

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы при заданной функции расстояния найти все подстроки текста, отстоящие от образца не более, чем на k . Если d является расстоянием Хемминга (расстояние Хемминга между двумя строками одинаковой длины определяется как число позиций, в которых символы не совпадают. Это эквивалентно минимальной цене преобразования первой строки во вторую в случае, когда разрешена только операция замены с единичным весом), задача называется сопоставлением строк с k *несовпадениями*, если же d – расстояние Левенштейна, задача называется сопоставлением строк с k *различиями*.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Luhn, H.P., 'A statistical approach to mechanised encoding and searching of library information', IBM Journal of Research and Development, 1, 309–317.
2. Бойцов Л.М. Использование хеширования по сигнатуре для поиска по сходству // Прикладная математика и информатика. – М. Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2000. № 7.

А.Э. Саак

К ТЕОРИИ НЕПОЛНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ

Неполные комбинаторные суммы возникают при моделировании многопроцессорных вычислительных систем (МВС) с множеством пользователей. Комбинаторика множества требований пользователей встречает ограничение суммарного ресурса процессоров системы, предоставляющей компьютерное обслуживание. Дисциплина обслуживания формализуется расписанием как целочисленной первообразной потока требований.

Мы различаем дифференциальный и интегральный вероятностные законы целочисленной случайной величины

$$y(j), j = 0, 1, \dots, k; \quad Y(j) = \sum_{j'=0}^{j-1} y(j')$$

соответственно.

В силу условия нормировки вероятностного распределения полное приращение Z -первообразной на отрезке $j \in [0; k] \subset Z$ равно 1. Напротив, текущее приращение Z -первообразной вызывает проблему элементарности последней в рамках целочисленного анализа и приводит к явлению сужения первоначальной области значений случайной величины до отрезка $[0; L-1] \subset Z$, $L < k$. В классе комбинаторных экспериментов сужение области результативности исходов эксперимента индуцирует усечённый эксперимент, существенно расширяя первоначальное понятие. На указанных теоретических аспектах усечения области определения случайной величины мы предполагаем остановиться в последующей работе. В данной заметке рассматриваются формальные задачи Z -интегрирования по Ньютону-Лейбницу некоторых классических неполных комбинаторных сумм. Приведём необходимые историко-библиографические сведения.

В [1] приводятся значения сумм

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^{(j)} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^k (-1)^j j C_k^{(j)} = 0.$$

В [2] приводится значение суммы Теппера

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^{(j)} (L-j)^k / k! = 1.$$

Видим, что это полные суммы, т.е. индекс суммирования проходит все значения от 0 до k.

Вместе с тем, при расчётах MBC [3] приходится, в силу ограниченности общего ресурса, иметь дело с суммами, в которых индекс суммирования проходит не весь диапазон возможных значений, т.е. с неполными суммами.

Так в [3] пропускная способность MBC определяется формулой Лапласа

$$\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} (L-j)^k / k!.$$

Используя методику Z-интегрирования, приведём расчёт значения неполных сумм $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)}$, $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)}$ и $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)}$.

Если значения целочисленной функции $f(j)$ удастся представить в виде разности значений первообразной

$$f(j) = F(j) - F(j-1) = \Delta^- F(j),$$

или

$$f(j) = F(j+1) - F(j) = \Delta^+ F(j),$$

то Z-интеграл функции $f(j)$ равен

$$\sum_{j=a}^b f(j) = \sum_{j=a}^b \Delta^- F(j) = F(b) - F(a-1),$$

или

$$\sum_{j=a}^b f(j) = \sum_{j=a}^b \Delta^+ F(j) = F(b+1) - F(a),$$

что представляет собой формулу Ньютона-Лейбница целочисленного анализа.

Теорема. Сумма $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)}$ Z-интегрируется по Ньютону-Лейбницу.

Доказательство. Используя свойство биномиальных коэффициентов $C_k^{(j)} = C_{k-1}^{(j)} + C_{k-1}^{(j-1)}$, имеем

$$\begin{aligned} (-1)^j C_k^{(j)} &= (-1)^j (C_{k-1}^{(j)} + C_{k-1}^{(j-1)}) = (-1)^j C_{k-1}^{(j)} + (-1)^j C_{k-1}^{(j-1)} = \\ &= (-1)^j C_{k-1}^{(j)} - (-1)^{j-1} C_{k-1}^{(j-1)} = \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)} \end{aligned} \quad (1)$$

Из правила Z-интегрирования по Ньютону-Лейбницу следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} &= \sum_{j=1}^{L-1} \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - (-1)^0 C_{k-1}^{(0)} = \\ &= (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует доказываемое тождество

$$\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)}. \quad (2)$$

Другой вывод этого тождества приводится в [2].

Вычисление сумм $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)}$ и $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)}$ выполним с использованием метода Z-интегрирования по частям. Пусть надо найти сумму

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k u(j) \Delta v(j) &= \sum_{j=1}^k u(j) [v(j) - v(j-1)] = \sum_{j=1}^k u(j) v(j) - \sum_{j=1}^k u(j) v(j-1) = \\ &= \sum_{j=1}^k u(j) v(j) - \sum_{j=0}^{k-1} u(j+1) v(j). \end{aligned}$$

Из первой суммы выделим последнее слагаемое, а из второй – первое слагаемое, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k u(j) v(j) - \sum_{j=0}^{k-1} u(j+1) v(j) &= u(k) v(k) + \sum_{j=1}^{k-1} u(j) v(j) - \\ &- u(1) v(0) - \sum_{j=1}^{k-1} u(j+1) v(j). \end{aligned}$$

Группируя внеинтегральные и интегральные слагаемые, имеем

$$\begin{aligned} u(k) v(k) - u(1) v(0) - \sum_{j=1}^{k-1} v(j) [u(j+1) - u(j)] &= \\ = (uv) \Big|_1^k - \sum_{j=1}^{k-1} v(j) \Delta^+ u(j). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^k u(j) \Delta^- v(j) = (uv) \Big|_1^k - \sum_{j=1}^{k-1} v(j) \Delta^+ u(j), \quad (3)$$

где $(uv) \Big|_1^k = u(k) v(k) - u(1) v(0)$.

Интегрирование по частям является версией преобразования Абеля [4].

Теорема. Сумма $\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)}$ Z-интегрируется по Ньютону-Лейбницу.

Доказательство. Вычислим сумму $\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)}$ Z-интегрированием по частям. С учётом (1) имеем

$$\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)} = \sum_{j=1}^{L-1} j \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)}. \quad (4)$$

Обозначим $u(j) = j$, $v(j) = (-1)^j C_{k-1}^{(j)}$, $\Delta^- v(j) = \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)}$ и заметим, что $\Delta^+ u(j) = \Delta^+ j = 1$.

Согласно (3), получим

$$(uv) \Big|_1^{L-1} = (L-1)(-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{L-2} v(j) \Delta^+ u(j) = \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)},$$

следовательно,

$$(L-1)(-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 1 - \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)} = (L-1)(-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - \sum_{j=0}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)}.$$

С учётом (2) имеем

$$\begin{aligned} (L-1)(-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - \sum_{j=0}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)} &= (L-1)(-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - (-1)^{L-2} C_{k-2}^{(L-2)} = \\ &= (-1)^{L-1} [(L-1) C_{k-1}^{(L-1)} + C_{k-2}^{(L-2)}] \end{aligned}$$

И окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} [(L-1) C_{k-1}^{(L-1)} + C_{k-2}^{(L-2)}]. \quad (5)$$

Теорема. Сумма $\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)}$ Z-интегрируется по Ньютону-Лейбницу.

Доказательство. Вычислим сумму $\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)}$ Z-интегрированием по

частям. С учётом (1) имеем

$$\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)} = \sum_{j=1}^{L-1} j^2 \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)}. \quad (6)$$

Обозначим $u(j) = j^2$, $v(j) = (-1)^j C_{k-1}^{(j)}$, $\Delta^- v(j) = \Delta^- (-1)^j C_{k-1}^{(j)}$ и заметим, что $\Delta^+ u(j) = \Delta^+ j^2 = (j+1)^2 - j^2 = 2j+1$.

Согласно (3), получим

$$(uv) \Big|_1^{L-1} = (L-1)^2 (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{L-2} v(j) \Delta^+ u(j) = \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)} (2j+1),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & (L-1)^2 (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 1 - \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)} (2j+1) = \\ & = (L-1)^2 (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 2 \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j j C_{k-1}^{(j)} - \sum_{j=0}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)}. \end{aligned}$$

С учётом (2) и (6) имеем

$$\begin{aligned} & (L-1)^2 (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 2 \sum_{j=1}^{L-2} (-1)^j j C_{k-1}^{(j)} - \sum_{j=0}^{L-2} (-1)^j C_{k-1}^{(j)} = \\ & = (L-1)^2 (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)} - 2(-1)^{L-2} [(L-2)C_{k-2}^{(L-2)} + C_{k-3}^{(L-3)}] - (-1)^{L-2} C_{k-2}^{(L-2)} = \\ & = (-1)^{L-1} [(L-1)^2 C_{k-1}^{(L-1)} + (2L-3)C_{k-2}^{(L-2)} + 2C_{k-3}^{(L-3)}]. \end{aligned}$$

И окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{L-1} (-1)^j j^2 C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} [(L-1)^2 C_{k-1}^{(L-1)} + (2L-3)C_{k-2}^{(L-2)} + 2C_{k-3}^{(L-3)}]. \quad (7)$$

Численные расчёты по формулам (2), (5) и (7) подтверждают представленные теоретические выкладки.

Изложенные вычисления неполных комбинаторных сумм посредством Z-интегрирования первообразной являются частью развития целочисленного анализа параллельно классическому континуальному анализу. В различных монографиях и работах [2] неоднократно отмечалась недостаточная идейная база комбинаторики как совокупности всевозможных элементарных тождеств. Для развития комбинаторного анализа полезны как общие формальные задачи, так и приложения к сложным системам обслуживания.

Наряду с пропускной способностью МВС ряд других её моментных характеристик также выражается неполными комбинаторными суммами, и автор предполагает, что изложенные в заметке приёмы целочисленного интегрирования последних стимулируют решение теоретических вопросов моделирования МВС со множеством пользователей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
2. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 285 с.
3. Макаревич О.Б., Саак Э.М., Чефранов А.Г. Анализ загруженности однородных микропроцессорных вычислительных систем коллективного пользования // Автоматика и вычислительная техника. 1980. № 4. – С. 32–36.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 375 с.

А.А. Целых

ВЫДЕЛЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ШАРНИРОВ В НЕЧЕТКИХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГИПЕРГРАФАХ ВТОРОГО РОДА

Адекватной математической моделью нечеткой фреймовой сети является нечеткий ориентированный гиперграф второго рода. Каждое нечеткое ребро ги-