МАТЕМАТИКА

УДК 517.934

© **А. И. Благодатских**
aiblag@mail.ru

К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ[1]

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, убегание, конфликтно управляемый процесс.

Abstract. Sufficient conditions of catching were derived in two problems of group pursuit.

Введение

В работе рассматривается линейный нестационарный конфликтно управляемый процесс с равными динамическими и инерционными возможностями участников в предположении, что фундаментальная матрица системы является почти периодической и ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$. В первой части работы получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего при дискриминации последнего. Во второй части получены достаточные условия поимки заданного числа убегающих, при условии, что первоначально убегающие выбирают свои управления на $[t_0, \infty)$, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего.

Работа примыкает к исследованиям [1-5].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00258).

§ 1. Групповое преследование одного убегающего

В пространстве R^ν $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка ν, V — строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int} V \neq \emptyset$. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = X_i^0, \ y(t_0) = Y^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i. \tag{1.3}$$

Вместо (1.1), (1.2), (1.3) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i(t_0) = Z_i^0 = X_i^0 - Y^0. \tag{1.4}$$

Отметим, что $Z_i^0 \neq 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (1.1), (1.2), называются *допустимыми*.

О п р е д е л е н и е 1.2. В игре Γ *возможна поимка*, если существует момент $T_0 = T_0(Z_i^0)$, при котором для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся такие допустимые управления

$$u_i(t) = u_i\big(t, \ Z_i^0, \ v(s), \ s \in [0, t]\big),$$

что для некоторых $\tau \in [t_0, T_0]$ и $\alpha \in I$ выполнено $z_\alpha(\tau) = 0$.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega$$

такая, что $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей.

П р е д п о л о ж е н и е 1.1. Матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора и ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Отметим, что предположение 1.1 выполнено, если матрица $A(t)$ постоянна, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

У с л о в и е 1.1. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}.$$

Построены допустимые управления преследователей, на которых доказана следующая

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполнены предположение 1.1 и условие 1.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

П р и м е р 1.1. В пространстве R^ν $(\nu = 2p, p \geqslant 1)$ рассмотрим дифференциальную игру Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть система (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ — некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_p^2) = 0$$

равны $\pm a_1 \iota,\ \pm a_2 \iota, \ldots, \pm a_p \iota$ и предположение 1.1 выполнено.

Утверждение 1.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Пример 1.2. В пространстве R^2 рассмотрим дифференциальную игру Γ четырех лиц: трех преследователей P_1, P_2, P_3 и убегающего E. Пусть система (1.4) имеет вид

$$\dot z_i = A(t) z_i + u_i - v, \quad z_i(0) = Z_i^0, \text{ где}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$Z_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

и все условия теоремы 1.1 выполнены.

Утверждение 1.2. *В игре* Γ *возможна поимка.*

§ 2. Поимка заданного числа убегающих

В R^ν $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение каждого преследователя P_i описывается системой (1.1), закон движения каждого убегающего E_j имеет вид

$$\dot y_j = A(t) y_j + v_j, \quad v_j \in V. \tag{2.1}$$

Здесь и далее $y_j, v_j \in R^\nu$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = X_i^0, \ y_j(t_0) = Y_j^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j. \qquad (2.2)$$

Цель группы преследователей — «поймать» не менее r убегающих $(1 \leqslant r \leqslant m)$, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может «поймать» не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant r$.

Вместо (1.1), (2.1), (2.2) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \quad z_{ij}(t_0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0. \quad (2.3)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. В игре Γ *возможна поимка r убегающих*, если существует момент $T_0 = T_0(Z_{ij}^0)$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i\big(t, \ Z_{ij}^0, \ v_j(s), \ s \in [t_0, \infty)\big)$$

обладающие следующим свойством: существуют множества $N \subset I$, $M \subset J$, $|N| = |M| = r$ такие, что каждый убегающий E_β, $\beta \in M$ ловится не позднее момента T_0 некоторым преследователем P_α, $\alpha \in N$, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение «преследователь P_α ловит убегающего E_β» означает, что для некоторого $\tau \in [t_0, T_0]$ выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau) = 0$.

У с л о в и е 2.1. Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ верно следующее: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - k$ найдется такое множество $M \subset J$, $|M| = r - k$, что для всех $\beta \in M$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{\alpha\beta}^0, \ \alpha \in N\}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположение 1.1 и условие 2.1. Тогда в игре* Γ *возможна поимка* r *убегающих.*

П р и м е р 2.1. В пространстве R^2 рассмотрим дифференциальную игру Γ шести лиц: четырех преследователей P_1, P_2, P_3, P_4 и двух убегающих E_1, E_2. Цель преследователей — «поймать» всех убегающих $(r = 2)$. Пусть система (2.3) имеет вид

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0, \text{ где}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix}, \ Y_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Y_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_3^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_4^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

и предположение 1.1 выполнено. Проверяя, получаем, что, при указанных начальных позициях игроков, условие 2.1 имеет место.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *В игре* Γ *возможна поимка всех убегающих.*

Список литературы

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. №3. С. 145-146.
2. Петров Н. Н. Теория игр / УдГУ. Ижевск, 1997. 197 с.
3. Пилипенко Ю. В., Чикрий А. А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикладная математика и механика. 1993. №3. С. 3-14.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
5. Благодатских А. И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками// Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2005. №2. С. 3-22.