-chizma

Ushbu tasdiq asosida Apolloniy III₄₈ tasdiqda GE va HE tog'ri chiziqlar JE to'g'ri chiziq bilan va shuningdek CD urinma bilan teng burchaklar hosil qilishini isbotlagan. Ellips misolida bu tasdiq bir fokusdan chiquvchi yorug'lik nuri ellipsdan qaytib ikkinchi fokusga yig'ilishini bildiradi (3-chizma). Kepler fokusni alanga oldirish uchog'i deb atagan. Chunki, ikkinchi fokusga issiq jismni qo'ysak, birinchi fokusdan chiquvchi yo'rug'lik nuri uni alanga olishiga sabab bo'ladi.



3-chizma

Giperbola holatida ushbu tasdiq bir fokusdan chiquvchi yorug'lik nuri giperbolaning ikkinchi tarmog'iga urilib qaytgan nurning to'ldiruvchisi ikkinchi fokusdan o'tashini anglatadi.

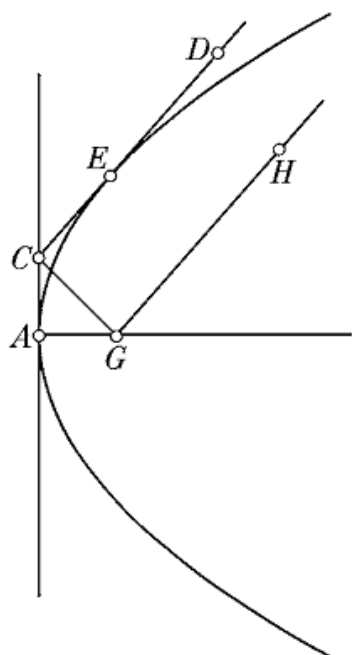
Parabolaning fokusi. "Konus kesimlari" da Apolloniy parabolalarning fokuslarini haqida so'z yuritmagan. Uning fokusini yuqoridagilarni hisobga olib qanday kiritish mumkin?

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan $y^2 = 2px$ parabola uchun: absissa o'qi parabolani o'qi, absissasi $x = p/2$ bo'lgan G nuqta parabola fokusidir (4-chizma).

Scientific Journal Impact Factor (SJIF 2022=5.016)

Passport: <http://sjifactor.com/passport.php?id=22257>

Uchi A nuqtada va o'qi AG bo'lgan parabolani ko'rib chiqaylik. Parabolaning uchida joylashgan AC urinmasini chizamiz va G fokusni parabolaning o'qida belgilaymiz (3-chizma). Parabolaning ixtiyoriy E nuqtasida unga CD urinmani o'tkazamiz va G nuqtadan ushbu urinmaga parallel ravishda GH to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan HGC burchak to'g'ri burchak bo'ladi.



4-chizma

Haqiqatan ham, $y^2 = 2px$ parabolaning koordinatalari (x_0, y_0) bo'lgan E nuqtasidagi urinmasi $y_0 y = p(x + x_0)$ tenglama bilan aniqlanadi. Demak, CD va GH chiziqlarning burchak koeffitsientlari p/y_0 , C nuqtaning ordinatasi esa px_0/y_0 bo'ladi. $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortogonal birlik vektorlarni AG va AC to'g'ri chiziqlar bo'ylab yo'naltirilganligini hisobga olsak, GH to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a} = \vec{i} + \frac{p}{y_0} \vec{j}$ va GC to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori $\vec{b} = -\frac{p}{2} \vec{i} + \frac{px_0}{y_0} \vec{j}$ ko'rinishida bo'ladi. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{p}{2} + px_0/y_0^2$.

E nuqta $y^2 = 2px$ parabolaning nuqtasi bo'lganligi sababli, $y_0^2 = 2px_0$ ekanligidan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Bundan, CGH burchak to'g'ri burchak ekanligi kelib chiqadi.

REFERENCES

1. Б.А.Розенфельд “Аполлоний Пергский” Москва-2004.
2. Евклид. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии А.Д.Мордухай-Болтовского при редакционном участии И.Н.Веселовского. (Москва - Ленинград: Гостехиздат, 1949-50. - Классики естествознания. Математика, механика, физика, астрономия).
3. N.D.Dodajonov, M.Sh.Jo'rayeva “Geometriya” 1-qism, “O'qituvchi” 1996-y.
4. S.X.Abjalilov, D.N.Ashurova, O.A.Begmurodov ON MODELING OF MECHANICAL VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC BOARDS IN ELECTRONIC DEVICES, ACADEMICIA An International Multidisciplinary Research Journal (Double Blind Refereed & Peer Reviewed Journal) Vol. 11, Issue 4, April 2021