

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А. В. Бирюков

К АНАЛИЗУ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ХАОСА

Из множества натуральных чисел от 1 до N извлечем произвольным образом числовую последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n$, содержащую n чисел. Числа выбранной последовательности могут иметь различное взаимное расположение. В частности, последовательность может оказаться монотонно возрастающей, монотонно убывающей или содержать чередование экстремумов. В этом случае можно говорить о существовании некоторого порядка в расположении чисел. Однако, возможно также, что порядок такого рода отсутствует, и тогда можно говорить о хаотичности или беспорядочности расположения чисел последовательности.

В общем случае задача состоит в конструировании характеристик хаоса, позволяющих с этой точки зрения отличать друг от друга хаотические последовательности. Поскольку общеизвестной характеристикой неопределенности или хаоса является энтропия, то решение рассматриваемой задачи следует искать на пути построения каких-либо вероятностных распределений.

Приведем несколько вариантов такого построения. Одним из них может быть следующий. Рассмотрим в данной последовательности все тройки соседних чисел вида X_k, X_{k+1}, X_{k+2} ($k=1, 2, \dots, n-2$) и разобьем их на две группы:

- 1) $X_k < X_{k+1} < X_{k+2}$ или $X_k > X_{k+1} > X_{k+2}$,
- 2) $X_{k+1} > X_k, X_{k+1} > X_{k+2}$ или $X_{k+1} < X_k, X_{k+1} < X_{k+2}$.

Первая группа соответствует возрастанию или убыванию

чисел в тройке, а вторая – наличие экстремума. Подсчитаем количество троек в обеих группах и обозначим это количество соответственно через n_1, n_2 . Тогда отношения $P_1 = n_1 / (n-2)$; $P_2 = n_2 / (n-2)$ можно рассматривать как вероятности встречи тройки из первой и второй групп. Энтропия этого вероятностного распределения равна

$$H = -P_1 L(P_1) - P_2 L(P_2),$$

где символом L обозначены логарифмы с основанием 2. Очевидно, что величина H принимает значения из отрезка от 0 до 1. При этом $H = 1$ лишь в том случае, когда $P_1 = P_2$, т.е. когда числовых троек в обеих группах будет одинаковое количество. Нулевая энтропия соответствует случаю, когда $P_1=1, P_2=0$ или $P_1=0, P_2=1$, т.е. когда последовательность монотонно возрастает (убывает) или когда происходит чередование экстремумов, что графически соответствует пилообразной линии.

Пусть, например, имеются последовательности:

- 1) 3, 5, 2, 7, 6, 1, 4, 8, 10, 9

и

- 2) 8, 9, 10, 1, 4, 2, 3, 7, 5, 6.

Вычисление вероятностей и значений энтропии дает:

- 1) $P_1 = 5/8, P_2 = 3/8, H = 0,954$;
- 2) $P_1 = 6/8, P_2 = 2/8, H = 0,811$.

Как видим, первая последовательность более хаотична, чем вторая.

Приведенный критерий оценки хаотически не улавливает различия между возрастанием и убыванием последовательности, а также не различает максимума и минимума в числовой тройке. Увеличить чувствительность критерия можно

следующим образом.

Рассмотрим знаки разности $X_{k+1} - X_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и поставим положительной разности число 1, а отрицательной – число 0. Тогда данной последовательности будет соответствовать двоичная последовательность из единиц и нулей, в которой пары соседних членов могут быть расположены четырьмя вариантами: 11, 10, 01, 00. Каждому варианту соответствует вероятность (относительная частота встречи). Для распределения вероятностей $P_1, \dots, P_4$ вычислим энтропию $H_2 = -[P_1 L(P_1) + \dots + P_4 L(P_4)] / 2$, которая и будет количественной характеристикой арифметического хаоса. Как и прежде, величина H принимает значения на отрезке от 0 до 1. При этом у возрастающей последовательности $P_1 = 1$, для убывающей $P_2 = 1$. В обоих случаях энтропия равна нулю.

Если же экстремумы чередуются, то $P_3 = P_4 = 1/2$ и, следовательно $H_2 = 0,5$. Таким образом, в пилообразной картине в отличие от предыдущего новый критерий отмечает наличие некоторого хаоса.

В проведенном выше примере двоичные последовательности и соответствующие им вероятности имеют вид:

- 1) 101001110; 2/8, 3/8, 2/8, 1/8;
- 2) 110101101; 2/8, 3/8, 3/8, 0, что дает значения энтропии: 1) $H_2 = 0,953$; 2) $H_2 = 0,781$. В сравнении с первым критерием хаотичности, где разность энтропий 0,143, второй с разностью энтропий 0,172 оказывается более чувствительным к вариации числовых оценок хаоса.

Изложенный подход объединяет в один класс все монотонные последовательности, считая их вполне упорядоченным и обладающими нулевой энтропией. Другими словами, беспорядочность рассматривается лишь как чередование монотонных фрагментов последовательности с экстремумами или пиками.

Однако это не вполне согласуется с интуитивным представлением об отсутствии порядка. Примером тому может служить возрастающая последовательность простых чисел, в которой расстояние между соседними числами не подчиняется какой-либо закономерности.

Очевидно, что с рассматриваемых позиций различия между возрастающей и убывающей последовательностями не существует, поскольку одна из другой получается перенумерацией членов. Поэтому остановимся лишь на возрастающей последовательности натуральных чисел $X_{k+1} > X_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

Вместе с ней рассмотрим последовательность разностей $Z_k = X_{k+1} - X_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) и последовательность вторых разностей $V_k = Z_{k+1} - Z_k$ ($k=1, 2, \dots, n-2$). У первой из них все члены положительны, а у второй могут иметь разные знаки.

Вторым разностям сопоставим числа 1 или 0 в зависимости от того, положительна она или отрицательна. Если вторая разность равна нулю, то условимся сопоставлять ей число 1.

У образованной двоичной последовательности будем, как и прежде, искать энтропию распределения вероятностей (относительных частот), с которыми встречаются соседние пары чисел 11, 10, 01, 00. Значение этой энтропии будет числовой характеристикой хаоса в расположении членов возрастающей последовательности. Отметим, что энтропия арифметической прогрессии равна нулю, поскольку

для нее все первые разности одинаковы и, следовательно, вторые разности равны нулю.

Представляет интерес поведение энтропии с увеличением числа членов возрастающей последовательности. Пусть, например, имеются три последовательности простых чисел с числом членов 10, 20, 30. Это числа от 3 до 31, от 3 до 73 и от 3 до 119. Энтропии этих последовательностей равны соответственно 0,779; 0,952; 0,946. Отсюда видно, что с ростом числа членов последовательности ее энтропия асимптотически стремится к единице.

В двоичной последовательности, соответствующей вторым разностям, можно рассматривать не только пары соседних чисел, но и тройки, четверки и т.д. Остановимся на случае с тремя соседними числами: 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000. Этим восьми вариантам соответствуют вероятности их встречи $P_1, \dots, P_8$ с энтропией распределения $H_3 = -[P_1L(P_1) + \dots + P_8L(P_8)]/3$.

Сравним, для примера, величины H_2 и H_3 у последовательностей простых чисел от 3 до 31 и от 3 до 73. Для первой из них $H_2 = 0,779$; $H_3 = 0,693$, а для второй $H_2 = 0,952$; $H_3 = 0,885$, т.е. в обоих случаях $H_2 > H_3$. При этом разность энтропий 0,140 и 0,067 убывает с увеличением числа членов последовательности.

К рассматриваемому классу комбинаторных задач принадлежат и задачи, связанные с изучением случайных графов. Граф $A(n, m)$ с n вершинами и m ребрами называется случайным, если вероятность смежности любых двух его вершин равна 0,5. Так как число ребер полного графа равно $n(n-1)/2$, то среднее значение случайной величины m равно $n(n-1)/4$.

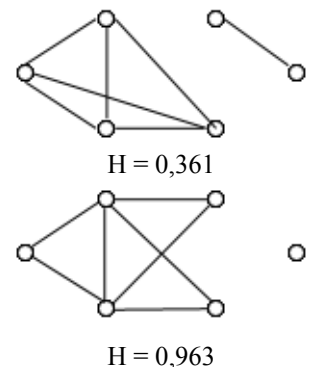
Со случайным графом можно связать вероятностное распределение и его энтропию сле-

дующим образом. Рассмотрим у данного графа все его подграфы третьего порядка. Это множество содержит четыре класса подграфов: цикл, двухзвенная цепь, ребро и вершина, три попарно несмежных вершины. Если $P_1, \dots, P_4$ – вероятности (относительные частоты) встречи каждого из четырех подграфов в данном графе, то энтропия этого распределения

$H = -[P_1L(P_1) + \dots + P_4L(P_4)]/2$ характеризует алгоритмическую сложность описания данного графа и может выступать в роли количественной оценки его хаотичности.

Пусть, например, имеются 24 графа с шестью вершинами и семью ребрами. Заметим, что у полного графа шестого порядка число ребер равно 15. Поэтому у случайного графа число ребер равно 7 или 8. Но поскольку граф $A(6, 8)$ является дополнением графа $A(6, 7)$, то энтропии у них одинаковы.

Найденные значения энтро-



пии для 24 графов $A(6, 7)$ принадлежит отрезку от 0,361 до 0,963. На рисунке приведены изображения графов с экстремальным значением энтропии.

Вероятности распределения случайной величины H в семи интервалах от 0,3 до 1 равны соответственно 0,02; 0,02; 0,04; 0,08; 0,36; 0,28; 0,20. Как видим, распределение обладает ярко выраженной асимметрией с модой в интервале от 0,7 до 0,8.