

КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ КЭЛИ-КЛЕЙНА

И.В. КОСТЯКОВ, В.В. КУРАТОВ

*Отдел математики Коми НЦ УрО РАН, г. Сыктывкар
kostyakov@dm.komisc.ru, kuratov@dm.komisc.ru*

Рассмотрены предельные переходы и аналитические продолжения калибровочной группы $SO(3)$ в модели Джорджи-Глэшоу. Получен набор лагранжианов полей материи, локально инвариантных при преобразованиях группами Кэли-Клейна. Орбитами калибровочно эквивалентных полей материи при этом являются двумерные пространства постоянной кривизны Кэли-Клейна. Использована унитарная калибровка, в которой явно видна массивность некоторой части калибровочных полей без использования хиггсова потенциала и концепции спонтанного нарушения симметрии. Показано, что, если все-таки использовать спонтанное нарушение симметрии и потенциал, набор массивных полей оказывается аналогичным. Предложены лагранжианы Янга-Миллса для калибровочных полей Кэли-Клейна.

Ключевые слова: калибровочные теории, неполупростые группы, контракции, механизм Хиггса

I.V. KOSTYAKOV, V.V. KURATOV. GAUGE CAYLEY-KLEIN SYMMETRIES

The limit transitions and analytic continuations of the $SO(3)$ gauge group in the Georgi-Glashow model are considered. A set of Lagrangian with Cayley-Klein symmetries was obtained. In this case, two-dimensional Cayley-Klein spaces of constant curvature are the orbits of gauge equivalent fields of matter. We used a unitary gauge, where the massiveness of some of the gauge fields is obvious without using the Higgs potential and the concept of spontaneous symmetry breaking. It is shown that if all the same to use spontaneous symmetry breaking and the potential then the set of massive fields is similar. The Yang-Mills Lagrangians for gauge Cayley-Klein fields are proposed.

Key words: gauge theories, nonsemisimple groups, contractions, Higgs mechanism

1. Введение

Теории с неполупростыми калибровочными группами, являющимися симметриями пространства-времени, используются в гравитации и механике сплошных сред достаточно давно [1]. Калибровочная теория гравитации основывается на группе Пуанкаре, являющейся полупрямым произведением группы Лоренца $SO(3,1)$ и пространственно-временных трансляций $T(4)$ [2]. В механике сплошных сред калибровочными полями описываются дислокации, дисклинации, точечные дефекты [3]. В качестве калибровочных групп используются группы аффинных преобразований $GL(3) \ltimes T(3)$, а также полупрямое произведение группы вращений $SO(3)$ и группы трансляций $T(3)$, $SO(3) \ltimes T(3)$. В физике частиц нам известно лишь одно направление, где изучаются возможности неполупростых симметрий [4]. Важную роль в конформной теории поля и теории струн играет модель Наппи-Виттена, использующая центрально расширенную группу Пуанкаре [5]. В работе [6] изучаются полевые теории Черна-Саймонса с

неполупростыми калибровочными группами симметрии. Особенности калибровочных полей с неполупростой группой симметрии, а также способы построения их лагранжианов изучались в статьях [7]–[9]. В работе [10] калибровочные модели с неполупростыми группами, в том числе и с группами Кэли-Клейна $SO(3,j)$, рассматривались с использованием нильпотентных образующих. Предлагаемый подход к описанию неполупростых калибровочных моделей существенно опирается на выбор сферических координат и позволяет обеспечивать массивность калибровочным полям посредством изменения метрики в изопространстве, что оказалось эквивалентно добавлению еще одного инварианта. Идея использовать сферическую геометрию в пространстве полей материи для формулировки бозонного сектора электрослабой модели воплощена в работах [11]. Здесь же показано, что это позволяет обойтись без хиггсовского бозона. Важные аспекты калибровочных теорий в сферических координатах и интерпретация хиггсова поля как конформного пространственно-временного метрического фактора обсуждались в [12].

Цель данной работы – построение калибровочной теории с неполупростой группой симметрии. Известно, что предельные переходы или контракции [13, 14] позволяют связывать простые группы и алгебры Ли с неполупростыми. Поэтому представляется естественным использовать контракции для получения и изучения теорий с симметриями неполупростых групп. Ранее, в работе [15], мы предложили систематический метод контракции лагранжианов с калибровочной симметрией. Были получены теории с галилеевой и евклидовой калибровочными группами. Их неожиданным и привлекательным свойством оказалась массивность некоторых компонент калибровочных полей. В данной работе мы рассмотрим контракции векторной $SO(3)$ модели Джорджи-Глэшоу (ДГ). Эта модель, в свое время, предлагалась как вариант описания электрослабого взаимодействия. Кроме того, она интересна тем, что обладает монополярными решениями. Мы рассмотрим модификацию ДГ-модели, обобщив метрику внутреннего изопространства. Записав ее в деформированных специальных параметрах $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ сферических координатах и полагая квадраты этих параметров равными $0, \pm 1$, получим теории с калибровочными группами Кэли-Клейна. Эти группы действуют транзитивно на соответствующих внутренних двумерных пространствах постоянной кривизны. В радиальных переменных угловые поля можно интерпретировать как координаты на этих пространствах. Далее мы рассмотрим теорему Голдстоуна и механизм Хиггса для изучаемой модели, а также построение лагранжианов для калибровочных полей Кэли-Клейна.

2. Модель Джорджи-Глэшоу в сферических координатах

Модель ДГ возникает из глобально $SO(3)$ симметричного лагранжиана

$$L_0 = (\partial_\mu \vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi}) - V((\vec{\phi}, \vec{\phi})) = (\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + (\partial_\mu \phi_3)^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2), \quad (1)$$

инвариантного при преобразованиях

$$\vec{\phi} \longrightarrow G\vec{\phi} = \exp(\alpha_i T_i) \vec{\phi}, \quad (2)$$

где $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, T_i – генераторы инфинитезимальных поворотов группы вращений $G = SO(3)$

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ T_2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k. \quad (4)$$

Здесь ϵ_{ijk} абсолютно антисимметричный единичный тензор.

Преобразования (2) во внутреннем изопространстве R^3 с параметрами α_i , зависящими от точки пространства-времени x_μ , называются локальными. Требование инвариантности относительно локальных или калибровочных преобразований является основным принципом современной теории взаимодействия элементарных частиц [16]– [18]

$$\vec{\phi} \longrightarrow G(x_\mu) \vec{\phi} = \exp(\alpha_i(x_\mu) T_i) \vec{\phi}. \quad (5)$$

Для инвариантности лагранжиана (1) относительно локальных преобразований необходимо изменить производную

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad (6)$$

где калибровочные векторные поля A_μ лежат в алгебре Ли $so(3)$, $A_\mu = A_\mu^i T_i$. Из полей A_μ^i и их производных $\partial_\mu A_\nu^i$ можно построить лагранжиан калибровочных полей L_{YM} (для нашей модели мы строим его в секции 8, см. также [16]– [18]) и добавить его к исходному

$$L = (D_\mu \vec{\phi}, D_\mu \vec{\phi}) - V((\vec{\phi}, \vec{\phi})) + L_{YM} = (D_\mu \vec{\phi})_1^2 + (D_\mu \vec{\phi})_2^2 + (D_\mu \vec{\phi})_3^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + L_{YM}. \quad (7)$$

Формула $(D_\mu \vec{\phi})_i$ обозначает i -ю компоненту вектора $D_\mu \vec{\phi}$, а e квадрат понимается как суммирование по пространственно-временным индексам μ

$$(D_\mu \vec{\phi})_i^2 = (D_0 \vec{\phi})_i^2 - (D_1 \vec{\phi})_i^2 - (D_2 \vec{\phi})_i^2 - (D_3 \vec{\phi})_i^2.$$

Закон преобразования калибровочных полей A_μ при локальных преобразованиях полей материи $\vec{\phi}$ (5)

$$A'_\mu = G A_\mu G^{-1} + G \partial_\mu G^{-1}. \quad (8)$$

Нам понадобятся выражения (1), (7) в сферических координатах. Представим вектор $\vec{\phi}$ в виде $\rho \vec{n}(\theta, \varphi)$, где $\rho = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}$ есть радиус сферы, а единичный вектор $\vec{n}(\theta, \varphi)$ на поверхности сферы может быть записан в терминах вращений $\Omega \in SO(3)$ следующим образом: $\vec{n}(\theta, \varphi) = \Omega \vec{e}_1$, где $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$. Тогда

$$\partial_\mu \vec{\phi} = \Omega (\partial_\mu \rho + \rho \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega) \vec{e}_1 = \Omega (\partial_\mu \rho + \rho b_\mu) \vec{e}_1, \quad (9)$$

где

$$b_\mu = \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega = \begin{pmatrix} \cdot & b_\mu^1 & b_\mu^3 \\ -b_\mu^1 & \cdot & b_\mu^2 \\ -b_\mu^3 & -b_\mu^2 & \cdot \end{pmatrix} \quad (10)$$

лежит в алгебре Ли $so(3)$.

В координатах ρ, b_μ^i лагранжиан (1) выглядит так

$$\begin{aligned} L_0 &= (\partial_\mu \vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi}) - V((\vec{\phi}, \vec{\phi})) = \\ &= (\Omega (\partial_\mu \rho + \rho b_\mu) \vec{e}_1, \Omega (\partial_\mu \rho + \rho b_\mu) \vec{e}_1) - V(\rho^2) = \\ &= ((\partial_\mu \rho + \rho b_\mu) \vec{e}_1, (\partial_\mu \rho + \rho b_\mu) \vec{e}_1) - V(\rho^2) = \\ &= (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 ((b_\mu^1)^2 + (b_\mu^3)^2) - V(\rho^2), \end{aligned} \quad (11)$$

причем ρ и b_μ не меняются при глобальных вращениях (2). При локализации лагранжиана (11), учитывая (6), получаем

$$\begin{aligned} \partial_\mu \vec{\phi} &\rightarrow D_\mu \vec{\phi} = \Omega \left(\partial_\mu \rho + \rho \Omega^{-1} (\partial_\mu + A_\mu) \Omega \right) \vec{e}_1 = \\ &= \Omega \left(\partial_\mu \rho + \rho \Omega^{-1} D_\mu \Omega \right) \vec{e}_1 = \Omega (\partial_\mu \rho + \rho B_\mu) \vec{e}_1, \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$B_\mu = \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega + \Omega^{-1} A_\mu \Omega = \Omega^{-1} D_\mu \Omega. \quad (13)$$

После вычислений, аналогичных (11), лагранжиан переходит в

$$L = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 \left[(B_\mu^1)^2 + (B_\mu^3)^2 \right] - V(\rho^2) + L_{YM} \quad (14)$$

и является записью формулы (7) в радиальных переменных. Заметим, что в случае перехода к переменным, часть из которых не меняется при действии группы $G(x_\mu)$ (в нашем случае это ρ), введение компенсирующих полей A_μ для удлинения производной (6) при действии на эти переменные не требуется, т.е. $D_\mu \rho = \partial_\mu \rho$. Поля B_μ остаются инвариантными $B'_\mu = B_\mu$, поскольку они состоят из калибровочных полей A_μ , преобразующихся по закону (8) и полей материи $\Omega(\theta, \phi)$, принимающих значение в группе $SO(3)$ и преобразующихся как $\Omega' = G\Omega$. Преобразования калибровочных полей и полей материи компенсируют друг друга. Выражение (13) использовалось в [19] в контексте получения массивных теорий Янга-Миллса при нелинейной реализации калибровочной группы.

Мы обобщаем (11) с помощью функции $F(\rho)$ с сохранением глобальной вращательной симметрии и будем рассматривать лагранжиан

$$L = (\partial_\mu \rho)^2 + F(\rho) \rho^2 \left[(b_\mu^1)^2 + (b_\mu^3)^2 \right] - V(\rho^2). \quad (15)$$

В декартовых координатах это обобщение выглядит как добавление к (1) нового слагаемого

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + (\partial_\mu \phi_3)^2 - \\ &- V(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + (\mathcal{F} - 1) \left[(\phi_2 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2)^2 + \right. \\ &+ (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2)^2 + (\phi_3 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_3)^2 \left. \right] = \\ &= L_0 + f(\rho) L_\sigma. \quad (16) \end{aligned}$$

Функции $F(\rho)$ и $\mathcal{F}(\rho)$ связаны равенством $(F-1)\rho^{-2} = \mathcal{F} - 1$. Интересно отметить, что выражение в квадратных скобках пропорционально лагранжиану нелинейной σ -модели [16]–[17]

$$L_\sigma = \left(\partial_\mu \vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi} \right), \quad \left(\vec{\phi}, \vec{\phi} \right) = 1. \quad (17)$$

То же выражение можно интерпретировать и как инвариант, связанный с углом $d\alpha$, между векторами (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) и $(\phi_1 + d\phi_1, \phi_2 + d\phi_2, \phi_3 + d\phi_3)$:

$$\begin{aligned} d\alpha^2 &= \left[(\phi_1 d\phi_2 - \phi_2 d\phi_1)^2 + (\phi_2 d\phi_3 - \phi_3 d\phi_2)^2 + \right. \\ &+ (\phi_3 d\phi_1 - \phi_1 d\phi_3)^2 \left. \right] \left[\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \right]^{-2}. \quad (18) \end{aligned}$$

Еще одна возможная интерпретация связана с объемом, построенным на векторах (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , $(\phi_1 +$

$d\phi_1, \phi_2 + d\phi_2, \phi_3 + d\phi_3)$ и их векторном произведении, который, как нетрудно убедиться, также является инвариантом относительно действия группы $SO(3)$

$$dV = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_1 + d\phi_1 & \phi_2 d\phi_3 - \phi_3 d\phi_2 \\ \phi_2 & \phi_2 + d\phi_2 & \phi_3 d\phi_1 - \phi_1 d\phi_3 \\ \phi_3 & \phi_3 + d\phi_3 & \phi_1 d\phi_2 - \phi_2 d\phi_1 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, лагранжиан (16) есть сумма двух инвариантов, один из которых связан с квадратом длины (1), а второй – с углом (18) или объемом (19). Несколько инвариантов использовал в своих работах при построении многомерных теорий поля в полуриemannовых пространствах Р.И.Пименов [20]–[22]. Аналогичное обобщение локальных лагранжианов (7), (14) имеет вид в радиальных координатах

$$L = (\partial_\mu \rho)^2 + F(\rho) \rho^2 \left[(B_\mu^1)^2 + (B_\mu^3)^2 \right] + L_{YM}, \quad (20)$$

и в декартовых координатах

$$\begin{aligned} L &= (D_\mu \vec{\phi})_1^2 + (D_\mu \vec{\phi})_2^2 + (D_\mu \vec{\phi})_3^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + \\ &+ (\mathcal{F} - 1) \left[(\phi_2 (D_\mu \vec{\phi})_1 - \phi_1 (D_\mu \vec{\phi})_2)^2 + (\phi_2 (D_\mu \vec{\phi})_3 - \right. \\ &- \phi_3 (D_\mu \vec{\phi})_2)^2 + (\phi_3 (D_\mu \vec{\phi})_1 - \phi_1 (D_\mu \vec{\phi})_3)^2 \left. \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Уже в (20) видно, что выбор $F(\rho) \rho^2 = M^2 + f(\rho)$ дает массивные члены калибровочных полей. Введение дополнительной функции $F(\rho)$ в случае $SO(3)$ выглядит избыточным, но для нашей цели получения лагранжианов с симметриями $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ эта функция необходима.

3. Группы Кэли-Клейна и контракции

Напомним кратко, как можно описать все двумерные пространства Кэли-Клейна и их группы движения с помощью контракций группы $SO(3)$ в трехмерном, фундаментальном представлении. Двумерными пространствами Кэли-Клейна мы будем называть поверхности, задаваемые уравнениями

$$x^2 + \varepsilon_1^2 y^2 + \varepsilon_2^2 z^2 = \text{const}, \quad (22)$$

где параметры $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$ принимают значения 0, ± 1 . Группами Кэли-Клейна называются группы изометрий этих пространств, сохраняющие соответствующую метрику

$$ds^2 = dx^2 + \varepsilon_1^2 dy^2 + \varepsilon_2^2 dz^2. \quad (23)$$

Контракция – это сингулярная операция над группой или алгеброй Ли, приводящая к изменению закона умножения в группе и обнулению части структурных констант в соответствующей алгебре [23]. В нашем случае это соответствует значению параметров $\varepsilon_k^2 = 0$. При $\varepsilon_k^2 = -1$, т.е. $\varepsilon_k = i$, будем иметь аналитическое продолжение.

Один из методов описания возможных контракций и аналитических продолжений группы $SO(3)$ состоит во введении параметров $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$ в групповую

матрицу следующим специальным способом [14]

$$G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \exp(\alpha_i T_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \exp \begin{pmatrix} \cdot & \varepsilon_1^2 \alpha_1 & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \alpha_3 \\ -\alpha_1 & \cdot & \varepsilon_2^2 \alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Возникающие при этом группы оказываются группами Кэли-Клейна $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с соотношениями ортогональности, деформированными параметрами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$G^t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (25)$$

сохраняющими следующую квадратичную форму

$$\rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2 = (\vec{\phi}, I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \vec{\phi}). \quad (26)$$

Здесь

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_1^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Генераторы групп Кэли-Клейна $T_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon_1) &= \begin{pmatrix} \cdot & \varepsilon_1^2 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ T_2(\varepsilon_2) &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_2^2 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \\ T_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [T_1(\varepsilon_1), T_2(\varepsilon_2)] &= T_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ [T_2(\varepsilon_2), T_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] &= \varepsilon_2^2 T_1(\varepsilon_1), \\ [T_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2), T_1(\varepsilon_1)] &= \varepsilon_1^2 T_2(\varepsilon_2), \end{aligned} \quad (29)$$

или

$$[T_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2), T_j(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] = \epsilon_{ijk}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) T_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (30)$$

где $\epsilon_{123} = -\epsilon_{213} = 1$, $\epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = \varepsilon_1^2$, $\epsilon_{231} = -\epsilon_{321} = \varepsilon_2^2$, а остальные равны нулю.

В алгебре Ли, где принимает значение векторное поле b_μ , параметры вводятся аналогично

$$\begin{aligned} b_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \Omega^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \partial_\mu \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \varepsilon_1^2 b_\mu^1 & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 b_\mu^3 \\ -b_\mu^1 & \cdot & \varepsilon_2^2 b_\mu^2 \\ -b_\mu^3 & -b_\mu^2 & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поля ϕ_i и их производные $\partial_\mu \phi_i$ выражаются через поля $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $b_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \vec{e}_1, \\ \partial_\mu \vec{\phi} &= \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) (\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) b_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \vec{e}_1. \end{aligned} \quad (32)$$

Поля $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $b_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ не изменяются под действием группы Кэли-Клейна, что является очень удобным при анализе контракций.

4. Глобальные $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ модели

Рассмотрим сначала контракции и аналитические продолжения в глобальном случае, а затем займемся их локализацией. Чтобы сконструировать лагранжианы, глобально инвариантные относительно преобразований из группы Кэли-Клейна $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, перейдем от переменных ϕ_i и их производных $\partial_\mu \phi_i$ к переменным $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $b_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ по формулам (32). Подставив эти замены в (1), получаем

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2 - V(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) + \\ &+ \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \varepsilon_1^2 \left[\varepsilon_2^2 (b_\mu^3)^2 + (b_\mu^1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Нетрудно непосредственной проверкой убедиться, что $\left[\varepsilon_2^2 (b_\mu^3)^2 + (b_\mu^1)^2 \right]$ является инвариантом на орбитах действия группы $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Очевидно, что $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $(\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2$ также являются инвариантами относительно действия этой группы. Тогда можно сконструировать следующий $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ инвариантный лагранжиан

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \left[\varepsilon_2^2 (b_\mu^3)^2 + (b_\mu^1)^2 \right] + \\ &+ (F(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - 1) \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \left[\varepsilon_2^2 (b_\mu^3)^2 + (b_\mu^1)^2 \right] - \\ &- V(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)). \end{aligned} \quad (34)$$

Этот же лагранжиан в декартовых координатах

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \phi_1)^2 + (\varepsilon_1 \partial_\mu \phi_2)^2 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\mu \phi_3)^2 - \\ &- V(\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2) + \left[\mathcal{F}(\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2) - 1 \right] \times \\ &\times \left[(\phi_2 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2)^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2)^2 + \right. \\ &\left. + \varepsilon_2^2 (\phi_3 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_3)^2 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Лагранжианы (34)–(35) описывают набор моделей с глобальной инвариантностью относительно групп Кэли-Клейна.

5. Теорема Голдстоуна

В реалистичных моделях потенциал $V(\phi)$, инвариантный относительно глобальных преобразований симметрии группы G , выбирается специальным способом для обеспечения ненулевых вакуумных конфигураций поля. При этом группа симметрии вакуумных конфигураций H является подгруппой группы G . В этом случае выполняется теорема Голдстоуна, которая гарантирует появление безмассовых частиц при спонтанном нарушении симметрии $G \rightarrow H$ при выборе конкретного вакуума [16]–[17]. Покажем, что в случае $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ симметрии появляется одно массивное поле и два безмассовых. Выберем в (35) потенциал V в виде

$$V = \frac{\lambda}{2} \left(\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (36)$$

Потенциал (36) имеет минимум при

$$\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2 = \frac{m^2}{\lambda}. \quad (37)$$

Таким образом, множество всех возможных вакуумных состояний – это поверхности Кэли-Клейна (37). В качестве вакуума выберем

$$\phi_1 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \phi_2 = \phi_3 = 0.$$

Возмущения вблизи этого вакуума обозначим через

$$\phi_1 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} + \sigma, \quad \phi_2 = u_2, \quad \phi_3 = u_3. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (36) и оставляя только слагаемые не выше второго порядка, имеем потенциал

$$V = 2m^2 \sigma^2. \quad (39)$$

Лагранжиан (35) становится таким

$$L = (\partial_\mu \sigma)^2 + (\varepsilon_1 \partial_\mu u_2)^2 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\mu u_3)^2 - 2m^2 \sigma^2 + \frac{m^2 f_0}{\lambda} \left((\partial_\mu u_2)^2 + \varepsilon_2^2 (\partial_\mu u_3)^2 \right), \quad (40)$$

где через f_0 мы обозначили первый не зависящий от полей член в разложении функции $\mathcal{F} - 1$. Поле σ приобретает массу, тогда как поля u_2, u_3 остаются безмассовыми, но их кинетические слагаемые испытывают конечную «перенормировку». При разных значениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ вакуумный вектор инвариантен относительно подгруппы $SO(2, \varepsilon_2)$ группы $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Алгебра Ли $so(2, \varepsilon_2)$ задается генератором $T_2(\varepsilon_2)$ и представляет собой либо вращения, либо псевдовращения, либо галилеевские бусты при $\varepsilon_2^2 = 1, -1, 0$ соответственно.

6. Локальные $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ инвариантные модели

Обобщим формулы (6), (13) на случай действия группы $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Вставляя $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в матрицы Ω и A_μ и производя замены

$$\begin{aligned} B_\mu &\longrightarrow B_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Omega^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \partial_\mu \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \\ &+ \Omega^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) A_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \varepsilon_1^2 B_\mu^1 & \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 B_\mu^3 \\ -B_\mu^1 & \cdot & \varepsilon_2^2 B_\mu^2 \\ -B_\mu^3 & -B_\mu^2 & \cdot \end{pmatrix}, \\ A_\mu &= A_\mu^i T_i \longrightarrow A_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = A_\mu^i T_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{aligned}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \longrightarrow D_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \partial_\mu + A_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (41)$$

в лагранжианах (34), (35) и добавив лагранжиан калибровочных полей $L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, имеем в радиальных координатах

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \left[(B_\mu^1)^2 + \varepsilon_2^2 (B_\mu^3)^2 \right] - \\ &- V(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) + L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \\ &+ (F(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - 1) \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \left[(B_\mu^1)^2 + \varepsilon_2^2 (B_\mu^3)^2 \right] = \\ &= (\partial_\mu \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2 + \rho^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times \\ &\times \left(\varepsilon_1^2 + F(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - 1 \right) \left[(B_\mu^1)^2 + \varepsilon_2^2 (B_\mu^3)^2 \right] - \\ &- V(\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) + L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (42) \end{aligned}$$

и в декартовых

$$\begin{aligned} L &= (D_\mu \vec{\phi})_1^2 + (\varepsilon_1 D_\mu \vec{\phi})_2^2 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 D_\mu \vec{\phi})_3^2 - \\ &- V(\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2) + \left[\mathcal{F}(\phi_1^2 + \varepsilon_1^2 \phi_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \phi_3^2) - 1 \right] \times \\ &\times \left[\left(\phi_2 (D_\mu \vec{\phi})_1 - \phi_1 (D_\mu \vec{\phi})_2 \right)^2 + \right. \\ &+ \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left(\phi_2 (D_\mu \vec{\phi})_3 - \phi_3 (D_\mu \vec{\phi})_2 \right)^2 + \\ &+ \varepsilon_2^2 \left(\phi_3 (D_\mu \vec{\phi})_1 - \phi_1 (D_\mu \vec{\phi})_3 \right)^2 \left. \right] + L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (43) \end{aligned}$$

Калибровочные преобразования в декартовых координатах выглядят так

$$\begin{aligned} \vec{\phi}' &= G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(x_\mu) \vec{\phi}, \\ A'_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(x_\mu) \partial_\mu G^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(x_\mu) + \\ &+ G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(x_\mu) A_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) G^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(x_\mu). \quad (44) \end{aligned}$$

Набор моделей (42), (43) будем называть моделями с калибровочными симметриями Кэли-Клейна. Поля $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $B_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ инвариантны при калибровочных преобразованиях так же, как ρ и B_μ .

Рассмотрим подробно разные варианты значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. При $\varepsilon_1^2 = 0, \varepsilon_2^2 = 1, \rho(0, 1) = \phi_1$ имеем вместо (42)

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \phi_1)^2 - V(\phi_1) + \\ &+ (F(\phi_1) - 1) \phi_1^2 \left[(B_\mu^1)^2 + (B_\mu^3)^2 \right] + L_{YM}(0, 1). \quad (45) \end{aligned}$$

При выборе $F(\phi_1) = 1 + M_B^2/\phi_1^2 + f(\phi_1)$ появляются два массивных калибровочных поля B_μ^1 и B_μ^3 с массой M_B и одно калибровочное поле B_μ^2 остается безмассовым. Число степеней свободы в (45) должно быть равно девяти, так как у нас было три поля материи ϕ_i (по одной степени свободы на каждое поле), и три безмассовых калибровочных поля A_μ^i (по две степени свободы на каждое). В (45) одна степень приходится на поле материи ϕ_1 , шесть – на два массивных калибровочных поля B_μ^1 и B_μ^3 и две степени – на безмассовое калибровочное поле B_μ^2 . Отметим, что при выборе $\varepsilon_2^2 = -1$, поле B_μ^3 имело бы мнимую массу.

При $\varepsilon_1^2 = 1, \varepsilon_2^2 = 0$ (42) принимает вид

$$\begin{aligned} L &= (D_\mu \vec{\phi})_1^2 + (D_\mu \vec{\phi})_2^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2) + L_{YM}(1, 0) + \\ &+ (F(\phi_1^2 + \phi_2^2) - 1) (\phi_1^2 + \phi_2^2) (B_\mu^1)^2. \quad (46) \end{aligned}$$

При выборе $F(\phi_1^2 + \phi_2^2) = 1 + M_B^2/(\phi_1^2 + \phi_2^2) + f(\phi_1^2 + \phi_2^2)$ имеем одно массивное калибровочное поле B_μ^1 с массой M_B и два безмассовых калибровочных поля. В этом случае со степенями свободы также все в порядке, если заметить, что в лагранжиан (46) входит только комбинация $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \rho^2(1, 0)$ и степеней свободы, таким образом, всего восемь.

При $\varepsilon_1^2 = 0, \varepsilon_2^2 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} L &= (\partial_\mu \phi_1)^2 - V(\phi_1) + \\ &+ (F(\phi_1) - 1) \phi_1^2 (B_\mu^1)^2 + L_{YM}(0, 0). \quad (47) \end{aligned}$$

При выборе $F(\phi_1) = 1 + M_B^2/\phi_1^2 + f(\phi_1)$ также получается одно массивное калибровочное поле B_μ^1 с массой M_B и два безмассовых. В этом случае требуется более аккуратный подсчет степеней свободы. После приравнивания к нулю ε_i , в лагранжиане (43) имеем: два поля материи (две степени свободы) и три безмассовых калибровочных поля ($3 \times 2 = 6$ степеней свободы). В (47) получаем одно поле материи (одна степень свободы), одно массивное калибровочное (три степени свободы) и два безмассовых калибровочных поля ($2 \times 2 = 4$ степени свободы). Отметим, что в случаях (46), (47) контракция уменьшает первоначальное число степеней свободы на единицу.

Таким образом, специальный выбор функции F позволяет делать калибровочные поля массивными.

7. Механизм Хиггса

В случае локальной симметрии безмассовые голдстоуновские частицы, взаимодействуя с калибровочными полями, придают им массу [16]–[18]. Посмотрим, как работает механизм Хиггса в случае лагранжиана (43) с потенциалом (36). Выберем вакуум в виде

$$\vec{\phi}_0 = \left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, 0, 0 \right). \quad (48)$$

С помощью калибровочной группы $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ можно перевести вектор $(\phi, 0, 0)$ в любой произвольный вектор (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) . Это будет означать выбор калибровки

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = 0, \quad (49)$$

в которой лагранжиан (43) выглядит

$$L = (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) + L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \left(\varepsilon_1^2 + F(\phi^2) - 1 \right) \phi^2 \left[(A_\mu^1)^2 + \varepsilon_2^2 (A_\mu^3)^2 \right]. \quad (50)$$

При малых отклонениях от вакуума $\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} + u$, полагая, что $F(\phi^2) - 1 = f_0 + \sum f_k u^k$ и оставляя в лагранжиане только слагаемые второго порядка, имеем

$$L = (\partial_\mu u)^2 - 2m^2 u^2 + L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \frac{m^2}{\lambda} \left(\varepsilon_1^2 + f_0 \right) \left[(A_\mu^1)^2 + \varepsilon_2^2 (A_\mu^3)^2 \right]. \quad (51)$$

Сравнивая выражения (51) и предпоследнюю строчку (42) видим аналогичность набора массивных компонент калибровочных полей. Оставшаяся компонента хиггсова изоскаляра u оказывается массивной, а из (50) видно, что она взаимодействует с калибровочными полями в слагаемых порядка выше второго.

8. Лагранжиан полей Янга-Миллса

Лагранжиан калибровочных полей Янга-Миллса в $SO(3)$ теории обычно выбирают следующим

$$L_{YM} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4g^2} \left[\left(F_{\mu\nu}^1 \right)^2 + \left(F_{\mu\nu}^2 \right)^2 + \left(F_{\mu\nu}^3 \right)^2 \right], \quad (52)$$

здесь $F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu]$ – тензор напряженности полей Янга-Миллса. Поскольку форма Киллинга, используемая для построения (52), в случае алгебр Кэли-Клейна вырождена, будем искать $L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в следующем виде

$$L_{YM}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = C_{ab} F_{\mu\nu}^a(\varepsilon_1, \varepsilon_2) F_{\mu\nu}^b(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (53)$$

где $F_{\mu\nu}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\partial_\mu + A_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \partial_\nu + A_\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$. Константы C_{ab} находим из условия калибровочной инвариантности лагранжиана (53). Преобразования тензора $F_{\mu\nu}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ следующие

$$F'_{\mu\nu}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) F_{\mu\nu}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) G^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

При инфинитезимальных преобразованиях $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \approx I + \alpha_i T_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\alpha_i \ll 1$ это соотношение принимает вид

$$F'^i_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu} + \epsilon_{ijk}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \alpha_j F^k_{\mu\nu}. \quad (54)$$

Анализ уравнений (53), (54) дает следующие решения при разных комбинациях параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Для случая $\varepsilon_1^2 = 0, \varepsilon_2^2 = 0$ лагранжиан выглядит

$$L_{YM}(0, 0) = \begin{cases} C_{11} (F_{\mu\nu}^1)^2 + C_{22} (F_{\mu\nu}^2)^2, & F_{\mu\nu}^{1,2} \neq 0; \\ C_{33} (F_{\mu\nu}^3)^2, & F_{\mu\nu}^{1,2} = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Для случая $\varepsilon_1^2 = 0, \varepsilon_2^2 = 1$

$$L_{YM}(0, 1) = \begin{cases} C_{22} (F_{\mu\nu}^2)^2, & F_{\mu\nu}^2 \neq 0; \\ C \left[(F_{\mu\nu}^1)^2 + (F_{\mu\nu}^3)^2 \right], & F_{\mu\nu}^2 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

Для случая $\varepsilon_1^2 = 1, \varepsilon_2^2 = 0$

$$L_{YM}(1, 0) = \begin{cases} C_{11} (F_{\mu\nu}^1)^2, & F_{\mu\nu}^1 \neq 0; \\ C \left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + (F_{\mu\nu}^3)^2 \right], & F_{\mu\nu}^1 = 0. \end{cases} \quad (57)$$

Отметим еще возможность строить лагранжиан полей Янга-Миллса из полей $B_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, которые не преобразуются при калибровочных преобразованиях. Тогда с точки зрения калибровочной инвариантности нет никаких ограничений.

9. Выводы

Предложен способ получения теорий с непустой калибровочной группой. Получена серия лагранжианов как с глобальной, так и с локальной изотопической инвариантностью относительно преобразований в двумерных пространствах Кэли-Клейна. Найдены лагранжианы калибровочных полей для этого случая. При записи в унитарной калибровке массивность калибровочных полей при подходящем выборе функции $F(\rho)$ очевидна. Проиллюстрирована теорема Голдстоуна для случая глобальной симметрии $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Для случая локальной симметрии рассмотрено действие механизма Хиггса, которое оказывается схожим со случаем обычной $SO(3)$ теории.

В отличие от случая с простой калибровочной группой, описанные теории с непустыми группами $SO(3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ допускают как изначальную массивность калибровочных полей за счет выбора $F(\rho)$ в (42), так и приобретенную посредством механизма

Хиггса. Интересным является тот факт, что оба варианта дают одинаковый набор массивных калибровочных полей, т.е. «ненужный», в связи с изначальной массивностью, механизм Хиггса, тем не менее, работает с тем же результатом.

В работе [10], используя несколько иной подход, был получен тот же набор массивных и безмассовых калибровочных полей.

Работа поддержана программой «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» Президиума РАН.

Литература

1. *Иваненко Д.Д., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А.* Калибровочная теория гравитации. М.: МГУ, 1985. *Andrade V.C., Guillen L.C.T. and Pereira J.G.* Teleparallel gravity: an overview // arXiv:gr-qc/0011087.
2. *Blagojevic M.* Gravitation and gauge symmetries. IoP, 2002.
3. *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987.
4. *Sogami I.S.* A non-semisimple hidden symmetry for flavor physics // Progress of Theoretical Physics. 2005. Vol. 114. № 4. P. 873–887.
5. *Nappi C.R. and Witten E.* Wess-Zumino-Witten model based on a non-semisimple group // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71. P. 3751–3753.
6. *Ferrari F.* Chern-Simons field theories with non-semisimple gauge group of symmetry // Journal of Mathematical Physics. 2003. Vol. 44. P. 138–145.
7. *Demichev A.P. and Nelipa N.F.* Methods of construction of gauge-invariant lagrangians for arbitrary Lie groups // Progress of Theoretical Physics. 1986. Vol. 76. № 3. P. 715–725.
8. *Tseytlin A.A.* On gauge theories for non-semisimple groups // Nuclear Physics B. 1995. Vol. 450. P. 231–250.
9. *Nuyts J. and Wu T.T.* Yang-Mills theory for nonsemisimple group // Physical Review D. 2003. Vol. 67. 025014.
10. *Громов Н.А.* Калибровочные теории с калибровочными группами Кэли-Клейна $SO(2; j)$ и $SO(3; j)$ // Алгебра, геометрия и дифференциальные уравнения. Сыктывкар, 2007. С. 3–18. (Труды Коми НЦ УрО РАН; № 182).
11. *Громов Н.А.* Сферическое пространство позволяет обойтись без хиггсовского бозона // Сыктывкар, 2007. 20 с. (Науч. доклады/ Коми НЦ УрО РАН. Вып. 493). *Gromov N.A.* Higgsless electroweak model due to the spherical geometry // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 128. 012005.
12. *Faddeev L.D.* An alternative interpretation of the Weinberg–Salam model // ArXiv:0811.3311 [hep-th]. *Chernodub M.N., Faddeev L.D. and Niemi A.J.* Non-Abelian Supercurrents and de Sitter Ground State in Electroweak Theory // ArXiv:0804.1544 [hep-th]. *Ilderton A., Lavelle M. and McMullan D.* Symmetry breaking, conformal geometry and gauge invariance // arXiv:1002.1170 [hep-th].
13. *Inönü E. and Wigner E.P.* On the contraction of groups and their representations // Proceedings of the National Academy of Sciences, USA. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
14. *Громов Н.А.* Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. Сыктывкар, 1990. 220 с.
15. *Костяков И.В., Куратов В.В.* Массивные поля Янга-Миллса, трансляционные и неполупростые калибровочные симметрии // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика. 2009. Вып. 10. С. 57–70; arXiv:0909.0634 [hep-th].
16. *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 312 с.
17. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 784 с.
18. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. Главная редакция физико-математической литературы. М.: Изд.-во «Наука», 1978. 249 с.
19. *Bettinelli D., Ferrari R. and Quadri A.* A Massive Yang-Mills Theory based on the Nonlinearly Realized Gauge Group // arXiv:0705.2339 [hep-th].
20. *Пименов Р.И.* Основы теории темпорального универсума. Сыктывкар: Коми НЦ УрО АН СССР, 1990. 196 с.
21. *Пименов Р.И.* Применение полуримановой геометрии к единой теории поля // Доклады АН СССР. 1964. Т.157. № 4. С. 795–797.
22. *Gromov N.A.* The R.I. Pimenov unified gravitation and electromagnetism field theory as semi-Riemannian geometry // Ядерная физика, 2009. Т. 72. № 5. С. 837–843; arXiv:0810.0349 [gr-gc].
23. *Gilmor R.* Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications. Dover Publications, 2006. 587 p.

Статья поступила в редакцию 15.11.2011.