

К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ЦИЛИНДРА*

© 2017 г. Н.Б. Золотов¹, Е.Д. Пожарская¹, Д.А. Пожарский¹

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия,

TO CONTACT PROBLEMS FOR A CYLINDER

N.B. Zolotov¹, E.D. Pozharskaya¹, D.A. Pozharskii¹

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Золотов Никита Борисович – студент, Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Nikita B. Zolotov – Student, Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Пожарская Елизавета Дмитриевна – студент, Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

Elizaveta D. Pozharskaya – Student, Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru

Пожарский Дмитрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: pozharda@rambler.ru

Dmitry A. Pozharskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: pozharda@rambler.ru

В условиях осевой симметрии изучена контактная задача линейной теории упругости о действии жесткого кольцевого бандажа конечной длины на бесконечный полый круговой цилиндр. Интегральное уравнение этой задачи получено при помощи преобразования Фурье. Для символа ядра интегрального уравнения контактной задачи предложена новая аппроксимация, которая эффективна при любой толщине стенок полого цилиндра. На основе этой аппроксимации получено сингулярное асимптотическое решение, а также сделаны расчеты контактного давления и его интегральной характеристики для цилиндров с тонкими стенками. Важно, что параметры аппроксимации находились при помощи численного метода Монте-Карло. Данный метод особо эффективен при большом числе неизвестных параметров, возникающих именно для тонкостенных цилиндров. Ранее для аналогичных задач использовалась аппроксимация суммой двух разных функций, что приводило лишь к приближенному решению функционального уравнения, которое возникает в методе Винера – Хопфа. Более простая аппроксимация ранее применялась для сплошного цилиндра. Также изучался случай конечного полого цилиндра при скользящей заделке его торцов. Найденное решение может быть применено для анализа прочности трубопроводов при укреплении их бандажами.

Ключевые слова: контактная задача, упругий полый цилиндр.

The axially symmetric contact problem of the linear elasticity theory is investigated on the interaction between a rigid annular sleeve of finite length and an infinite hollow circular cylinder. The integral equation of the problem is derived by using a Fourier transformation. A new approximation for the kernel symbol of the integral equation of the problem is suggested to be effective for any cylinder wall thickness. On the basis of this approximation a singular asymptotic solution is constructed, the contact pressure and its integral characteristic are calculated for thin-walled cylinders. It is important that the parameters of the approximation are calculated with the help of the numerical Monte Carlo method. This method is especially fruitful for a big number of unknown parameters arising for thin-walled cylinders. Earlier for similar problems an approximation in the form of a sum of two different functions has been used giving only an approximate solution of the functional equation in the Wiener - Hopf method. A more simple approximation was used for a solid cylinder. The case of a finite hollow cylinder with end-walls subject to sliding support has been previously considered. The solution constructed can be useful for strength analysis of pipelines in contact with sleeves.

Keywords: contact problem, elastic hollow cylinder.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00331).

Исследована осесимметричная контактная задача теории упругости о взаимодействии жесткого кольцевого бандажа конечной длины с бесконечным полым круговым цилиндром. Предложена новая аппроксимация символа ядра интегрального уравнения (ИУ) этой задачи, эффективная при любой толщине стенок цилиндра. На основе этой аппроксимации получено сингулярное асимптотическое решение, сделаны расчеты интегральной характеристики контактного давления для тонкостенных цилиндров. Ранее для аналогичных задач использовалась аппроксимация суммой двух функций, приводящая лишь к приближенному решению функционального уравнения, возникающего в методе Винера – Хопфа [1]. Более простая аппроксимация применялась для сплошного цилиндра [2]. Изучался случай конечного полого цилиндра [3].

В цилиндрических координатах r, z рассмотрим полый упругий цилиндр $\{\rho_1 \leq r \leq \rho, |z| < \infty\}$ с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . На цилиндр с натягом δ надет жесткий кольцевой бандаж шириной $2a$; остальная часть его поверхности свободна от напряжений. При помощи преобразования Фурье сведем задачу к ИУ относительно контактного давления $\sigma_r(\rho, z) = -q(z)$ ($|z| \leq a$), которое после введения безразмерных обозначений

$$x = \frac{z}{a}, \quad u = \rho s, \quad \lambda = \frac{\rho}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{q(z)}{\theta},$$

$$f = \frac{\delta}{a}, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu}, \quad k = \frac{\rho_1}{\rho}$$

запишем в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f \quad (|x| \leq 1), \quad (1)$$

$$K(t) = \int_0^\infty L(u) \cos ut du, \quad L(u) = \frac{L_1(u)}{2(1-\nu)L_2(u)},$$

$$L_1(u) = (\Omega_1 - \omega_1)^2 - 4f_1 - 2f_2 - 2f_3,$$

$$L_2(u) = -(\Omega_1 - \omega_1)^2 + 4f_1(1 - \omega_1\Omega_1) +$$

$$+ 2f_2(1 - \Omega_1^2) + 2f_3(1 - \omega_1^2) - 4f_1^2 + 4f_2f_3,$$

$$f_1 = \frac{u^2}{4(1-\nu)} [k^2(\omega_0\Omega_0 + \omega_1\Omega_1) - (\omega\Omega + 1)],$$

$$f_2 = \frac{u^2}{4(1-\nu)} [k^2(\omega_0^2 - \omega_1^2) - (\omega^2 - 1)],$$

$$f_3 = \frac{u^2}{4(1-\nu)} [k^2(\Omega_0^2 - \Omega_1^2) - (\Omega^2 - 1)],$$

$$\omega = \frac{I_0}{I_1}, \quad \omega_0 = \frac{I_0^*}{I_1}, \quad \omega_1 = \frac{I_1^*}{I_1},$$

$$\Omega = \frac{K_0}{K_1}, \quad \Omega_0 = \frac{K_0^*}{K_1}, \quad \Omega_1 = \frac{K_1^*}{K_1},$$

$$I_n = I_n(u), \quad K_n = K_n(u),$$

$$I_n^* = I_n(ku), \quad K_n^* = K_n(ku), \quad n = 0, 1.$$

Здесь $I_n(u), K_n(u)$ – модифицированные функции Бесселя. В пределе при $k \rightarrow 0$ ИУ (1) совпадает с известным ИУ для сплошного цилиндра [1–3]. Параметры k и λ характеризуют соответственно толщину стенок цилиндра и относительную ширину бандажа.

Функция-символ $L(u)$ характеризуется следующим асимптотическим поведением в нуле и бесконечности:

$$L(u) = A + o(1) \quad (u \rightarrow +0),$$

$$A = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{k^2}{(1-\nu^2)(1-k^2)}; \quad (2)$$

$$L(u) = \frac{1}{u} + \frac{D}{u^2} + o(u^{-2}) \quad (u \rightarrow +\infty), \quad D = 1 - 2\nu.$$

При достаточно малых λ для решения ИУ (1) применим сингулярный асимптотический метод [2]. Для факторизации функции $L(u)$ аппроксимируем ее на действительной оси с учетом свойств (2) выражением ($G_m \neq G_n$ при $m \neq n$)

$$L^*(u) = \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C^2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{D}{\sqrt{u^2 + E^2}}\right) \prod_{m=1}^M \frac{(u^2 + A_0^2 G_m^2)}{(u^2 + G_m^2)},$$

$$\frac{B}{C^2} \exp\left(\frac{D}{E}\right) A_0^{2M} = A, \quad E > 1. \quad (3)$$

Для нахождения параметров аппроксимации (3) использовался метод Монте-Карло, слабо зависящий от значения M . При росте M наблюдается увеличение точности аппроксимации. При возрастании k построение аппроксимации (3) усложняется (например, при $k=0,1$ для достижения погрешности $\theta = 1\%$ достаточно взять лишь $M=1$).

В таблице при $\nu=0,3, E=1,1, M=4$ даны значения параметров аппроксимации (3) и ее относительная погрешность θ для тонкостенного цилиндра ($k \geq 0,9$). Значения D и C находятся соответственно по последним равенствам (2) и (3).

Параметры аппроксимации и характеристика / The parameters of approximation and characterization

k	B	A_0	G_1	G_2	G_3	G_4	$\theta, \%$	P/f
0,90	1,536	2,873	7,414	7,151	6,625	7,150	7,0	1,60
0,91	1,550	2,951	6,957	6,964	7,915	7,819	7,0	1,42
0,92	1,633	3,048	8,739	8,036	7,578	7,249	6,5	1,25
0,93	1,746	3,163	8,622	7,998	8,489	8,785	6,0	1,09
0,94	1,906	3,271	9,257	9,713	8,371	9,626	6,0	0,925
0,95	2,016	3,542	12,736	8,335	10,572	9,682	6,0	0,764
0,96	2,209	3,709	14,537	11,753	9,997	9,897	5,5	0,605
0,97	2,566	3,910	11,866	11,432	15,655	14,825	6,0	0,450
0,98	2,580	4,480	8,899	18,720	19,862	20,001	8,5	0,296
0,99	4,003	5,564	15,701	16,339	35,844	41,186	11,0	0,144

В результате главный член асимптотического решения ИУ (1) при малых λ можно построить в форме

$$\varphi(x) = \frac{f}{\lambda} \left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - A^{-1} \right] \quad (|x| \leq 1),$$

$$\omega(s) = \frac{W(s) + I(s)}{\sqrt{A}}, \quad (4)$$

$$I(s) = -\frac{D}{\pi} \int_0^s W(s-\tau) K_0(E\tau) d\tau,$$

$$W(s) = \frac{\exp(-Bs)}{\sqrt{\pi s}} + \frac{C}{\sqrt{B}} \operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \sum_{m=1}^M T_m R(A_0 G_m, s),$$

$$R(F, s) = \frac{F-C}{\sqrt{B-F}} \exp(-Fs) \operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}) + \frac{C}{\sqrt{B}} \operatorname{erf}(\sqrt{Bs}),$$

$$T_m = \prod_{n=1}^M (G_n - A_0 G_m) \left[A_0^{M+1} G_m \prod_{n=1, n \neq m}^M (G_n - G_m) \right]^{-1}.$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятностей; $K_0(t)$ – модифицированная функция Бесселя. На основании формул (4) для интегральной характеристики решения получим выражение

$$\frac{P}{f} = \frac{1}{f} \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{2}{\sqrt{A}} [Z(\eta) + J(\eta)] - \frac{\eta}{A},$$

$$J(s) = -\frac{D}{\pi} \int_0^s Z(s-\tau) K_0(E\tau) d\tau, \quad \eta = \frac{2}{\lambda}, \quad (5)$$

$$Z(s) = \frac{C}{\sqrt{B}} \left[\left(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C} \right) \operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \sqrt{\frac{s}{\pi B}} \exp(-Bs) \right] + \sum_{m=1}^M T_m Q(A_0 G_m, s),$$

$$Q(F, s) = \frac{C}{\sqrt{B}} \left[\left(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{F} \right) \operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{s}{\pi B}} \exp(-Bs) \right] - \left(1 - \frac{C}{F} \right) \frac{\exp(-Fs)}{\sqrt{B-F}} \operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}).$$

В последней колонке таблицы даны значения характеристики (5) при $\lambda=0,25$. Как показывает численный анализ, при $\lambda < 1$ погрешность формул (4), (5) менее $(7+\theta)\%$. Для сплошного цилиндра ($k=0$) в окрестности значения $\lambda=2$ наблюдалось сближение сингулярного и регулярного асимптотических решений [2]. При возрастании k (утончении стенок цилиндра) контактное давление снижается. Развита методика позволяет получить явное решение контактной задачи практически для любых значений k . Отметим, что при $k \geq 0,98$ полый цилиндр можно считать цилиндрической оболочкой.

Литература

1. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л.А. Галина. М. : Наука, 1976. 493 с.
2. Александров В.М., Пожарский Д.А. Об одном асимптотическом методе в контактных задачах // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 2. С. 295–302.
3. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М. : Физматлит, 2004. 301 с.

References

1. Razvitie teorii kontaknykh zadach v SSSR [The development of the theory of contact problems in the USSR]. Ed. L.A. Galin. Moscow, Nauka, 1976, 493 p.
2. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Ob odnom asimptoticheskom metode v kontaknykh zadachakh [On an asymptotic method in contact problems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1999, vol. 63, No. 2, pp. 295–302.
3. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. *Analiticheskie metody v kontaknykh zadachakh teorii uprugosti* [Analytical methods in contact problems of the theory of elasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 301 p.