

Ю. П. АРТЮХИН, С. А. МАЛКИН

КОНТАКТ ПЛАСТИН С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

Решается контактная задача об изгибе пластин, ограниченном гладким жестким плоским основанием. Решение проводится в интегральной постановке аналитически и численно непрямым методом граничных элементов (НМГЭ). Аналитически задача решается для круглой пластины с учетом и без учета обжатия. В случае неучета обжатия задача становится математически некорректной и дает скачкообразное распределение контактных напряжений. Учет обжатия приводит к уравнению Фредгольма Прода, которое решается сведением к краевой задаче. В этом случае контактные напряжения принимают гладкий вид. Для решения задачи для пластин произвольных очертаний предложен численный алгоритм на основе НШЭ. Сравнение аналитического и численного решений для круглых пластин показало хорошую согласованность результатов как по областям контакта, так и по контактными напряжениям.

Контактные задачи теории пластин могут быть сформулированы в виде эллиптических вариационных неравенств с односторонним ограничением внутри области [1]. В настоящей работе предлагается алгоритм решения контактных задач в интегральной постановке [2].

Рассмотрим задачу об изгибе круглой пластины радиуса r и под равномерно распределенной нагрузкой q , ограниченном гладким жестким плоским основанием, отстоящим от пластины на расстоянии a . Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, контактные напряжения $a(x, y)$ и область контакта S .

Решим задачу без учета обжатия пластины. Общее решение уравнения осесимметричного изгиба пластины

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \text{ имеет вид}$$

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + \frac{1}{2} C_1 r^2 \ln r + C_1 \ln r + \frac{1}{2} C_2 r^2 - \frac{1}{4} C_3 r^2 + C_4. \quad (1)$$

Неизвестными здесь будут четыре константы общего решения и радиус контакта b . Для их определения используем следующие условия. Два граничных условия жесткого защемления краев пластины

$$w(a) = 0, \quad w'(a) = 0. \quad (2)$$

На границе контакта известен прогиб и угол поворота пластины, изгибающий момент равен нулю, тогда

$$w(b) = \alpha, \quad w'(b) = 0, \quad w''(b) + \frac{\nu}{r} w'(b) = 0. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (2), (3) дает радиус контакта b . Контактные

напряжения внутри области контакта будут равномерно распределены с интенсивностью q , а распределение напряжений по линии границы области определяется из условия статического равновесия пластины и будет иметь вид погонного усилия. Это решение является математически некорректным, поэтому решение задачи будем проводить с учетом обжатия пластины в интегральной постановке. Функция Грина защемленной круглой пластины для кольцевой нагрузки, приложенной по радиусу ξ , имеет вид [3]

$$G_0(r, \xi) = \frac{1}{8Da^2} \left[(a^2 + r^2)(a^2 - \xi^2) - 2a^2(r^2 + \xi^2) \ln\left(\frac{a}{\xi}\right) + 2a^2 \left(-r^2 + \xi^2 + (r^2 + \xi^2) \ln\left(\frac{r}{\xi}\right) \right) U(r - \xi) \right], \quad (4)$$

где $U(r - \xi)$ - единичная функция Хевисайда. В такой постановке условие контакта запишется следующим образом [4]:

$$\varepsilon \sigma(r) + \int_0^b G(r, \xi) \xi \sigma(\xi) d\xi = -D\alpha + Dw_v(r), \quad |r| < b. \quad (5)$$

$$w_v(r) = \frac{qr^4}{64D}$$

Здесь частное решение уравнения осесимметричного изгиба пластин, $6 = kD$; k - коэффициент постели, $G(r, \xi) = DG_0(r, \xi)$. Учет обжатия пластины моделировался основанием Винклера, коэффициент k равен [4]

$$k = \frac{h(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2E(1 - \nu)},$$

где h - толщина пластины; E - модуль упругости; ν - коэффициент Пуассона. Интегральное уравнение (5) можно свести к краевой задаче на интервале $(0, b)$ [4]:

$$\nabla^4 \sigma(r) + \beta^4 \sigma(r) = \beta^4 q, \quad (6)$$

$$\xi \left(G(r, \xi) \frac{d}{d\xi} \nabla_\xi^2 F(\xi) - \nabla_\xi^2 F(\xi) \frac{d}{d\xi} G(r, \xi) + \nabla_\xi^2 G(r, \xi) \frac{d}{d\xi} F(\xi) - F(\xi) \frac{d}{d\xi} \nabla_\xi^2 G(r, \xi) \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=b} = 0, \quad (7)$$

$$F(\xi) = -D\alpha + Dw_v(\xi) - \sigma(\xi), \quad \beta^4 = \frac{1}{\varepsilon}$$

где ε - Однородное уравнение (6) можно раз-

$$-i\beta^2 \sigma(r) + \sigma'(r)/r + \sigma''(r) = 0, \quad (8)$$

бить на два:

$$i\beta^2 \sigma(r) + \sigma'(r)/r + \sigma''(r) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) имеет решение

$$\sigma(r) = K_0 \left((-1)^{1/4} \beta r \right) A_1 + I_0 \left((-1)^{1/4} \beta r \right) A_2, \quad 0$$

Где $\text{Ln}(r)$ и $\text{Ku}(r)$ - модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода; $\int$, - постоянные интегрирования. Решением уравнения (9) является

$\sigma(r) = K_0 \left[-(-1)^{3/4} \beta r \right] A_3 + I_0 \left[(-1)^{3/4} \beta r \right] A_4$. Функция $I_0(\beta r)$ имеет особенность при $r = 0$, и поэтому постоянные при ней приравняем нулю. Введем функции Томпсона

$$\text{ber}(x) = \text{Re} \left[I_0 \left[(-1)^{1/4} x \right] \right], \quad \text{bei}(x) = \text{Im} \left[I_0 \left[(-1)^{1/4} x \right] \right].$$

Видно, что они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\nabla^2 \text{ber}(\beta r) = -\beta^2 \text{bei}(\beta r), \quad \nabla^2 \text{bei}(\beta r) = \beta^2 \text{ber}(\beta r).$$

Тогда регулярное решение уравнения (6) имеет вид

$$\sigma(r) = C_1 \text{ber}(\beta r) + C_2 \text{bei}(\beta r) + q. \quad (10)$$

Таким образом, неизвестными являются две константы выражения контактного напряжения и радиус контакта b . Рассмотрим условие (7) и выпишем его члены, учитывая, что при $r = b$ оно выполняется тождественно:

$$bG(r, b) = 0,125b \left(\frac{1}{a^2} (a^2 - b^2) (a^2 + r^2) - 2(b^2 + r^2) \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right),$$

$$b \frac{d}{d\xi} G(r, \xi) \Big|_{\xi=b} = 0,25 \left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) r^2 - 2b^2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right),$$

$$b \nabla_{\xi}^2 G(r, \xi) \Big|_{\xi=b} = 0,5 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} - 2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right),$$

$$b \frac{d}{d\xi} \nabla_{\xi}^2 G(r, \xi) \Big|_{\xi=b} = 1,$$

$$\frac{d}{d\xi} \nabla_{\xi}^2 F(\xi) \Big|_{\xi=b} = 0,5bq + C_1 \frac{1}{\beta} \text{bei}'(\beta b) - C_2 \frac{1}{\beta} \text{ber}'(\beta b),$$

$$\nabla_{\xi}^2 F(\xi) \Big|_{\xi=b} = -0,125a^2q + 0,25b^2q + C_1 \frac{1}{\beta^2} \text{bei}(\beta b) - C_2 \frac{1}{\beta^2} \text{ber}(\beta b),$$

$$\frac{d}{d\xi} F(\xi) \Big|_{\xi=b} = 0,0625b(b^2 - a^2)q - \frac{1}{\beta^3} (C_2 \text{bei}'(\beta b) + C_1 \text{ber}'(\beta b)),$$

$$F(b) = 0,015625(a^2 - b^2)^2 q - Da.$$

Из приведенных выражений видно, что условие (7) представляет собой полином по r , в котором присутствуют только нулевая и вторая степени. Так как это условие должно выполняться при любых $r \in (Q, b)$, то приравняем нулю коэффициенты при обеих степенях r . В результате получаем два условия для определения неизвестных, в которые постоянные C_1 и C_2 входят линейно. Эти условия позволяют выразить постоянные через b . Для отыскания области контакта необходимо поставить на ее границе условие равенства ну-

лю контактных напряжений в силу плавного сопряжения форм поверхностей пластины и основания

$$\text{ст}(b) = 0. \quad (11)$$

Это уравнение является трансцендентным относительно b . Все приведенные вычисления проводились в пакете программ Mathematica 4. Уравнение (11) имеет настолько громоздкий вид, что встроенные процедуры пакета не позволяют его решить. Для его решения была создана процедура, реализующая метод половинного деления, со следующим кодом:

```
bisect[f_, a_, b_, eps_] := (If[N[f[a]] f[b]] > 0, z = "a,b", t = a; s = b;
  While[Max[N[f[t]], N[f[s]]] > eps, u = N[f[t]];
    v = N[f[s]]; w = N[f[(t+s)/2]];
    If[u w >= 0, t = (t+s)/2; If[u w > 0, s = (t+s)/2; z = N[f[t]]; z).
```

Входные параметры процедуры bisect имеют следующий смысл: f- заголовок функции; a,b - интервал функции, в которых она имеет разные знаки; eps - погрешность решения.

Для случаев неучета и учета обжатия была решена задача для пластины радиуса $a = 0,5\text{м}$, толщиной $h = 0,05\text{л}^*$, контактирующей с жестким основанием, отстоящим на расстояние $a = 0,01\text{л}^*$. Свойства материала пластины: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{10}\text{Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. На рис. 1, 2 показаны прогиб пластины и распределение изгибающих моментов для задачи без учета обжатия при нагрузке $q = 20 \cdot 10^7\text{Па}$.

На рис. 3 представлена зависимость радиуса контакта и нагрузки, приложенной к пластине: 1 - без учета обжатия, 2 - с учетом обжатия.

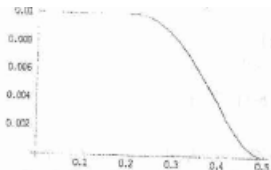


Рис. 1. Прогиб пластины без учета обжатия

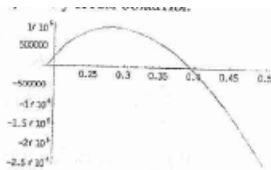


Рис. 2. Распределение изгибающих моментов

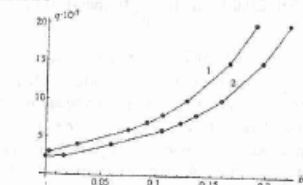


Рис. 3. Зависимость радиуса контакта и нагрузки

На рис. 4 показано развитие контактных напряжений для этой задачи с учетом обжатия при изменении нагрузки от $2,4 \cdot 10^7$ Па до $20 \cdot 10^7$ Па.

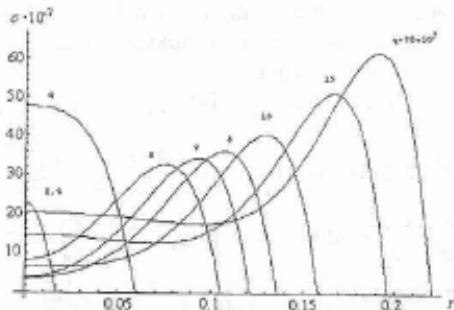


Рис.4. Развитие контактных напряжений

При рассмотрении задачи для пластин произвольной формы аналитическое решение получить не удастся. В этом случае решение проводится численно непрямым методом граничных элементов [5]. Прогиб пластины $w(x,y)$ записывается в интегральном виде

$$w(x,y) = \int_{\Omega} qG(x,y,\xi_1,\xi_2) d\Omega(\xi_1,\xi_2) - \int_{\Gamma} (\xi_1,\xi_2) G(x,y,\xi_1,\xi_2) dS(\xi_1,\xi_2) + \\ + \int_{\Gamma} p(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta) d\Gamma(\xi,\eta) - \int_{\Gamma} m(\xi,\eta) \frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial n(\xi,\eta)} d\Gamma(\xi,\eta).$$

Здесь Ω , Γ - область и граница пластины; $p(\xi,\eta)$ и $m(\xi,\eta)$ - неизвестные компенсирующие нагрузка и момент, распределенные по границе Γ ; $n(\xi,\eta)$ - нормаль к границе Γ . Функция $G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{1}{2} \ln r$ является фундаментальным решением изгиба пластины, где r - расстояние между точками (x,y) и (ξ,η) , которое дает значение прогиба бесконечной пластины в точке (x,y) от действия единичной силы в точке (ξ,η) . Таким образом, имеем три неизвестные подынтегральные функции $q(\xi,\eta)$, $p(\xi,\eta)$ и неизвестную область S , по которой ведется интегрирование. Для определения этих неизвестных используем следующие условия. Два граничных условия закрепления пластины, которые в случае жесткого защемления имеют вид

$$w(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial n(x,y)} = 0, (x,y) \in \Gamma.$$

Условие контакта с учетом обжатия пластины

$$-k\sigma(x,y) + w(x,y) = \alpha, (x,y) \in S.$$

Условие равенства нулю контактных напряжений на границе области контакта

$$\sigma(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_1.$$

Первые три условия имеют интегральный вид, а последнее - конечный. Подставив выражение для $v(x, y)$ в приведенные выше условия, получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q G(x, y, \zeta_1, \zeta_2) d\Omega(\zeta_1, \zeta_2) - \int_S \sigma(\zeta_1, \zeta_2) G(x, y, \zeta_1, \zeta_2) dS(\zeta_1, \zeta_2) + \\ & + \int_{\Gamma} p(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) - \int_{\Gamma} m(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} d\Gamma(\xi, \eta) = 0, (x, y) \in \Gamma, \\ & \int_{\Omega} q \frac{\partial G(x, y, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial n(x, y)} d\Omega(\zeta_1, \zeta_2) - \int_S \sigma(\zeta_1, \zeta_2) \frac{\partial G(x, y, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial n(x, y)} dS(\zeta_1, \zeta_2) + \\ & + \int_{\Gamma} p(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n(x, y)} d\Gamma(\xi, \eta) - \int_{\Gamma} m(\xi, \eta) \frac{\partial^2 G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta) \partial n(x, y)} d\Gamma(\xi, \eta) = 0, (x, y) \in \Gamma, \\ & -k\sigma(x, y) + \int_{\Omega} q G(x, y, \zeta_1, \zeta_2) d\Omega(\zeta_1, \zeta_2) - \int_S \sigma(\zeta_1, \zeta_2) G(x, y, \zeta_1, \zeta_2) dS(\zeta_1, \zeta_2) + \\ & + \int_{\Gamma} p(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) - \int_{\Gamma} m(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} d\Gamma(\xi, \eta) = \alpha, (x, y) \in S, \\ & \sigma(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_1. \end{aligned}$$

Граница Γ разбивается на N постоянных граничных элементов, интегралы по граничным элементам вычисляются аналитически. Постоянный элемент предполагает постоянные значения компенсирующих нагрузки и момента в своих пределах. При дискретизации интеграла по S область контакта аппроксимируется трехузловыми треугольными элементами. В пределах такого элемента контактное напряжение берется в виде линейной функции. Искомая граница области контакта разбивается на N_p узлов, координаты которых определяются в полярной системе координат с центром в некоторой точке, лежащей в области контакта. В качестве этой точки рекомендуется брать точку максимального прогиба рассматриваемой пластины. Для каждой точки разбиения границы Γ , угловая координата полагается постоянной, это позволяет отыскивать только радиусы точек $p_k, k = 1, \dots, N_p$. Получаемая дискретная система уравнений является нелинейной относительно p_k и решается методом Ньютона. Для пластин простых форм (круг, прямоугольник) решение сходится при задании начального приближения области контакта в виде круга. Для более сложных форм пластин такое приближение дает сходимость только в случае малых областей контакта. При исследовании задач с развитыми областями контакта требуется использовать пошаговое нагружение, беря за начальное приближение области контакта решение с предыдущего шага.

В таблице 1 представлено сравнение результатов аналитического и численного методов, где σ_0 - контактные напряжения в центре пластины; $\sigma_{\max}$ - максимальные напряжения в области контакта. При решении МГЭ граница пластины разбивалась на 120 граничных элементов, граница области контакта - на 36 узлов, область контакта аппроксимировалась 1332 треугольными элементами.

Таблица 1

Сравнение аналитического и численного решений

$q, 10^7 \text{ Па}$	Аналитическое решение			Численное решение МГЭ		
	$b, \text{ м}$	$\sigma_0, 10^8 \text{ Па}$	$\sigma_{\max}, 10^8 \text{ Па}$	$b, \text{ м}$	$\sigma_0, 10^8 \text{ Па}$	$\sigma_{\max}, 10^8 \text{ Па}$
2,4	0,01669	2,27853	2,27853	0,01649	2,22968	2,22968
4	0,05953	4,75655	4,75655	0,05947	4,79245	4,79245
6	0,10532	0,812522	3,26457	0,10521	0,828981	3,27478
8	0,13630	0,357106	3,60498	0,13620	0,356940	3,62171
10	0,15878	0,660395	4,02106	0,15868	0,644668	4,03364
15	0,19628	1,45285	5,10985	0,19620	1,396097	5,11582

Приведенная таблица демонстрирует хорошее совпадение результатов численного решения с аналитическим. Предложенный численный алгоритм позволяет решать контактные задачи для пластин произвольных очертаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравчук А. С. Вариационный метод исследования контактного взаимодействия и его реализация на ЭВМ // Расчеты на прочность. 25. - М.: Машиностроение, 1984. - С. 33-50.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980. - 411 с.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 636 с.
4. Артюхин Ю. П. Контактные задачи для упругих элементов конструкций. - Наб. Челны: КамПИ, 1988. - 78 с.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 494 с.

Артюхин Юрий Павлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» Казанского государственного университета, окончил физико-математический факультет Казанского государственного университета. Имеет монографии и статьи в области теории и методов расчета пластин и оболочек.

Малкин Сергей Александрович, аспирант кафедры «Теоретическая механика» Казанского государственного университета, окончил механико-математический факультет Казанского государственного университета. Имеет статьи по теории пластин и оболочек.