

3. Столяров А. В. Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

4. Христофорова А. В. Двойственная геометрия регулярной гиперповерхности в пространстве аффинной связности. Чебоксары, 2011.

5. Чакмазян А. В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

A. Khristoforova

Normal connections on the hypersurface equipment in sense Norden — Cartan in the space of affine connection

This work is devoted to the geometry of normal connections induced by the equipment in sense Norden — Cartan of hypersurface in the space of affine connection.

УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

К геометрии канальной поверхности

В евклидовом пространстве рассматривается канальная поверхность. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: канальная поверхность, сфера, циклида Дюпена.

Канальная гиперповерхность исследуется как гиперповерхность, которая является огибающей однопараметрического семейства гипersфер [1, с. 379; 2].

Обозначим через $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой γ — геометрического места центров семейства, $R(s)$ — радиус соответствующей гипersферы (s — длина дуги кривой γ). Уравнение семейства гипersфер запишется в виде

$$(r - \rho)^2 = R^2. \quad (1)$$

Характеристика семейства — $(n - 2)$ -сфера — есть пересечение гиперсферы (1) и гиперплоскости

$$(r - (\rho - RR'\tau), \tau) = 0. \quad (2)$$

Центр этой $(n - 2)$ -сферы есть

$$C = \rho - RR'\tau, \quad (3)$$

где τ — орт касательной к линии центров.

Радиус $(n - 2)$ -сферы $\tilde{R}$ равен

$$\tilde{R} = R\sqrt{1 - R'^2}. \quad (4)$$

Для того чтобы огибающая была вещественной гиперповерхностью, необходимо выполнение неравенства

$$1 - R'^2 \geq 0. \quad (5)$$

Обозначим через $e(v_1, \dots, v_{n-2})$ орт $(n - 2)$ -мерной характеристики. В силу (2) $(e, \tau) = 0$. Уравнение канальной гиперповерхности примет вид

$$r(u, v) = \rho(u) - R(u)R'(u)\tau(u) + \tilde{R}(u)e(v_1, \dots, v_{n-2}). \quad (6)$$

Пример 1. Линия центров — винтовая линия в E^3 .

Обозначим через ν, β орты главной нормали и бинормали кривой γ . Тогда уравнение канальной поверхности запишется в виде

$$r(u, v) = \rho(u) - R(u)R'(u)\tau(u) + \tilde{R}(u)(\cos(v)\nu(u) + \sin(v)\beta(u)).$$

Имеем

$$\rho(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad \tau(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(u), \cos(u), 1)$$

$$\beta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(u), -\cos(u), 1),$$

$$\nu = [\beta, \tau] = (-\cos(u), -\sin(u), 0).$$

Пусть $R(u) = au + d$. При условии (5) можно положить $c = d = \frac{1}{2}$. Тогда $R = \frac{u+1}{2}$, $RR' = \frac{u+1}{4}$, $a = \frac{(u+1)\sqrt{3}}{4}$.

Используя математический пакет *Maple* [3], построим каналовую поверхность, линию центров (винтовую) и сферу с центром на винтовой линии, полагая $u = \frac{\pi}{4}$ (рис. 1, 2).

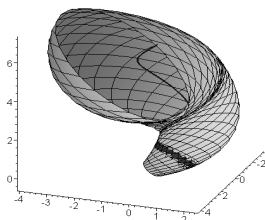


Рис. 1. Каналовая поверхность, линия центров, характеристика

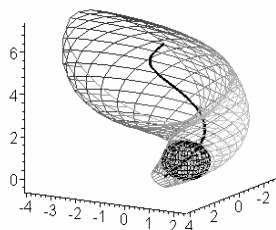


Рис. 2. Каналовая поверхность, линия центров, сфера

Пример 2. Циклиды Дюпена [1, с. 381; 2] в E^3 — это дважды каналовые поверхности, для которых линии центров C_1, C_2 семейства сфер есть фокальные кривые γ_1, γ_2 второго порядка, расположенные в ортогональных плоскостях.

Рассмотрим случай, когда кривая γ_1 представляет собой эллипс, а кривая γ_2 — гиперболу (рис. 3). Зададим эти кривые.

$$C_1 : \rho_1(u) = (b \sin(u), 0, a \cos(u)), b = \sqrt{a^2 - c^2};$$

$$C_2 : \rho_2(u^*) = (0, b \sinh(u^*), c \cosh(u^*)).$$

Каналовую поверхность (рис. 4) ищем в виде

$$r(u, v) = \rho_1(u) - R_1(u)R_1'(u)\tau(u) + \tilde{R}_1(u)(\cos(v)\nu(u) + \sin(v)\beta(u)),$$

где

$$\tau(u) = (b \cos(u), 0, -a \sin(u));$$

$$\nu(u) = (-a \sin(u), 0, -b \cos(u)), \beta(u) = (0, 1, 0).$$

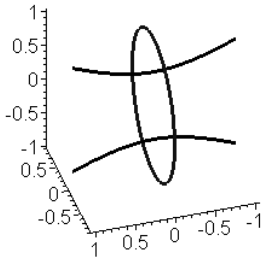


Рис. 3. Фокальные кривые:
эллипс, гипербола

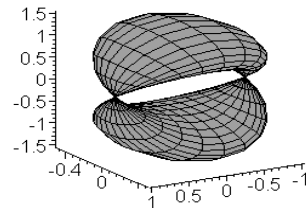


Рис. 4. Канальная поверхность

Для нахождения $R_1(u)$ потребуем, чтобы сферы с центрами C_1, C_2 и радиусами $R_1(u), R_2(\bar{u})$ соответственно касались (рис. 5—8).

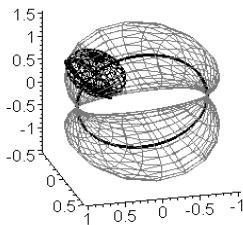


Рис. 5. Канальная поверхность,
сфера, $u = \frac{\pi}{4}$

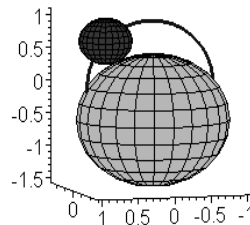


Рис. 6. Внешнее касание сфер

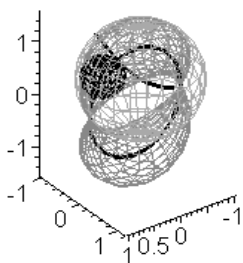


Рис. 7. Каналовая поверхность и сферы (внутреннее касание)

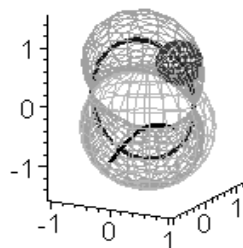


Рис. 8. Каналовая поверхность и сферы (внешнее касание)

Имеем $(\rho_1(u) - \rho_2(u^*), \rho_1(u) - \rho_2(u^*)) = (R_1(u) \pm R_2(u^*))^2$, или $c \cos(u) \pm a \cosh(u^*) = R_1(u) + R_2(u^*)$. Откуда $R_1(u) = c \cos(u) + d$, $R_2(u^*) = \pm a \cosh(u^*) - d$ ($d = \text{const}$).

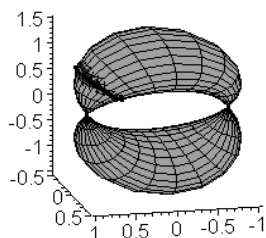


Рис. 9. Поверхность и характеристика

Используя ограничение (5) на $R_1(u)$, находим $c^2 \leq 1$, $a^2 > c^2$. Полагая $c = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $d = 0$, построим поверхность

$$r(u, v) = r_1(u) - R_1(u)R_1'(u)t(u) + \tilde{R}_1(u)(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)) ,$$

где $\tilde{R}_1 = R_1 \sqrt{1 - R_1'^2}$ (рис. 9),

сферу с центром $\rho_1 = \rho_1(\frac{\pi}{4})$ на эллипсе радиуса $R_1 = R_1(\frac{\pi}{4})$ (рис. 6), сферы с центрами $\rho_2 = \rho_2(\frac{\pi}{4})$ на ветвях гиперболы с радиусами $R_2 = R_2(\frac{\pi}{4})$ (рис. 7, 8).

Чтобы нагляднее определить касание сфер, центры которых расположены на гиперболе, с каналовой поверхностью, рассмотрим пересечение сферы и каналовой поверхности с плоскостью

$$x t_1 \left(\frac{1}{2}\right) + (y - bsh\left(\frac{1}{2}\right)t_2) \left(\frac{1}{2}\right) + (z - c \cos\left(\frac{1}{2}\right)t_3) \left(\frac{1}{2}\right) + a^2 ch\left(\frac{1}{2}\right)sh\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

где $t = (t_1, t_2, t_3)$ — орт касательной к гиперболе. Имеем рисунки (рис. 10, 11).

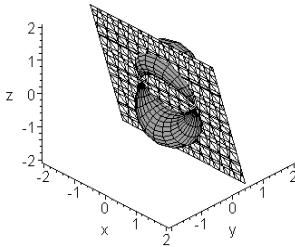


Рис. 10. Характеристика на каналовой поверхности

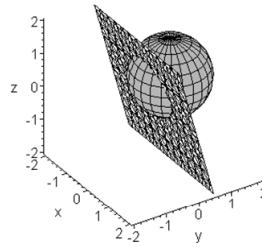


Рис. 11. Характеристика на сфере

Список литературы

1. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.
2. Чешкова М. А. К геометрии дважды каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Математические труды. 2003. Т. 6, № 11. С. 169—181.
3. Васильев А. Н. Maple 8. М. ; СПб. ; Киев, 2003.

M. Cheshkova

To geometries of kanal surface

In Euclidean space kanal surface is studied. In the process of study system computer mathematics *Maple* is used.