УДК 512.542

К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**С. В. Путилов**

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Доказываются следующие теоремы: 1) Если в конечной группе G все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы имеют примарные нечетные индексы, то G разрешима; 2) Если в конечной группе G представители хотя бы трех классов неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп разрешимы и имеют нечетные примарные индексы, то группа G разрешима; 3) Если в конечной группе G представители хотя бы двух классов неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп 2-замкнуты и имеют примарные индексы, то группа G разрешима; 4) Если в конечной группе G все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы 2-нильпотентны и имеют примарные индексы, то G разрешима.

Ключевые слова: конечная группа, квазисубнормальная подгруппа, максимальная подгруппа, индекс подгруппы, разрешимая группа.

Введение

Исследования проводились только в теории конечных групп. Необходимые сведения общеприняты и есть в [1].

Работы [2-5] показывают перспективность исследований конечных групп с заданными индексами некоторых подгрупп. В [6] подгруппа H группы G называется квазисубнормальной, если $H \cap G_p = H_p$ для любого $p \in \pi(G)$ и каждой силовской p -подгруппы G_p из G . Так как нормальная подгруппа удовлетворяет условию квазисубнормальности, то в общем случае множество квазисубнормальных подгрупп шире множества нормальных подгрупп. На базе этого отношения усилены результаты автора из [7].

Определения и обозначения

Классом подгрупп группы G считаем класс сопряженных подгрупп в G . Простые числа обозначаются буквами p, q, r . Пусть G – конечная группа, A – подгруппа группы G . Тогда $|G|$ – порядок группы G ; $|G:A|$ – индекс A в G ; $N_G(A)$ – нормализатор A в G . Всегда G_p – силовская p -подгруппа группы G , $G_{p'}$ – дополнение к силовской p -подгруппе в группе G , т. е. p' -холлова подгруппа группы G . Группу G называют pd -группой, если порядок G делится на p ; p -замкнутой, если G_p нормальна в G ; p -нильпотентной, если $G_{p'}$ нормальна в G ; p -разложимой, если G_p и $G_{p'}$ нормальны в G ; $N \trianglelefteq G$ – N является нормальной подгруппой группы G ; $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп в G ; $G = [A]B$ – полупрямое произведение подгруппы A на подгруппу B группы G , т.е. $G = AB$, $A \triangleleft G$, $A \cap B = 1$; $S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ; A^g – подгруппа, сопряженная с подгруппой A элементом $g \in G$; S_n – симметрическая группа на n символах; $\pi(G)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок G ; $A \times B$ – прямое произведение подгрупп A и B , т.е. $G = AB$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \cap B = 1$; Z_n – циклическая группа порядка n ; $\square$ – знак окончания доказательства.

Известные результаты для приложения

Лемма 1 [8, замечание к Т.1]. Только в изоморфных простых группах $L_2(7)$ и $L_3(2)$ максимальные подгруппы имеют индексы, равные степеням различных простых чисел.

Лемма 2. Если в конечной группе G любая максимальная подгруппа квазисубнормальна или p -разложима, то группа G разрешима или p -нильпотентна.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [9].

Лемма 3 [1, теорема I.8.6]. Пусть $N_i \triangleleft G$ и $N_1 \cap N_2 = 1$. Тогда если фактор-группа G/N_i , $i=1,2$, разрешима, то группа G разрешима.

Лемма 4 [1, теорема I.9.12]. Пусть N – неразрешимая минимальная нормальная подгруппа конечной группы G . Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые группы.

Лемма 5 [9, лемма 12]. Пусть $M = M_2 \times M_2$, 2 -разложимая максимальная $2d$ -подгруппа неразрешимой группы G . Если $S(G)=1$, то $M = G_2$.

Лемма 6 [1, теорема I.7.8]. Пусть N – нормальная подгруппа в группе G и P – силовская p -подгруппа в N . Тогда $G = NN_G(P)$.

Лемма 7 [7, теорема 2.2.4]. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и M – ненормальная максимальная подгруппа в G . Если отношение $|M| = |P| \times t$, $t \geq 1$, влечет квазисубнормальность подгруппы M в G , то P нормальна в G .

Лемма 8 [8, замечание к Т.1]. В простой конечной группе может существовать не более двух классов максимальных подгрупп примарного индекса для одного и того же простого числа.

Лемма 9 [1, теорема 6.4.3]. Любое произведение попарно перестановочных нильпотентных групп разрешимо.

Лемма 10 [10]. Конечная группа нечетного порядка разрешима.

Лемма 11 [11, теорема А]. Пусть в группе G существует π -холлова подгруппа. Если $2 \notin \pi$, то любые две π -холловы подгруппы сопряжены в G .

Лемма 12 [8, замечание к Т.1]. Пусть G – неабелева простая группа. Если M – максимальная подгруппа в G с примарным индексом, то M не является холловой подгруппой в G только тогда, когда $G = A_n$, $M = A_{n-1}$ с $n = p^\alpha$ и простым числом p , а также при $G = PSU_4(2)$ с индексом подгруппы M равным 27.

Лемма 13 [12,13]. Простые группы с нильпотентной максимальной подгруппой исчерпываются $PSL(2, q)$ с $q=9$ или простым числом $q=2^n \pm 1 \geq 17$.

Лемма 14 [9, теорема 3]. Пусть S – 2 -разложимая максимальная подгруппа конечной группы G и $S_2 \in Syl_2(G)$. Если неквазисубнормальные 2 -неразложимые максимальные подгруппы в G имеют примарные индексы, то G разрешима.

Доказательство основных результатов

Теорема 1. Если в конечной группе G все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы имеют примарные нечетные индексы, то G разрешима.

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть G – простая группа. Тогда по лемме 5 в G нет нильпотентных максимальных подгрупп. Если простое число p делит индексы всех неквазисубнормальных максимальных подгрупп, то по лемме 7 силовская p -подгруппа нормальна в G , что противоречиво. Значит, группа G удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому G изоморфна $L_2(7)$. Так

как в $L_2(7)$ есть неквазисубнормальные максимальные подгруппы четного индекса, то пришли к противоречию с условием теоремы. Следовательно, G – непростая группа.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Если в фактор-группе G/N нет неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп, то G/N разрешима по лемме 2. Поэтому G/N наследует условия теоремы и по индукции G/N разрешима. Тогда по лемме 3 N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Если подгруппа N разрешима, то из разрешимости G/N следует разрешимость группы G .

Пусть подгруппа N неразрешима. Тогда по лемме 4 $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_i ($i = 1, \dots, k$) – изоморфные простые группы. Поскольку $S(G) = 1$, то по лемме 5 в G нет нильпотентных максимальных подгрупп.

Пусть N включается во все неквазисубнормальные максимальные подгруппы. По лемме 6 $G = NN_G(N_r)$, где N_r – силовская r -подгруппа для простого числа r из $\pi(N)$. Так как $G_r \subseteq N_G(N_r)$, то по лемме 7 $N_G(N_r)$ не может включаться в квазисубнормальную максимальную подгруппу. Пусть $N_G(N_r)$ включается в неквазисубнормальную максимальную подгруппу R . Тогда $G = NN_G(N_r) \subseteq R$, что противоречиво. Значит, в G есть неквазисубнормальная максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Тогда по крайней мере один сомножитель в N не включается в M . Предположим, что $N_1 = K$ не включается в M . Пусть $|G:M| = p^\alpha$, где p – простое число, $\alpha \geq 1$. Покажем, что $|K:K \cap M| = p^\beta$, где $1 \leq \beta \leq \alpha$. Пусть $A = N \cap M$. Так как $|G| = |M||N|/|N \cap M|$, то $|G|/|M| = |N|/|N \cap M|$, откуда $|N:A| = |G:M| = p^\alpha$. Поскольку $K \cap M = K \cap N \cap M = K \cap A$, то $|K:K \cap M| = |K:K \cap A| = |K|/|K \cap A| = |K||A|/|A||K \cap A| = |KA:A|$. Тогда из отношения $p^\alpha = |N:A| = |N:KA||KA:A| = |N:KA||K:K \cap M|$ следует, что $|K:K \cap M|$ есть степень простого числа p .

Пусть в G индексы всех неквазисубнормальных максимальных подгрупп с единичным ядром делятся на простое число p . Так как по лемме 6 $G = NN_G(N_p)$ и $N_G(N_p)$ может включаться только в неквазисубнормальную максимальную подгруппу с единичным ядром, то $N_G(N_p) = G$. Пришли к противоречию с тем, что в G нет разрешимых нормальных подгрупп. Поэтому в G есть неквазисубнормальная максимальная подгруппа S с единичным ядром, которая содержит $N_G(N_p)$, а так же индекс S в G взаимно прост с p . Пусть $|G:S| = q^\gamma$, где $\gamma \geq 1$ и простое число q отлично от p . Тогда среди прямых сомножителей в N найдется подгруппа, которая не включается в S . Пусть, например, $N_2 = L$ не включается в S . Тогда, как ранее для K , можно показать, что $|L:L \cap S| = q^\varepsilon$, где $1 \leq \varepsilon \leq \gamma$. Поскольку $K \cong L$, то в K существует подгруппа с индексом равным степени q . Таким образом, в K существуют две несопряженные максимальные подгруппы примарных взаимно простых нечетных индексов, что противоречит лемме 1. $\square$

Следствие. Если в конечной группе G все неквазисубнормальные максимальные подгруппы имеют примарные нечетные индексы, то G 2-нильпотентна.

Доказательство. Разрешимость G следует из теоремы 1. Пусть H – 2'-холлова подгруппа в G и $N_G(H) \subset G$. Тогда по лемме 7 $N_G(H)$ включается в неквазисубнормальную максимальную подгруппу группы G с четным индексом, что противоречиво. Значит, $N_G(H) = G$. $\square$

Теорема 2. Если в конечной группе G представители хотя бы трех классов неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп разрешимы и имеют нечетные примарные индексы, то группа G разрешима.

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. По лемме 8 и по лемме 1 G – непростая группа.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G , M – произвольная неквазисубнормальная ненильпотентная разрешимая максимальная подгруппа нечетного примарного индекса в G и N включается в M . Если группа M/N нильпотентна, то $G/N = (M/N)(G_p N/N)$, где $|G:M| = p^\alpha$, и по лемме 9 группа G/N разрешима. Значит, фактор-группа G/N наследует условия теоремы и по индукции G/N разрешима. Тогда G разрешима, что противоречиво. Пусть N не включается в M . Тогда $G = MN$, откуда фактор-группа $G/N = MN/N$. Так как MN/N изоморфна разрешимой группе $M/M \cap N$, то группа G/N разрешима. Поэтому по лемме 3 и по лемме 4 $N = \times_{j=1}^k N_j$ является единственной минимальной нормальной неразрешимой подгруппой в G , где группы $N_j (j=1, \dots, k)$ – изоморфные простые группы. Тогда по лемме 5 в G нет нильпотентных максимальных подгрупп.

Пусть $M_i (i=1, 2, 3)$ – представители классов неквазисубнормальных разрешимых максимальных подгрупп примарных нечетных индексов в G . Рассмотрим подгруппы $D_i = N \cap M_i (i=1, 2, 3)$. Покажем, что подгруппы D_i для различных i в группе N не сопряжены. Например, установим это для подгрупп D_1 и D_2 . Пусть в N существует элемент n такой, что $D_1 = D_2^n$. Так как $D_1 \triangleleft M_1$ и $D_2^n \triangleleft M_2^n$, то $D_1 \triangleleft \langle M_1, M_2^n \rangle = G$. Тогда $N \subseteq D_1$, что противоречиво. Значит, подгруппы $D_i (i=1, 2, 3)$ являются представителями различных классов подгрупп в N .

Рассмотрим подгруппы $L_{ij} = M_i \cap N_j$, где $i=1, 2, 3; j=1, 2, \dots, k$. Так как для любого i и каждого j подгруппа $L_{ij} = M_i \cap N \cap N_j$, то $L_{ij} = D_i \cap N_j$ и справедливо равенство $D_i = L_{i1} \times L_{i2} \times \dots \times L_{ik}$.

Пусть $L_{1j} = L_{2j}^{n_j}$, где $n_j \in N_j$ и $j=1, 2, \dots, k$. Тогда верно, что $L_{11} \times L_{12} \times \dots \times L_{1k} = L_{21}^{n_1} \times L_{22}^{n_2} \times \dots \times L_{2k}^{n_k} = (L_{21} \times L_{22} \times \dots \times L_{2k})^n$, где $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k \in N$. Значит, из сопряженности подгрупп L_{1j} и L_{2j} в группе N_j следует сопряженность подгрупп D_1 и D_2 в N , что противоречиво. Поэтому подгруппы $L_{ij} (i=1, 2, 3)$ для каждого $j=1, 2, \dots, k$ и различных i будут в N_j представителями различных классов подгрупп.

Покажем, что индекс подгруппы L_{ij} в группе N_j примарный. Так как $G = NM_i$, то $p_i^{\alpha_i} = |G:M_i| = |N:D_i|$, где p_i – простое число, а i может принимать значения 1, 2, 3. Поэтому индекс $|N_j D_i : D_i|$ будет степенью простого числа p_i . Поскольку $|N_j D_i : D_i| = |N_j : L_{ij}|$, то и $|N_j : L_{ij}|$ является степенью простого числа $p_i (i=1, 2, 3; j=1, 2, \dots, k)$.

Таким образом, в подгруппе $N_j (j=1, 2, \dots, k)$ есть по крайней мере три класса максимальных подгрупп примарных нечетных индексов. Так как любой представитель этих классов имеет не менее двух классов примарных силовских подгрупп, то это будут классы неквазисубнормальных максимальных подгрупп. По лемме 5 представители этих классов не являются нильпотентными. Значит, подгруппа $N_j (j=1, 2, \dots, k)$ содержит по крайней мере три класса неквазисубнормальных ненильпотентных разрешимых максимальных подгрупп

примарных нечетных индексов. Тогда по индукции N_j будет разрешимой группой. Пришли к противоречию с тем, что группа N_j $j=(1,2,\dots,k)$ является простой. $\square$

Теорема 3. *Если в конечной группе G представители хотя бы двух классов неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп 2-замкнуты и имеют примарные индексы, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть в группе G нет неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп. Тогда по лемме 2 группа G разрешима.

Пусть $M_i(i=1,2)$ – представители классов неквазисубнормальных ненильпотентных 2-замкнутых максимальных подгрупп примарных индексов в G . Пусть Q_i – силовские 2-подгруппы из $M_i(i=1,2)$. Если $Q_i \in Syl_2(G)$ для $i=1,2$, то, как нормализаторы силовских 2-подгрупп в G , подгруппы M_1 и M_2 сопряжены в G , что противоречиво. Пусть $Q_i \neq 1$ и $Q_i \notin Syl_2(G)$. Тогда $Q_i \triangleleft G$ ($i=1,2$).

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G и G/N – фактор-группа по N . Если N не включается в M_i для $i=1$ или $i=2$, то аналогично доказательству теоремы 2 G/N разрешима. В противном случае G/N разрешима по индукции. Тогда фактор-группа G/Q_i разрешима, что влечет разрешимость группы G . Поэтому возможны следующие два случая. Первый, – когда подгруппа $Q_1 \in Syl_2(G)$, а M_2 будет 2'-группой или подгруппа $Q_2 \in Syl_2(G)$, а M_1 будет 2'-группой. Второй, – когда подгруппы $M_i(i=1,2)$ будут 2'-группами. В каждом случае по лемме 10 подгруппы $M_i(i=1,2)$ разрешимы. Так как по лемме 11 2'-подгруппы $M_i(i=1,2)$ будут представителями одного и того же класса холловых подгрупп, то остается только первый случай. Пусть H – нильпотентная максимальная подгруппа в G . Тогда по лемме 5 $H \in Syl_2(G)$. Поэтому, например, $M_1 = H$, что влечет $|\pi(G)| = 2$. Следовательно, по теореме Бернсайда о разрешимости бипримарной группы, группа G разрешима. Значит, в G нет нильпотентных максимальных подгрупп.

Пусть G – простая группа. Тогда по лемме 1 группа G изоморфна $L_2(7)$. Так как в $L_2(7)$ силовская 2-подгруппа самонормализуемая и её индекс в G делится на два различных простых числа, то G – непростая группа. Поэтому N – единственная минимальная нормальная неразрешимая подгруппа в G и по лемме 4 $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где $N_j(j=1,2,\dots,k)$ – изоморфные простые группы. Проводя далее рассуждения аналогичные тем, которые изложены в доказательстве теоремы 1 получим, что в группе $N_j(j=1,2,\dots,k)$ есть по крайней мере, два класса неквазисубнормальных ненильпотентных 2-замкнутых максимальных подгрупп примарного индекса. Тогда по индукции группа $N_j(j=1,2,\dots,k)$ разрешима, откуда следует разрешимость N . $\square$

Теорема 4. *Если в конечной группе G все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы 2-нильпотентны и имеют примарные индексы, то G разрешима.*

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть в группе G нет неквазисубнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп. Тогда по лемме 2 группа G разрешима.

Пусть G – простая группа и силовская 2-подгруппа группы G включается в максимальную 2-нильпотентную подгруппу примарного индекса. Тогда по лемме 7 в G есть по крайней мере два класса 2-нильпотентных максимальных подгрупп с примарными взаимно

простыми индексами. По лемме 1 получим, что $G \cong L_2(7) = S_4([Z_7]Z_3)$, где S_4 и $([Z_7]Z_3)$ – максимальные подгруппы в G . Так как S_4 не является 2-нильпотентной группой, то пришли к противоречию.

Пусть в простой группе G силовская 2-подгруппа является максимальной подгруппой. Тогда примарный индекс каждой неквазисубнормальной ненильпотентной 2-нильпотентной максимальной подгруппы в G равен степени числа два. Из леммы 12 и леммы 13 следует, что 2-нильпотентные максимальные подгруппы в G будут холловыми подгруппами нечетного порядка. Получили, что в G каждая максимальная подгруппа квазисубнормальна или 2-разложима. Тогда по лемме 2 группа G разрешима. Значит, группа G непростая.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . По лемме 10 в G каждая 2-нильпотентная максимальная подгруппа разрешима. Тогда каждая фактор-группа G/N разрешима. По лемме 3 N – единственная минимальная нормальная неразрешимая подгруппа в G , а по лемме 4 $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_i ($i=1, 2, \dots, k$) – изоморфные простые группы.

Пусть в G есть nilьпотентная максимальная подгруппа. Тогда по лемме 5 это будет силовская 2-подгруппа группы G и по лемме 14 группа G разрешима. Значит, в G нет nilьпотентных максимальных подгрупп.

Пусть M – некоторая неквазисубнормальная максимальная подгруппа в G , индекс которой равен p^α , где p – простое число, $\alpha \geq 1$. Поскольку $N_G(G_p) \subset G$, то в G существует неквазисубнормальная максимальная подгруппа S , в которую включается $N_G(G_p)$. По условию теоремы $|G:S| = q^\beta$, где q – простое число, $q \neq p$ и $\beta \geq 1$. Так как подгруппы M и S разрешимы, то в них существуют соответственно p' -холлова подгруппа A и q' -холлова подгруппа B . Так как A и B будут холловыми подгруппами в G , то подгруппы $C = N_i \cap A$ и $D = N_i \cap B$ являются соответственно p' -холловой и q' -холловой подгруппами в N_i для любого $i=1, 2, \dots, k$. Тогда по лемме 1 верно, что $N_i \cong L_2(7)$. Поскольку в $L_2(7)$ неквазисубнормальная ненильпотентная максимальная подгруппа S_4 имеет примарный индекс, но не является 2-нильпотентной группой, то пришли к противоречию. $\square$

Пример. Простая группа $L_2(7)$ порядка 168 имеет всего три класса максимальных подгрупп: два класса с представителями S_4 и одинаковыми индексами равными 7 и один класс с представителем $[Z_7]Z_3$ и индексом 8. Все максимальные подгруппы в $L_2(7)$ разрешимы. Максимальные подгруппы индекса 7 в $L_2(7)$ являются $2d$ -группами, изоморфны S_4 и не являются 2-замкнутыми и 2-нильпотентными группами. Этот пример показывает, что в теореме 1 невозможно исключить нечетность индексов, в теореме 2 число классов максимальных подгрупп должно быть не менее трех, в теореме 3 нельзя исключить 2-замкнутость максимальных подгрупп, а в теореме 4 нельзя исключить 2-нильпотентность максимальных подгрупп.

Список литературы

1. Huppert B. Endliche Gruppen – Berlin– Heidelberg –New York: Springer Verlag, 1967. –793 p.
2. Maslova N. V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: addendum // Сиб. электрон. матем. изв. – 2018. – V.15.– P. 707–718.
3. Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. Матем. ж. – 2018. – Т. 59. – №4. – С. 773–790.

4. Монахов В. С., Ходанович Д. А. О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов // ПФМТ. – 2018. – Т.35. – № 2. – С. 57–59.
5. Путилов С. В. Разрешимость конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2018. – № 4. – С. 24-30. – Режим доступа: <http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2018-N4.pdf>.
6. Kegel O. Sylow Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. – 1962. – Bd. 78. – S. 205-221.
7. Путилов С. В. К теории конечных групп. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. – 63 с.
8. Guralnick R. M. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. – 1983. – V. 81. – № 2. – P. 304–311.
9. Путилов С. В. Максимальные подгруппы конечных групп // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2018. – № 1. – С. 18-26. – Режим доступа: <http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2018-N1.pdf>.
10. Feit W., Tompson J.G. Solvability of groups odd order // Pacific J. Math. – 1963. – V.13 – P. 755–1029.
11. Gross F. Conjugacy of odd order Hall Subgroups // Bull. London Math. Soc. – 1987. – V.19. – № 4. – P. 311–319.
12. Baumann B. Endliche nichtauflosbare Gruppen mit einer nilpotenten maximal Untergruppen // J. Algebra. – 1976. – V.38. – P. 119–135.
13. Thompson J. A. Special class of non-solvable groups // Math. Z. – 1960. – Bd. 72. – S. 458–462.

Сведения об авторе

Путилов Сергей Васильевич – доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского», e-mail: algebra.bgu@yandex.ru.

THE THEORY SOLVABILITY OF FINITE GROUPS

S. V. Putilov

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky

We prove the following theorems: 1) If in a finite group G all nonquasisubnormal nonnilpotent maximal subgroups have primar odd indices, then G is solvable; 2) If in a finite group G the representatives of at least three classes nonquasisubnormal nonnilpotent of maximal subgroups of solvable and have an odd primary indeces, the group G is solvable; 3) If in a finite group G the representatives of at least two classes nonquasisubnormal nonnilpotent maximal subgroups are 2-closed and have primary indeces, the group G is solvable; 4) If in a finite group G all nonquasisubnormal nonnilpotent maximal subgroups of 2-nilpotent and have primar indices, then G is solvable.

Keywords: *finite group, quasisubnormal subgroup, maximal subgroup, the index of the subgroup, solvable group.*

References

1. Huppert B. Endliche Gruppen – Berlin– Heidelberg –New York: Springer Verlag, 1967. –793 p.
2. Maslova N. V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: addendum // SEMR – 2018. – V.15.– P. 707–718.
3. Guo W., Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in some extensions of finite groups // Siberian Math. J. – 2018. – Vol. 59. – №4. – P. 773–790.

4. Monakhov V. S., Khadanovich D. A. On the solvability of a finite group with a pair of non-conjugate subgroups of primary indeces // PFMT. – 2018. – V.35. – № 2. – P. 57–59.
5. Putilov S. V. Solvability of finite groups // Scientific notes of Bryansk state University. – 2018. – № 4. – P. 24–30. – Access mode: <http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2018-N4.pdf>.
6. Kegel O. Sylow Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. – 1962. – Bd. 78. – S. 205–221.
7. Putilov S. V. To the theory of finite groups. – Bryansk: Group of companies «Ten». – 2009. – 63 p.
8. Guralnick R. M. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. – 1983. – V.81. – № 2. – P. 304–311.
9. Putilov S. V. Maximal subgroups of finite groups // Scientific notes of Bryansk state University. – 2018. – №1. – P. 18–26. – Access mode: <http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2018-N1.pdf>.
10. Feit W., Tompson J.G. Solvability of groups odd order // Pacific J. Math. – 1963. – V.13 – P. 755–1029.
11. Gross F. Conjugacy of odd order Hall Subgroups // Bull. London Math. Soc. – 1987. – V.19. – № 4. – P. 311–319.
12. Baumann B. Endliche nichtauflosbare Gruppen mit einer nilpotenten maximal Untergruppen // J. Algebra. – 1976. – V. 38. – P. 119–135.
13. Thompson J. A. Special class of non-solvable groups // Math. Z. – 1960. – Bd. 72. – S. 458–462.

About author

Putilov S. V. – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, e-mail: algebra.bgu@yandex.ru.