

Класс автоматных функций R называется предполным, если $R \subset \mathbf{P}$ и для любой автоматной функции $f \notin R$ выполнено $\{f\} \cup R = \mathbf{P}$.

Автоматную функцию G_0 , задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовем автоматной функцией “задержки”, здесь $a(t), q(t), b(t) \in E_2$.

Автоматную функцию T_0 , задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} (q_1(1), q_2(1)) = (0, 0), \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (a_1(t), a_2(t)) \text{ при } (a_1(t), a_2(t)) = (0, 0) \text{ и } (a_1(t), a_2(t)) = (1, 1), \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_1(t), q_2(t)) \text{ при } (a_1(t), a_2(t)) = (0, 1), \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_2(t), q_1(t)) \text{ при } (a_1(t), a_2(t)) = (1, 0), \\ (b_1(t), b_2(t)) = (q_1(t), q_2(t)), \end{cases}$$

назовем автоматной функцией “триггер”. Здесь $(a_1(t), a_2(t)), (q_1(t), q_2(t)), (b_1(t), b_2(t)) \in (E_2)^2$.

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и то же периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через $\mathbf{K}$. Имеет место

Теорема. *Не существует предполного класса автоматных функций, содержащего замкнутый класс $[\mathbf{K} \cup \mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}]$.*

Доказательство теоремы опубликовано в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
2. Алешин С.В. Алгебраические системы автоматов. М.: МАКС Пресс, 2016.
3. Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Докл. АН СССР. 1963. **151**, № 3. 493–496.
4. Бабин Д.Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретн. матем. 1989. **1**, вып. 4. 423–431.
5. Мальцев А.И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. 1966. **5**, № 2. 5–24.
6. Бабин Д.Н. Класс автоматов с суперпозициями, не расширяющийся до предполного // Интеллектауальные системы. Теория и приложения. 2016. **20**, № 4. 162–173.

Поступила в редакцию
21.03.2018

УДК 532.5.013

К ДВИЖЕНИЮ ПЛАВЯЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ

О. О. Иванов¹

Рассматривается движение одиночной плавящейся сферической частицы в собственном расплаве. Выведена формула для реактивной силы, возникающей при обтекании плавящейся частицы. Для определения функции изменения радиуса решена автомодельная задача плавления для неподвижной частицы в покоящемся расплаве. В предположении малости числа Рейнольдса выявлено, что существует некоторое критическое значение разности температур частицы и расплава, разделяющее ускоряющееся и замедляющееся движения частицы.

Ключевые слова: плавление, реактивная сила, перегретый расплав.

The motion of a melting spherical particle in own melt is considered. A formula for the thrust appearing during flow around the melting particle is derived. The self-similar melting

¹ Иванов Олег Олегович — асп. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ivanov@imec.msu.ru.

problem is solved for a particle at rest in a quiescent melt to determine the radius of a particle. For a small Reynolds number, it is shown that there exists a critical temperature difference between the particle and the melt such that the accelerating and decelerating regimes of motion are separated.

Key words: melting, thrust, overheated melt.

При движении жидкости или газа с дисперсной примесью наблюдаются такие явления, как фазовые переходы, коагуляция, седиментация, физико-химические реакции и т.д. [1–3]. Следует отметить, что задачи тепломассообмена, учитывающие поток массы через поверхность частицы, обычно рассматриваются в стационарной постановке, в которой предполагается постоянство массы частицы. В некоторых случаях потеря массы и изменение формы могут приводить к возникновению реактивной силы [4], по порядку совпадающей, например, с силой трения, и ее учет может изменять характер движения.

Известно [5], что при обтекании источника равномерным потоком плотности ρ со скоростью на бесконечности U_∞ в рамках идеальной жидкости на источник будет действовать сила $-\rho U_\infty Q$, где Q — объемный расход источника.

Данная сила обусловлена перераспределением импульса в расплаве жидкости за счет натекающего потока, и ее величина не зависит от действия сил вязкости. Поэтому можно рассмотреть задачу о нестационарном обтекании сферической частицы радиуса $R(t)$ в рамках идеальной жидкости. Для течения расплава можно ввести потенциал [6]

$$\varphi = V_\infty(t) \cos \theta \left(r + \frac{R^3(t)}{2r^2} \right) - \frac{Q(t)}{4\pi r},$$

где r, θ — длина радиуса-вектора и полярный угол в сферической системе координат, а $Q(t)$ определяется из граничного условия для радиальной составляющей скорости на сфере $v_r(R(t), t)$, значение которой не зависит от угла θ . Используя интеграл Коши–Лагранжа, можно вычислить давление p на поверхности сферы Σ_R и найти проекцию силы, действующей на частицу, на направление скорости набегающего потока вдоль оси $x = r \cos \theta$:

$$F_x = - \int_{\Sigma_R} (\rho v_x (v_r - \dot{R}) + p n_x) d\sigma = -\rho Q V_\infty + 6\pi \rho R^2 \dot{R} V_\infty + 2\pi \rho R^3 \dot{V}_\infty,$$

где n_x — проекция нормали к поверхности сферы на то же направление.

Первый член в правой части формулы представляет собой ранее рассмотренную силу, действующую на источник или сток, второй — силу, возникающую за счет изменения размеров частицы, последний отвечает за эффект присоединенной массы при неустановившемся движении тела в жидкости.

В случае движения центра масс частицы с скоростью $\mathbf{V}$ относительно покоящегося на бесконечности расплава сила будет иметь вид

$$\mathbf{F} = \rho Q \mathbf{V} - 6\pi \rho R^2 \dot{R} \mathbf{V} - \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \dot{\mathbf{V}} = -\dot{M} \mathbf{V} - \frac{\dot{M}_f}{2} \mathbf{V} - \frac{M_f}{2} \dot{\mathbf{V}}.$$

Через M и M_f обозначены масса частицы и масса вытесненного ею расплава соответственно.

Рассмотрим теперь задачу о плавлении одиночной сферической частицы переменного радиуса $R(t)$ и плотности ρ_0 , находящейся в собственном расплаве и нагретой до температуры плавления T_0 . На бесконечности задается температура $T_\infty > T_0$, т.е. существует перепад температур, поддерживающий процесс плавления. Расплав считается несжимаемой вязкой теплопроводной жидкостью плотности ρ . Если число Рейнольдса $Re = 2RV_{отн}/\nu$ мало, то, так как для металлов число Прандтля $Pr = \nu/\kappa$ (ν и κ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности соответственно, которые считаются постоянными) имеет порядок 0,01, мало также число Пекле $Pe = Pr \cdot Re$. В таком случае [7, 8] тепловой поток к частице будет очень слабо зависеть от движения частицы и данную сложную теплофизическую задачу можно разделить на тепловую для неподвижной плавящейся частицы в неподвижном расплаве и механическую.

1. Автомоделная задача плавления неподвижной частицы в неподвижном расплаве. При отсутствии относительного движения частицы задача о плавлении обладает сферической симметрией. В этом случае, учитывая выражение для радиальной скорости расплава $v(r, t) = Q/4\pi r^2$, запишем уравнение притока тепла без учета диссипации:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

На бесконечности задается условие для скорости $v \rightarrow 0$ и для температуры $T \rightarrow T_\infty$, на поверхности сферы предполагается, что $T = T_0$, где T_0 — температура плавления. Внутри сферы температура постоянна и равна T_0 .

Из соотношения на фронте плавления для потока массы $\rho(v - \dot{R}) = -\rho_0 \dot{R}$ получаем $Q = 4\pi R^2 \dot{R} \varepsilon$, где $\varepsilon = (1 - \rho_0/\rho)$. Также используем краевое условие для потока энергии в пренебрежении малыми механическими величинами:

$$\rho(v - \dot{R})c_1 T_0 + \rho c_1 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\rho \dot{R} (c_0 T_0 + \lambda). \quad (1)$$

Здесь через c_1 , c_0 , λ обозначены удельные теплоемкости расплава и частицы и удельная теплота плавления соответственно.

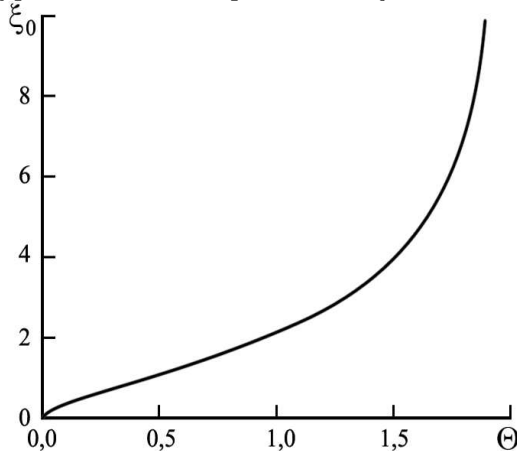
Для определения функции изменения радиуса и поля температуры рассмотрим задачу в автомоделной постановке [9]. Можно ввести автомоделную переменную $\xi = r/\sqrt{-\kappa t}$, $t < 0$. Тогда момент полного расплавления частицы соответствует $t = 0$ и сразу же можно записать соотношение для радиуса частицы:

$$R = \xi_0 \sqrt{-\kappa t}, \quad (2)$$

где ξ_0 подлежит определению. Решая задачу относительно ξ , получим распределение температуры в расплаве:

$$T = T_\infty - C_1 \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} + \frac{\varepsilon \xi_0^3}{2\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad C_1 = (T_\infty - T_0) \left[\int_{\xi_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} + \frac{\varepsilon \xi_0^3}{2\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} \right]^{-1}. \quad (3)$$

Таким образом, начальная температура определяется величиной $\xi_0 = R_0/\sqrt{-\kappa t_0}$. В случае $\varepsilon \ll 1$ можно вообще пренебречь влиянием движения расплава на поле температуры и получить из (1)–(3) уравнение для определения ξ_0 :



Зависимость решения уравнения (4) от относительного перепада температур

$$\xi_0^3 \exp(\xi_0^2/4) \int_{\xi_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} - A \left(\frac{T_\infty}{T_0} - 1 \right) = 0, \quad (4)$$

$$A = \frac{2c_1 T_0}{c_0 T_0 + \lambda - c_1 T_0}.$$

Зависимость ξ_0 от $\Theta = A(T_\infty/T_0 - 1)$ приведена на рисунке. Решение уравнения (4) носит универсальный характер, для различных металлов будет меняться лишь константа A .

Учет малых поправок для тепловых потоков, связанных с обтеканием сферической частицы вязкой жидкостью, может быть осуществлен аналогично работам [10, 11].

2. Плавление частицы в вязком расплаве. С целью учета сил трения, предполагая малость числа Рейнольдса, для одиночной частицы добавим силу Стокса в уравнение баланса сил инерции, присоединенной массы, реактивной силы и сил тяжести и Архимеда (при любом ε):

$$\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2} \right) \left(\frac{4\pi R^3}{3} \dot{\mathbf{v}} + 4\pi R^2 \dot{R} \mathbf{v} \right) + 6\pi \rho \nu R \mathbf{v} - \frac{4\pi(\rho_0 - \rho)R^3}{3} \mathbf{g} = 0.$$

После деления на массу жидкости $4\pi\rho R^3/3$, вытесненной частицей, соотношение примет вид

$$\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\dot{\mathbf{v}} + \frac{9\nu}{2R^2}\mathbf{v} + 3\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{g} = 0.$$

Из результатов п. 1 следует, что $R\dot{R} = -\kappa\xi_0^2/2$, поэтому легко перейти от дифференцирования по времени к производной по R . Проведя несложные вычисления, получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dR} = \alpha \frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{4\varepsilon\mathbf{g}R}{\kappa\xi_0^2(3-2\varepsilon)}, \quad \alpha = \frac{18\text{Pr} - \xi_0^2(9-6\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\xi_0^2},$$

решением которого является

$$\mathbf{v} = CR^\alpha + \frac{4\varepsilon\mathbf{g}R^2}{\kappa\xi_0^2(3-2\varepsilon)(2-\alpha)}, \quad \alpha \neq 2;$$

$$\mathbf{v} = R^2\left(\mathbf{C} + \frac{4\varepsilon\mathbf{g}R^2}{\kappa\xi_0^2(3-2\varepsilon)}\ln R\right), \quad \alpha = 2,$$

где $\mathbf{C}$ определяется из начального условия (при $R = R_0$).

Если $\alpha > 0$ (что соответствует небольшой разности температур $T_\infty - T_0$), то $\mathbf{v} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$, причем для $\alpha > 2$ асимптотика решения при $R \rightarrow 0$ определяется действием массовой силы $\mathbf{g}$, а при $0 < \alpha \leq 2$ — первым членом (реактивной силой).

При $\alpha < 0$ частица неограниченно ускоряется. Однако если рассмотреть порядок числа Рейнольдса $\text{Re}\Delta R^{1+\alpha}$, то окажется, что для диапазона параметров $\alpha < -1$ число Рейнольдса неограниченно растет и нарушается предположение о разделимости тепловой и механической задач $\text{Pe} \ll 1$, т.е. теория перестает быть верной. Для $-1 \leq \alpha < 0$ число Рейнольдса стремится к нулю, при этом скорость частицы неограниченно растет.

В случае $\alpha = 0$ достигается равенство реактивной силы и силы трения, а движение определяется только массовой силой. Отметим, что уменьшение силы сопротивления сферы при наличии вдува отмечалось ранее в рамках стационарной постановки задачи в работах [11, 12].

Похожая задача о расплывании круглой капли в потоке вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу экспериментально и теоретически исследовалась в работах [13, 14], где была выявлена неустойчивость, связанная с возникновением пальцеобразных структур.

Заключение. Рассмотрено нестационарное движение плавящейся частицы, находящейся в вязком расплаве. Показано, что реактивная сила может существенно ускорять частицу. Характер движения задается числом Прандтля и разностью температуры расплава на бесконечности и температуры плавления.

Автор приносит благодарность профессору А.Н. Голубятникову за руководство работой.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-010-00037).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
2. Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
4. Голубятников А.Н. О взаимодействии плавящихся частиц и моделировании гравитации // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. 4. Ч. 3. 728–729.
5. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970.
7. Acrivos A., Taylor T.D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow // Phys. Fluids. 1962. 5, N 4. 387–394.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
10. Головин А.М. Влияние вдува на сопротивление сферы в ламинарном потоке вязкой жидкости // Прикл. матем. и теор. физ. 1972. 3. 110–114.

11. Головин А.М., Фоминых В.В. Сопротивление капли с внутренним тепловыделением при ее движении в вязком потоке пара // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 2. 32–37.
12. Борис А.Ю. Медленное обтекание сильно нагретой сферы при вдуве или испарении с ее поверхности // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1982. 4. 128–134.
13. Maes R., Rousseaux G., Scheid B., Mishra M., Colinet P., De Wit A. Experimental study of dispersion and miscible viscous fingering of initially circular samples in Hele-Shaw cells // Phys. Fluids. 2010. 22, N 12. 123104.
14. Dushin V.R., Nikitin V.F., Philippov Y.G., Legros J.C. Two-component fluid convective flow in thin gaps // Acta Astronaut. 2010. 66, N 5–6. 742–747.

Поступила в редакцию
08.12.2017

УДК 531.01

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОМНИ-ЭКИПАЖА С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННОСТИ РОЛИКОВ КОЛЕС

Г. Н. Моисеев¹, А. А. Зобова²

Рассматривается динамика мобильного экипажа с тремя омни-колесами, движущегося по инерции по неподвижной, абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Для исследования влияния инерции ролика на устойчивость прямолинейных движений экипажа переднее колесо моделируется как два твердых тела: диск колеса и опорный ролик, причем ролик не проскальзывает относительно плоскости; задние колеса моделируются дисками, проскальзывающими без трения в перпендикулярном к их плоскостям направлении (безынерционная модель омни-колеса). Составлены динамические уравнения движения экипажа в форме лаконичных уравнений Татаринова для систем с дифференциальными связями. Показана их связь с динамическими уравнениями, полученными для экипажа с тремя безынерционными омни-колесами, и исследована устойчивость прямолинейных движений.

Ключевые слова: омни-колесо, устойчивость, мобильный экипаж, неголономные системы, уравнения Татаринова.

We consider the dynamics of a three-wheeled omni-mobile vehicle moving without control on perfectly rough horizontal plane. To analyze the effect of wheel roller inertial properties on stability of rectilinear motions of the vehicle, we model the front omni-wheel as two rigid bodies — a disk and a roller in contact with the plane — and assume that the roller does not slide. The other two wheels are modeled as rigid disks that can slide in the direction perpendicular to their planes (a non-inertial omni-wheel model). We use Tatarinov's laconic equations for systems with differential constraints to derive dynamic equations of the system. We compare them with the equations for a vehicle with three non-inertial omni-wheels and study the stability of rectilinear motions.

Key words: omni-wheel, stability, mobile vehicle, non-holonomic constraints, Tatarinov's equations.

1. Введение. Простейшей моделью омни-колеса, движущегося по абсолютно шероховатой плоскости, является абсолютно твердый диск, который скользит без трения в перпендикулярном к плоскости колеса направлении [1, 2]. Подобная модель основывается на бесконечной малости контактирующих роликов нулевой массы, которые равномерно распределены по ободу колеса [3]. Однако большая часть реальных моделей омни-колес содержит в конструкции лишь небольшое число крупных массивных роликов на ободе, массово-инерциальные характеристики которых могут повлиять

¹ Моисеев Георгий Николаевич — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: moiseev.georgii@gmail.com.

² Зобова Александра Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: azobova@mech.math.msu.su.