УДК 512. 542

К ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.В. Путилов, А. В. Воронина, С. В. Гегеле, М. С. Ковалева, Е. М. Кабанова

Устанавливается *p*-нильпотентность и дисперсивность конечной группы с заданными полунормальными подгруппами. Получены новые оценки нильпотентной π-длины π-разрешимой конечной группы и *p*-длины метасверхразрешимой конечной группы. Доказаны критерии включения определенной подгруппы в гиперцентр разрешимой конечной группы с нильпотентной холловой подгруппой.

Ключевые слова: *конечная группа, полунормальная подгруппа, p-длина, метасверхразрешимая группа, гиперцентр.*

Все рассматриваемые группы конечные. $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Согласно [1], подгруппа H группы G называется полунормальной в G, если существует такая подгруппа K из G, что $G=HK$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K, отличной от K. Подгруппу K называют супердобавлением к подгруппе H в группе G. Все необходимые обозначения и определения можно найти в [2]. G_p – силовская p-подгруппа группы G, $p\in \pi(G)$.

Под $\{q,p,r\}$-группой будем понимать конечную группу G порядка $|G|=qpr$, где q,p,r – простые числа, причем $q>p>r$, а также $G=Q\rtimes(P\times R)$, где $Q=\langle a\rangle$, $P\times R=\langle b\rangle$, $|Q|=q$, $|P|=p$, $|R|=r$, $Q=G'$ – коммутант группы G.

Теорема 1. Пусть r – наименьший простой делитель порядка конечной группы G, а также для любого $p\in \pi(G)\backslash\{r\}$ каждая р-подгруппа группы G полунормальна в G и P – силовская p-подгруппа из G. Тогда P нормальна в G, когда в G нет секций изоморфных $\{q,p,r\}$-группе.

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка. Так как P – полунормальная подгруппа в группе G, то, по определению полунормальной подгруппы, $G=PD$ и $PK\subset G$, для любой подгруппы K из D, отличной от D. По лемме 2[1] D будет холловой подгруппой в G. Кроме того, по лемме 1[1] подгруппа P полунормальна в произведении PK. Если $|\pi(G)|=2$, то по лемме 3 [3] подгруппа P нормальна в группе G, что противоречиво. Следовательно, $|\pi(G)|\geq 3$.

Тогда подгруппа D отлична от D_r. Пусть D_r – ненормальная подгруппа в D. Ясно, что нормализатор D_r в D будет собственной подгруппой в D, а, следовательно, существует максимальная подгруппа M в D, такая, что $N_D(D_r)\subseteq M$. По теореме I.7.6[2] подгруппа M ненормальна в D. Поэтому в D существует максимальная подгруппа M_1 сопряженная с M и $|D_r|$ делит $|M_1|$. Поскольку D – супердобавление к P в G, то подгруппы PM и PM_1 будут собственными подгруппами в G. Тогда по индукции подгруппа P нормальна в PM и P нормальна в PM_1. Следовательно, подгруппы M и M_1 содержатся в нормализаторе подгруппы P в группе G. Так как M отлична от M_1, то $D=\langle M,M_1\rangle$ и $D\subseteq N_G(P)$. Получим, что $G=PD\subseteq N_G(P)$. Значит, P нормальна в G, что противоречиво.

Следовательно, D_r нормальна в D. Пусть D_{t_i} – силовская t_i-подгруппа в D для $t_i\in \pi(G)\backslash\{r\}$. Так как D_{t_i} будет силовской t_i-подгруппой в G, то D_{t_i} –полунормальная подгруппа в G. Тогда по лемме 1[1] D_{t_i} будет полунормальной в D. Поэтому $D=D_{t_i} D_i$, где $i\in \{1,2,\ldots,k\}$, $k=|\pi(D)\backslash\{r\}|$. Поскольку D_i – холлова подгруппа в D и $(t_s,t_m)=1$ для любых

$s,m\in\{1,2,\ldots,k\}$ с условием $s\neq m$, то $D=D_sD_m$. Следовательно, произведения PD_s и PD_m будут собственными подгруппами в G. Значит, по индукции подгруппа P будет нормальной в PD_s и P будет нормальной в PD_m. Тогда группа $G=PD_sPD_m$ будет содержаться в нормализаторе P в G, откуда подгруппа P нормальна в G. Таким образом, $|\pi(D)|=2$.

Пусть $\pi(D)=\{r,q\}$. Если $p>q$, то по лемме 3[3] $P\lhd G$. Поэтому $p<q$ и $D_q\lhd G$. Ясно, что D_r-собственная подгруппа в D. Поэтому в D существует максимальная подгруппа S, такая, что $D_r\subseteq S$. Если S ненормальна в D, то существует подгруппа S_1 сопряженная с S и $|D_r|$ делит $|S_1|$.

Проводя рассуждения аналогичные тому случаю, когда D_r ненормальна в D, придем к противоречию. Следовательно, подгруппа S нормальна в D. Кроме того, существует элемент $x\in D\backslash S$, являющийся q-элементом.

Подгруппа $T=PS$ собственная в G. Рассмотрим подгруппу $K=P\langle x\rangle A$, где $A\subseteq D_r$. Подгруппы $\langle x\rangle A$ и K существуют в G по условию теоремы. Подгруппа K будет собственной в G и удовлетворять условию теоремы, когда или $\langle x\rangle\subset D_q$, $1\subset A\subseteq D_r$ или $\langle x\rangle=D_q$, $1\subset A\subset D_r$. Тогда по индукции подгруппа P нормальна в K. Так как $D=\langle x,S\rangle$ включается в нормализатор P в G, то группа $G=PD$ включается в $N_G(P)$. Значит, $P\lhd G$. Противоречие с выбором G.

Поэтому $D_q=\langle x\rangle$, $D_r=\langle y\rangle$ и $|D_q|=q$, $|D_r|=r$. Кроме того, $D_r=S$ и $D=D_q\times D_r$. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда по условию теоремы P_1D-собственная подгруппа в G, откуда по индукции P_1 нормальна в P_1D. Тогда P_1 нормальна в G. Рассмотрим факторгруппу G/P_1, в которой по лемме 1[1] каждая p-подгруппа для $p>r$ будет полунормальной. Тогда по индукции P/P_1 нормальна в G/P_1, откуда P нормальна в G. Следовательно, в P нет истинных подгрупп, то есть P – циклическая группа и $|P|=p$.

Итак, группа $G=P\,(Q\times R)$, $Q=D_q$, $R=D_r$, $|G|=qpr$. По теореме IV 2.8 [2] подгруппа PQ нормальна в G. Так как факторгруппа G/PQ циклическая, то коммутант G' включается в PQ. По теореме IV 2.11 [2] коммутант G' будет циклической подгруппой G. Тогда из равенства $G'=PQ$ получим, что $P\lhd G$. Поэтому $G'=Q$. Поскольку $G/Q=QPR/Q\cong PR$, то подгруппа PR абелева. Следовательно, PR- циклическая группа, откуда

$G=Q\rtimes(P\times R)$, где $Q=\langle a\rangle$, $P\times R=\langle b\rangle$. Значит, G будет $\{q,p,r\}$-группой, что невозможно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если выполняются все условия теоремы 1, то группа G будет r-нильпотентной с нильпотентным r- дополнением.

Доказательство. По теореме 1 каждая силовская p-подгруппа группы G будет нормальной подгруппой в G для любого $p\,\hat{I}\,p(G)\backslash\{r\}$. Поэтому их произведение будет нормальным нильпотентным r-дополнением в G. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Если в группе G выполняются все условия теоремы 1, то G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Пусть $p(G)=\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k=r\}$, а также $p_1>p_2>p_3>\ldots>p_k=r$. Тогда по теореме 1 подгруппы G_{p_i} будут нормальными в G для i=1, 2, …, (k-1). Поэтому в G существуют нормальные подгруппы G_{p_1}, $G_{p_1}G_{p_2}$, $G_{p_1}G_{p_2}G_{p_3}$, …, $G_{p_1}G_{p_2}...G_{p_{k-1}}$, которые образуют нормальный ряд группы G, факторы которого имеют порядки $|G_{p_i}|$, i=1, 2, …, k. Значит G дисперсивна по Оре. Следствие 2 доказано.

Теорема 2. Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если M – полунормальная подгруппа в G, то супердобавление к M в G будет циклической p-группой и $|G:M|=p$, $p\,\hat{I}\,p(G)$.

Доказательство. Пусть A – супердобавление к M в G и $B\subset A$. Так как M полунормальна в G, то $MB\subset G$. Тогда из максимальности M, следует, что $B\subset M$. Поэтому для любых различных максимальных подгрупп C и D из A верно, что $C \subset M$, $D \subset M$. Откуда, $A=<C, D>\subset M$, что противоречиво. Значит, в A существует только одна максимальная подгруппа. Тогда A – циклическая p-группа, для простого $p \in p(G)$. Так как $|A:B|=p$, где B – максимальная подгруппа из A, то $|G:M|=|G|/|M|=(|M||A|)/(|M\cap A||M|)=|A|/|B|=p$. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. Если в конечной группе G каждая максимальная подгруппа полунормальна в G, то группа G сверхразрешима.

Доказательство. По теореме 2 индекс каждой максимальной подгруппы в группе G равен простому числу из $p(G)$. Тогда по теореме VI. 9.5 [2] группа G сверхразрешима. Следствие 3 доказано.

Определение. Конечная группа G называется метасверхразрешимой, если в G есть сверхразрешимая нормальная подгруппа, факторгруппа по которой сверхразрешима.

Теорема 3. Если G – конечная метасверхразрешимая группа, то $l_p(G)\leq 2$ для наибольшего простого делителя р порядка группы G.

Доказательство. Пусть G – метасверхразрешимая группа, N – нормальная сверхразрешимая подгруппа G, такая что G/N сверхразрешима и p – наибольший простой делитель порядка группы G.

Пусть p не делит $|G/N|$. Тогда $G_p\subseteq N$. Поскольку подгруппа N сверхразрешима, то подгруппа G_p нормальна в N. Значит, G_p char $N\leq G$, откуда $G_p\leq G$. Поэтому $l_p(G)=1$, что влечет $l_p(G)\leq 2$.

Следовательно, p делит $|G/N|$. Так как группа G/N – сверхразрешима, то силовская p-подгруппа G_pN/N нормальна в G/N. Поскольку силовская p-подгруппа N_p является характеристической в N, то N_p нормальна в G и $N_p\subseteq P=O_p(G)$. Тогда можно построить нормальный ряд вида: $<1>=E\leq P\leq PN\leq G_pN\leq G$ группы G. Найдем порядки его факторов $(G_pN)/(PN)$ и $G/(G_pN)$. Так как

$$|G_pN/NP| = \frac{|G_pN|}{|NP|} = \frac{|G_p||N||N_p|}{|N\cap G_p||N||P|} = \frac{|G_p||N_p|}{|N_p||P|} = \frac{|G_p|}{|P|}$$

и $|G/G_pN| = \dfrac{|G|}{|G_pN|} = \dfrac{|G||N\cap G_p|}{|G_p||N|} = \dfrac{|G:G_p|}{|N:N_p|}$, то факторгруппа $(G_pN)/(PN)$ является р-группой и факторгруппа $G/(G_pN)$ будет p'-группой. Следовательно, $l_p(G)\leq 2$, где p – наибольший простой делитель порядка группы G. Теорема 3 доказана

Определим нильпотентную p-длину p-разрешимой конечной группы G. Пусть $F(X)$ – подгруппа Фиттинга группы X и

$P_0^n=1, N_i^n/P_i^n=O_{p'}(G/P_i^n), P_{i+1}^n/N_i^n=F(G/N_i^n)$, i=1, 2,.. Тогда наименьшее k, для которого в ряде $1=P_0^n\subseteq N_0^n\subseteq P_1^n\subseteq N_1^n\subseteq\ldots$ выполняется равенство $N_k^n=G$, называется нильпотентной p-длиной p-разрешимой группы G и обозначается через $l_p^n(G)$. Всегда $l_p(G)\leq l_p^n(G)$, где $l_p(G)$ – p-длина p-разрешимой группы G. Если $p=\{p\}$, р-простое число, то $l_p^n(G)=l_p(G)=l_p(G)$. Равенство $l_p(G)=l_p^n(G)$ сохраняется также для p-разрешимой группы с нильпотентной p-холловой подгруппой.

Теорема 4. Пусть G – p-разрешимая конечная группа. Если коммутант p-холловой подгруппы группы G является e-разложимой группой для $e\subseteq p(F(G))$, то $l_p^n(G)\leq 1+\max_{p\in p} l_p(G)$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и группа G – контрпример минимального порядка. В соответствии с леммой 1 и леммой 7 из [4] условия теоремы 4 наследуются факторгруппами группы G. Тогда по лемме 2[4] справедливы отношения $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$, и в группе

G существует единственная минимальная нормальная самоцентрализуемая подгруппа $F = P_1^n = O_{q',q}(G)$ для некоторого простого $q \in p$. Поэтому F включается в p -холлову подгруппу H группы G.

Пусть K – коммутант p -холловой подгруппы H. По условию теоремы подгруппа K будет e -разложимой. Так как $F=F(G)$ и $e \subseteq p(F) = \{q\}$, то $e = \{q\}$. Поэтому $K=Q\times D$, где Q – силовская q-подгруппа группы K. Поскольку подгруппа D характеристическая в K, и K характеристическая в H, то D характеристическая в H. Значит, подгруппа D нормальна в H. Из того, что $(|D|,|F|)=1$ следует включение подгруппы D в централизатор F, который совпадает с F, что противоречиво. Следовательно, подгруппа D единичная. Тогда $K=Q$. Таким образом, подгруппа K является q-группой, что влечет абелевость силовских p-подгрупп группы G, для любого простого $p \in p \setminus \{q\}$. Поэтому по теореме VI. 6.6 из [2] справедливо $l_p(G) = 1$ для всех $p \in p \setminus \{q\}$, откуда следует отношение $\max_{p\in p} l_p(G) = l_q(G)$.

Пусть F – силовская подгруппа группы G. Тогда в факторгруппе G/F p -холлова подгруппа H/F абелева и по лемме 4 [4] $l_p^n(G/F) = 1$. Поэтому

$$l_p^n(G) \le 2 \le 1 + \max_{p\in p} l_p(G),$$

что противоречит выбору группы G.

Значит, F не является силовской подгруппой группы G. Тогда $l_q(G) = l_q(G/F) + 1$. Далее по индукции получаем, что

$$l_p^n(G) = l_p^n(G/F) + 1 \le 1 + \max_{p\in p} l_p(G/F) + 1 = 1 + l_q(G/F) + 1 = 1 + (l_q(G) - 1) + 1 =$$
$$= 1 + l_q(G) = 1 + \max_{p\in p} l_p(G).$$

Итак, $l_p^n(G) \le 1 + \max_{p\in p} l_p(G)$,что противоречиво. Следовательно, контрпримера к теореме 4 не существует. Теорема 4 доказана.

Следствие 4 (теорема 2 [4]). Если G – p -разрешимая группа, у которой коммутант p -холловой подгруппы нильпотентен, то $l_p^n(G) \le 1 + \max_{p\in p} l_p(G)$

Теорема 5. Пусть N – нормальная подгруппа разрешимой конечной группы G, в которой π-холлова подгруппа нильпотентна для $\pi=\pi(N)$. Подгруппа N включается в гиперцентр $Z_{¥}(G)$ группы G тогда и только тогда, когда порядок факторгруппы $G/C_G(N)$ делится только на простые числа из $\pi(N)$.

Доказательство. *Необходимость***.** Пусть $N\subseteq Z_{¥}(G)$ и Q – силовская q-подгруппа группы G, где q - простое число с условием, что (q, |N|)=1. Так как N включается в $Z_{¥}(G)$, то подгруппа NQ обладает возрастающим центральным рядом. Следовательно, NQ будет нильпотентной группой. Тогда $Q \subseteq C_G(N)$. Поскольку это справедливо для всех силовских q-подгрупп таких, что $(q, |N|)=1$, то $|G/C_G(N)|$ делится только на простые числа из $\pi(N)$.

Достаточность. Пусть $|G/C_G(N)|$ делится только на простые числа из $\pi(N)$ и S – любая π-холлова подгруппа в группе G. Тогда $G=C_G(N)\cdot S$. Обозначим $N_t=Z_t(S)\cap N$. Так как $[N_t, G]=$ $[N_t, C_G(N)\cdot S]= [N_t, S]\subseteq N\cap [Z_t(S), S]\subseteq N\cap Z_{t-1}(S)=$

$=N_{t-1}$, то образуют подгруппы N_t центральную цепь в группе G. Следовательно, $N_t\subseteq Z_t(G)$. Поэтому для подходящего целого k справедливо $N=N_k\subseteq Z_k(G)\subseteq Z_{¥}(G)$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть в разрешимой конечной группе G π-холлова подгруппа нильпотентна. Тогда и только тогда гиперцентр $Z_{¥}(G)$ содержит π-подгруппу H группы G, когда $O^p(G)\subseteq C_G(H)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $H\subseteq Z_{¥}(G)$. Тогда из нильпотентности и нормальности $Z_{¥}(G)$ в G следует, что H^G будет π-группой в $Z_{¥}(G)$. Поэтому по теореме 5 $O^p(G)\subseteq C_G(H^G)$, откуда $O^p(G)\subseteq C_G(H)$.

*Достаточность***.** Пусть $O^p(G)\subseteq C_G(H)$. Поскольку $O^p(G)$ – нормальная подгруппа в G, то $O^p(G)=(O^p(G))^x\subseteq C_G(H)^x=C_G(H^x)$ для любого элемента x из G. Следовательно $O^p(G)\subseteq C_G(H^G)$. Пусть S – π-холлова подгруппа из G, которая содержит H. Тогда $G=O^p(G)\cdot S=C_G(H)\cdot S$. Поэтому $H^G=<H^g \mid g\in G>=<H^{ca} \mid c\in C_G(H), a\in S>=<H^a \mid a\in S>\subseteq S$. Применяя теорему 5 получим, что $H\subseteq H^G\subseteq Z_{¥}(G)$. Теорема 6 доказана.

It is established *p*-nilpotency and dispersible finite group with the set seminormal subgroups. New estimations nilpotent π-lengths π-solvable finite group and *p*-lengths metasupersolvable finite group are received. Criteria of inclusion of a certain subgroup in the hypercenter solvable finite group with nilpotent Hall a subgroup are proved.
The key words: *finite group, seminormal subgroup, p-length, metasupersolvable group, hypercenter.*

Список литературы

1. *Монахов В.С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. Заметки. 2006. Т. 80, Вып. 4. С. 573-581.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.: Springer 1967. 793 s.
3. *Монахов В.С., Подгорная В.В.* Конечные группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. Т. 6, Вып. 27. С. 50-54.
4. *Монахов В.С. Шпырко О.А.* О нильпотентной π-длине конечной π- разрешимой группы // Дискретная математика. 2001. Т. 13, Вып. 3. С. 145-152.

Об авторах

С.В. Путилов – канд. физ-мат. наук, доц., Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, algebra@brgu.ru.

А.В. Воронина, С.В. Гегеле, М.С. Ковалева, Е.М. Кабанова – магистры 6 курса, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, annet_v32@mail.ru, g-svetulya@mail.ru.