ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ

УДК 51(07)

Е. М. Вечтомов, В. И. Варанкина, Е. Н. Лубягина

ИЗУЧЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается методика и методология введения и изучения основных топологических понятий и топологической структуры в целом. Показана необходимость и важность обучения топологии студентов математических направлений подготовки. Представлено авторское изложение данного материала.

In this article we consider the methods and philosophy of introducing and studying topological conceptions. We explain the necessity and importance of considering topology by students-mathematics. There presented the interpreted algebraic structures by the authors.

Ключевые слова: топология, топологическое пространство, непрерывное отображение, методика изучения.

Keywords: topology, continuous map, topological space, methods of studying.

Введение

Мы продолжаем развивать подход к изучению математики как структурной науки, начатый в серии работ [1] по изучению теоретико-множественных, алгебраических, порядковых, метрических структур. На очереди – рассмотрение конкретных структур дискретной математики (комбинаторика, графы, автоматы), компьютерной алгебры и вычислительной геометрии.

Топология (от древнегреческих *топос* – место и *логос* – учение) – математическая наука, исследующая явления *непрерывности* и *сходимости*, выраженные в понятиях *топологическое пространство* и *непрерывное отображение*. Одной из первых топологических задач считается известная головоломка о кенигсбергских мостах, которую в 1736 г. решил знаменитый швейцарский ученый Леонард Эйлер (1707–1783). В XIX в. топология трактовалась как анализ положения (от латинского *analysis situs*). Сам термин «топология» ввел в научный оборот немецкий математик Иоганн Листинг (1808–1882) в 1848 г. в книге «Предварительные исследования по топологии». Топология относится к геометрическому направлению в развитии математики. В современной топологии разрабатываются следующие основные разделы: общая топология, геометрическая топология, алгебраическая топология, дифференциальная топология, вычислительная (компьютерная) топология.

Общая топология (или теоретико-множественная топология) – учение о топологической структуре, рассматриваемой в наиболее абстрактном и чистом виде. В 1914 г. немецкий математик Феликс Хаусдорф (1868–1942) в своей книге [2] ввел в рассмотрение понятие отделимого топологического пространства, позднее получившего название хаусдорфова пространства. Тем самым было положено начало новому разделу математики – общей топологии. Термин «общая топология» впервые использовал в 1937 г. американский математик Маршалл Стоун (1903–1989) – в названии своей фундаментальной работы [3]. Впервые общее определение топологического пространства дано в 1922 г. польским математиком Казимежем Куратовским (1896–1980) с помощью оператора замыкания. В 1925 г. создатель московской топологической школы П. С. Александров (1896–1982) дал определение топологического пространства через открытые множества, а в 1927 г. польский математик Вацлав Серпинский (1882–1969) – через замкнутые множества. Понятие топологического пространства лежит в основе современной топологии и математики в целом [4].

С топологией можно познакомиться по трудам [5], а для начала рекомендуем книги [6].

Методология и методика изучения

Современная математика во многом – структурная наука, изучающая формальные отношения реальности, отражающие проявления философских категорий количества, формы, меры и выраженные в понятии *математической структуры*. Группа французских математиков, выступавшая под псевдонимом Никола Бурбаки (1937–1968), выделила три типа фундаментальных математических структур: *алгебраический*, *порядковый* и *топологический*. Подчеркнем, что Бурбаки в 1948 г. в статье «Архитектура математики» [7] назвали математику учением о математических структурах. См. также [8].

Изучению топологических пространств предшествует изучение теории метрических пространств [9], которая служит пропедевтикой освоения и овладения топологической структурой. В топологии, как и в теории метрических пространств, применяется геометрическая терминология (точка, пространство, подпространство и т. д.), хорошо согласующаяся с нашими наглядными представлениями. В процессе преподавания топологии необходимо опираться на изученные ранее понятия и структуры (геометрические, числовые, метрические). При этом важнейшим конкретным примером топологического пространства была и остается числовая прямая **R** [10].

Топологическое пространство – фундаментальный вид абстрактных пространств, формализующий понятия *непрерывности*, *предельного перехода* (сходимости) и *близости* между точками пространства. Важно изучать топологические пространства вместе с их непрерывными отображениями, образующими в совокупности *категорию* топологических пространств и непрерывных отображений.

Предметом топологии служит изучение *топологических инвариантов* и свойств фигур в топологических пространствах, которые сохраняются при *гомеоморфизмах*. Евклидовы пространства $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ позволяют наглядно продемонстрировать геометрическую сторону мышления в топологии, опирающуюся на интуицию [11]; при этом гомеоморфизмы геометрических фигур мыслятся как их деформации без разрывов. С другой стороны, в дидактическом и методологическом плане весьма полезно рассмотрение различных экзотических пространств, включая конечные пространства [12], далеких от классических объектов. Весьма желательно, чтобы изучение абстрактного топологического материала – там, где это возможно – сопровождалось наглядными геометрическими образами и схемами, мотивировками и иллюстрациями.

Следует обратить внимание на раскрытие существующих связей между основными типами математических структур [13].

Раздел «Элементы топологии» входит в программу обучения студентов направлений подготовки, связанных с математикой. Начала топологии изучаются студентами-математиками в курсах геометрии и теории функций действительного переменного, на спецкурсах – после раздела «Метрические пространства».

Содержательно методика включает в себя отбор основных понятий, примеров и фактов; последовательность изложения материала; систему учебных и исследовательских упражнений и задач.

Структурное изучение топологии ведется в рамках целостного методологического подхода, по своей направленности и форме общего с изучением других фундаментальных математических структур [14].

Методика изучения топологической структуры предполагает следующее:

1. Пропедевтика на геометрическом и метрическом материале.
2. Исторические этапы развития топологии.
3. Методологические аспекты.
4. Базовые определения и терминология.
5. Примеры топологических пространств.
6. Простейшие свойства топологических пространств.
7. Логико-математический анализ понятия топологического пространства (независимость аксиом, конечные пространства, обобщения).
8. Изложение элементов общей топологии.
9. Взаимосвязи топологической структуры с алгебраической и порядковой структурами.
10. Применения в математическом анализе, геометрии, функциональном анализе, дискретной математике.
11. Система учебных и развивающих упражнений.
12. НИРС по общей топологии. В качестве примера укажем тему исследования sc-функций [15].

Топологические пространства

В ходе изучения данной темы вводятся понятия топологического пространства, его подпространства, хаусдорфовости, компактности, связности топологических пространств, непрерывного отображения гомеоморфизма топологических пространств, факторпространства и прямого произведения.

Начнем с классического определения Александрова.

Определение 1. *Топологическим пространством* называется пара $\langle X, \tau\rangle$, где τ – множество подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям:

(1) $\varnothing, X \in \tau$;

(2) объединение любого непустого семейства множеств из τ лежит в τ;

(3) пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ.

Условия (1)–(3) суть аксиомы топологического пространства, множество τ называется *топологией* на X. Множества $U \in \tau$ называются *открытыми множествами* топологического пространства $\langle X, \tau\rangle$, а их дополнения $X\setminus U$ – *замкнутыми множествами*. Символ τ часто опускается.

Приведем теперь определение Куратовского, взявшего за основу понятие замыкания множества.

Определение 2. *Топологическим пространством* называется множество X с заданным на множестве $\mathbf{B}(X)$ всех его подмножеств *оператором замыкания* [ ], обладающим следующими свойствами:

i) $A \subseteq [A]$ для любого $A \subseteq X$;

ii) $[[A]] = [A]$;

iii) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$;

iv) $[\varnothing] = \varnothing$.

Теорема 1. *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть дано топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$ в смысле определения 1. Зададим на $\mathbf{B}(X)$ оператор замыкания [ ] следующим образом: для любого $A \in \mathbf{B}(X)$ положим $[A] = \cap \{B \subseteq X: A \subseteq B$ и B замкнуто в $\langle X, \tau\rangle\}$. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A в топологическом пространстве $\langle X, \tau\rangle$. Легко проверяются все свойства *i*)–*iv*) определения 2.

Обратно, рассмотрим топологическое пространство $\langle X, [\ ]\rangle$ в смысле определения 2. При этом множество $B \subseteq X$ называется замкнутым, если $[B] = B$. Тогда $\tau = \{A \subseteq X: X\backslash A$ замкнуто$\}$ удовлетворяет аксиомам (1)–(3) определения 1.

Остается заметить, что указанные соответствия взаимно обратны: для любого $A \subseteq X$ имеем $A \in \tau \Rightarrow [X\backslash A] = X\backslash A \Rightarrow A \in \tau$.

Замечание 1. Помимо указанных трех определений топологических пространств существуют и другие эквивалентные им определения. Они базируются на следующих понятиях: предельная точка, внутренность, граница, нарост, сходимость направленности, окрестность точки, окрестность множества, открытая база, отношение близости и т. д.

Определение 3. Отображение f: $X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U в Y есть открытое множество в X. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение f: $X \to Y$ топологических пространств называется их *гомеоморфизмом* (X на Y), а сами пространства – *гомеоморфными* ($X \approx Y$).

Непрерывность отображения топологических пространств обобщает понятие непрерывности отображений метрических пространств, а гомеоморфность двух топологических пространств обобщает понятие изометрии метрических пространств. Отметим, что гомеоморфные пространства обладают абсолютно одинаковыми абстрактными топологическими свойствами. Поэтому компактное пространство [0, 1] не гомеоморфно некомпактному пространству (0, 1); здесь пространства берутся с естественной топологией. Компактные пространства [0, 1] и окружность также не гомеоморфны (почему?). А если из окружности выбросить одну точку, то получим некомпактное пространство, гомеоморфное интервалу (0, 1).

Рассмотрим далее основные условия отделимости, накладываемые на топологические пространства, в порядке их усиления: T_0-пространства $\supset$ T_1-пространства $\supset$ хаусдорфовы пространства $\supset$ регулярные пространства $\supset$ тихоновские пространства $\supset$ нормальные пространства $\supset$ совершенно нормальные пространства.

Определения 4. Топологическое пространство X называется:

T_0-пространством, или *колмогоровским* – введенным в математику А. Н. Колмогоровым (1903–1987) в 1935 г., если для любых его различных точек x и y найдется открытое множество U в X, содержащее ровно одну из них: $x \in U$, $y \notin U$ или $y \in U$, $x \notin U$;

T_1-пространством, если для любых его различных точек x и y найдется открытое множество в X, содержащее x и не содержащее y;

хаусдорфовым (или *T_2-пространством*), если для любых его различных точек x и y найдутся такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $x \in U$ и $y \in V$;

регулярным (или *T_3-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых его точки x и не содержащего ее замкнутого множества B найдутся такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $x \in U$ и $B \subseteq V$;

тихоновским (*вполне регулярным*, или *$T_{3,5}$-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых точки x и не содержащего ее замкнутого множества B в X существует непрерывная функция f: $X \to \mathbf{R}$, для которой $f(x) = 1$ и $f(B) = \{0\}$;

нормальным (или *T_4-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $A \subseteq U$ и $B \subseteq V$;

совершенно нормальным, если оно является T_1-пространством и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует такая непрерывная функция f: $X \to \mathbf{R}$, что $A = Z(f) = \{\, x \in X : f(x) = 0\}$ и $B = Z(1 - f)$.

Отметим, что множества вида $Z(f)$ называются *нуль-множествами*, а $X\backslash Z(f)$ – *конуль-множествами* на X.

Открытое множество, содержащее данную точку или данное множество, называется *окрестностью* этой точки или этого множества. В терминах окрестностей можно переформулировать пять из семи сформулированных выше условий отделимости. Попробуйте это сделать.

Большая лемма Урысона утверждает, что во всяком нормальном пространстве для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует непрерывная функция f: $X \to [0, 1]$, для которой $A \subseteq Z(f)$ и $B \subseteq Z(1 - f)$.

Определение 5. Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. *Открытым покрытием* пространства X называется любое семейство его открытых множеств, объединение которого совпадает со всем X, а подпокрытие семейства множеств – это подсемейство данного семейства.

Общее понятие компактности впервые сформулировал П. С. Александров в 1922 г., ему посвящена одна из первых в мире монографий по общей топологии [16], подготовленная к печати еще в 1923 г. (вышла в свет в 1929 г.).

Множество A топологического пространства $\langle X, \tau\rangle$, рассматриваемое с индуцированной топологией, состоящей из всевозможных множеств вида $A \cap U$, где $U \in \tau$, называется *подпространством* в X.

Важнейшие понятия *факторпространства* и *тихоновского произведения* топологических пространств мы здесь приводить не будем. Отметим только следующие вещи. Тихоновское произведение семейства топологических пространств есть их прямое произведение с некоторой естественным образом заданной топологией. В общей топологии и во всей классической математике центральную роль играет теорема компактности Тихонова 1935 г.: произведение непустого семейства компактных пространств есть компактное пространство. В 1930 г. А. Н. Тихонов (1906–1993) доказал, что тихоновские пространства исчерпываются (с точностью до гомеоморфизма) подпространствами компактных хаусдорфовых пространств (называемых *компактами*).

В качестве иллюстрации докажем следующий результат.

Теорема 2. *Любое компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Возьмем в X произвольные непересекающиеся замкнутые множества A и B. Подпространства A и B компактны (упражнение 8). Фиксируем точку $a \in A$. Для произвольной точки $b \in B$ существуют непересекающиеся открытые окрестности U_b и V_b точек a и b соответственно. Множества $B \cap V_b$ образуют открытое покрытие компактного пространства B (с индуцированной топологией подпространства). Поэтому $B \subseteq V = V_b \cup V_c \cup \ldots \cup V_d$ для конечного числа точек $b, c, \ldots, d \in B$. Открытое множество $U_b \cap U_c \cap \ldots \cap U_d$ содержит a и не пересекает V.

Итак, произвольно выбранная точка $a \in A$ и множество B обладают непересекающимися открытыми окрестностями U_a и V_a. Объединение множеств U_a, $a \in A$, содержит компактное подпространство A. Поэтому $A \subseteq U = U_x \cup \ldots \cup U_z$ для конечного числа точек $x, \ldots, z \in A$. Открытое множество $V = V_x \cap \ldots \cap V_z$ содержит B и не пересекается с открытой окрестностью U множества A, что завершает доказательство теоремы.

Определение 6. *Базой* топологического пространства X называется такое множество S его открытых подмножеств, что любое открытое множество пространства X является объединением некоторых множеств из S, а *предбазой* пространства X называется всякое множество его открытых подмножеств, конечные пересечения которых образуют базу в нем.

Как уже отмечалось, важнейший класс топологических пространств составляют метрические пространства. Открытые шары произвольного метрического пространства образуют базу топологии соответствующего (метризуемого) топологического пространства.

Некоторые примеры

1. Пусть X – *антидискретное* топологическое пространство, то есть его топология $\tau = \{\varnothing, X\}$. Если мощность X не меньше 2, то такое X не является T_0-пространством.

2. Возьмем $X = \{0, 1\}$ с топологией $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$. Полученное T_0-пространство называется *связным двоеточием* и не является T_1-пространством.

3. Рассмотрим любое бесконечное множество X в точности с *коконечными* открытыми множествами, представляющими собой дополнения в X до конечных множеств. Получаем нехаусдорфово T_1-пространство.

4. На единичном отрезке $[0, 1]$ рассмотрим расширение естественной топологии, порожденное добавлением замкнутого множества $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Это топологическое пространство хаусдорфово, но не регулярно. Заметим, что существуют регулярные пространства, не являющиеся тихоновскими.

5. *Стрелка Александрова*. Пусть на $[0, 1)$ задана топология, открытую базу которой образуют всевозможные полуотрезки $[a, b)$, где $0 \le a < b \le 1$. Данное топологическое пространство совершенно нормально, но неметризуемо.

6. Тихоновское произведение двух стрелок Александрова, будучи тихоновским пространством, не является нормальным. Примером ненормального тихоновского пространства служит также тихоновское произведение несчетного семейства прямых $\mathbf{R}$.

7. *Лексикографический квадрат*. На прямом произведении $(0, 1) \times (0, 1)$ топология порождена лексикографическим порядком: $M = (a, b) < (c, d) = N$ означает, что $a < c$ или $b < d$ при $a = c$. Базу этой топологии образуют всевозможные интервалы (M, N), $M < N$. Получаем пример нормального пространства, не являющегося совершенно нормальным. Лексикографический квадрат является даже *наследственно нормальным* пространством, т. е. все его подпространства нормальны.

8. Всякое топологическое пространство X с топологией $\mathbf{B}(X)$ называется *дискретным*.

Определение 7. Подмножество топологического пространства называется *открыто-замкнутым*, если оно одновременно открыто и замкнуто. Топологическое пространство называется *связным*, если в нем нет непустых собственных открыто-замкнутых множеств.

В дискретных пространствах все подмножества открыто-замкнуты. Кроме того, все неодноэлементные дискретные пространства несвязны.

Замечание 2. Пространства из примеров 2–4 компактны и связны. Пространства 5–7 некомпактны и связны. Дискретное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.

Наряду с условиями отделимости важную роль в общей топологии играют так называемые аксиомы счетности.

Определение 8. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет: *первой аксиоме счетности*, если для каждой точки $x \in X$ существует такое счетное семейство (U_n) ее (открытых) окрестностей, что любая окрестность точки x целиком содержит какую-либо из окрестностей U_n; *второй аксиоме счетности*, если X обладает счетной базой.

Мини-пространства

Найдем топологические пространства с небольшим числом элементов. Рассмотрим произвольное топологическое пространство $\langle X, \tau \rangle$.

Топология τ на множестве X является ограниченной дистрибутивной решеткой – подрешеткой булеана $\mathbf{B}(X)$ всех подмножеств в X относительно отношения включения $\subseteq$.

Точку x топологического пространства назовем *открытой* (*замкнутой*, *изолированной*), если одноточечное множество $\{x\}$ открыто (соответственно: замкнуто, открыто-замкнуто).

Введем на пространстве $\langle X, \tau \rangle$ бинарное отношение ~ «неотделимости» точек: $x \sim y$ означает, что $\forall\ U \in \tau\ (x \in U \Leftrightarrow y \in U)$ для любых точек $x, y \in X$. Легко видеть, что ~ есть отношение эквивалентности на X. Поэтому пространство X разбивается на (непересекающиеся) классы попарно неотделимых точек.

Пусть $\langle X, \tau \rangle$ – конечное топологическое пространство. Любая точка из X имеет наименьшую окрестность. В T_0-пространстве X наименьшие окрестности различных точек не совпадают. Обозначим через n число элементов в X, а через k – число классов эквивалентности пространства X по отношению ~. Число k равно числу замыканий одноэлементных подмножеств пространства X.

Изобразим на диаграммах Эйлера – Венна все топологические пространства, имеющие не более четырех элементов (точек). Топологии на n-элементном множестве будем задавать предбазами открытых множеств. Между n-элементными T_0-пространствами и n-элементными упорядоченными множествами существует каноническое взаимно однозначное соответствие (см. [17]). По диаграмме Хассе данного конечного упорядоченного множества из его порядковых идеалов составляется минимальная предбаза топологии (рис. 1).

При $n = 1$ получается 1 топологическое пространство, при $n = 2$ имеем 3 пространства, а при $n = 3$ существует 9 попарно негомеоморфных пространств. Пространства 5–9 суть

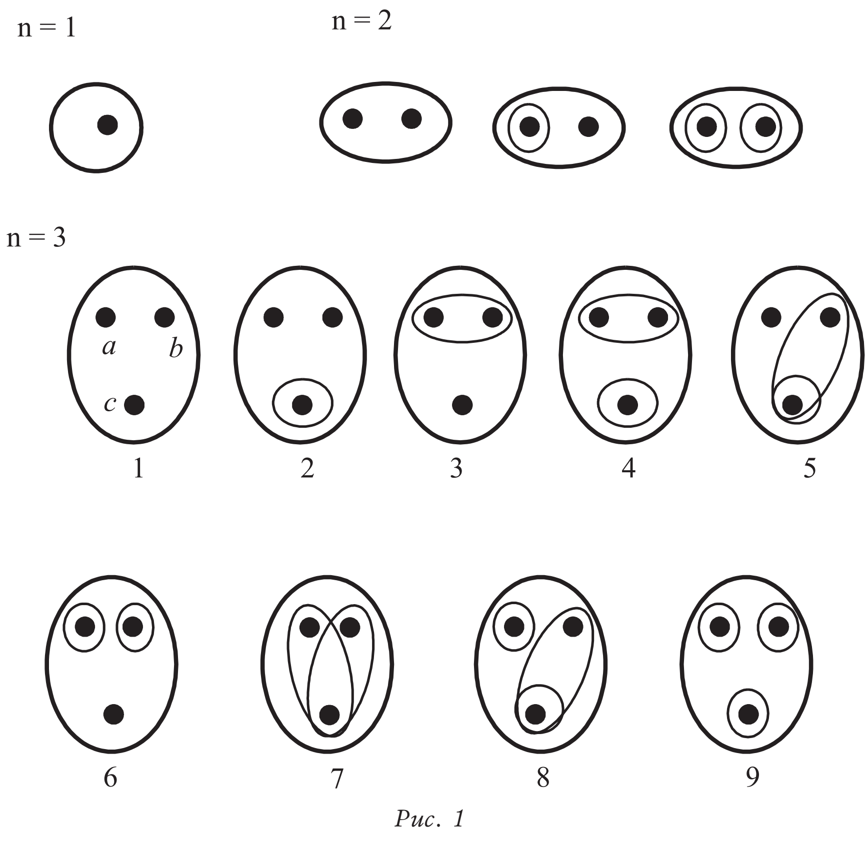

Рис. 1

T_0-пространства, отвечающие трехэлементным упорядоченным множествам (5), (3), (4), (2) и (1) соответственно. Имеются: 1 топологизация одноэлементного пространства, 4 топологизации двухэлементного пространства и 29 топологий на трехэлементном множестве $\{a, b, c\}$: $1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 3 + 3 + 6 + 1$.

Последовательно построим все четырехэлементные топологические пространства на множестве $X=\{a, b, c, d\}$. Число k принимает значения 1, 2, 3 или 4.

Первые 6 пространств получаются совсем легко. При этом число соответствующих топологизаций равно $1 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 = 25$ (рис. 2).

В случае $k = 3$ множество X разбивается на $1 + 1 + 2$ точки, и пространства $\langle X, \mathrm{t}\rangle$ получаются из пяти трехэлементных T_0-пространств с номерами 5–9 добавлением одной точки к каждому классу соответствующего разбиения; их $11 = 3 + 2 + 2 + 3 + 1$. А число топологизаций $X = \{a, b, c, d\}$ равно $12 \cdot 3 + (6 + 12) + (12 + 6) + 12 \cdot 3 + 6 = 114$ (рис. 3).

Случай $k = 4$ включает все четырехэлементные T_0-пространства, которые находятся в естественном взаимно однозначном соответствии со всеми четырехэлементными упорядоченными множествами (см. рис. 4).

Получаем 33 топологических пространства с четырьмя элементами. Известно, что существует ровно 219 упорядочений, стало быть, столько же и T_0-топологизаций четырехэлементного множества. Поэтому всего имеем $25 + 114 + 219 = 358$ топологизаций четырехэлементного множества.

Замечание 3. Математический интерес представляют комбинаторные задачи нахождения числа негомеоморфных n-элементных топологических пространств и числа всех топологий на n-элементном множестве при $n \geq 5$. Можно надеяться на получение хороших оценок снизу и сверху для этих чисел.

Упражнения

1. Убедитесь, что объединение любого семейства открытых множеств и пересечение всякого конечного семейства открытых множеств метрического пространства открыты. Верны ли аналогичные утверждения для замкнутых множеств?

2. Восполните детали в доказательстве теоремы 1.

3. Дайте определение топологического пространства через замкнутые множества.

4. Для любого подмножества A произвольного топологического пространства X докажите следующие свойства взятия замыкания и внутренности: $[A] = X\backslash(X\backslash A)^{\circ}$, $A^{\circ} = X\backslash[X\backslash A]$,

k = 1 или 2

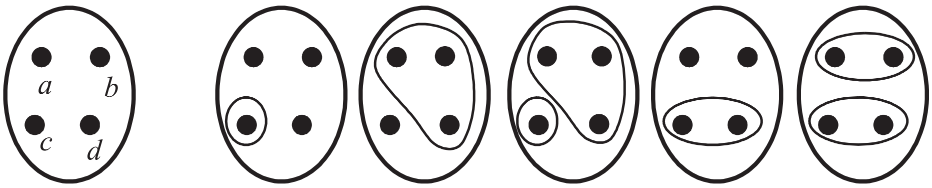

Рис. 2

k = 3

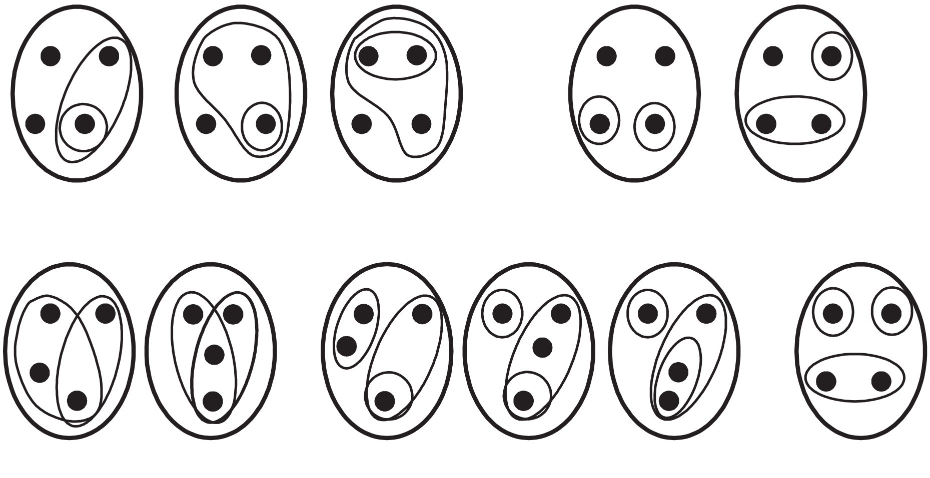

Рис. 3

$A^{\circ} \subseteq A$, $A^{\circ\circ} = A^{\circ}$, $A^{\circ} \subseteq [A^{\circ}]^{\circ}$, $[[A]^{\circ}] \subseteq [A]$, $[A^{\circ}] = [[A^{\circ}]^{\circ}]$, $[[A]^{\circ}]^{\circ} = [A]^{\circ}$, $[[A]\setminus A^{\circ}] = [A]\setminus A^{\circ}$. Напомним, что множество $[A]\setminus A^{\circ}$ называется *границей множества* A.

5. Покажите, что $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ для любых подмножеств A, B топологического пространства.

6. *Задача Куратовского*. Требуется доказать, что из данного множества A топологического пространства X с помощью операций взятия внутренности и дополнения до X можно образовать не более 14 различных множеств. Покажите, что следующее множество на числовой прямой дает ровно 14 таких множеств: $A = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup ([5, 10] \cap \mathbf{Q}) \cup \{15\}$.

7. Докажите, что действительно в определениях 4 аксиомы отделимости расположены по мере их усиления (с учетом большой леммы Урысона). Изобразите свойства отделимости на диаграммах Эйлера – Венна.

8. Убедитесь, что для произвольного T_1-пространства условие тихоновости равносильно тому, что все его конуль-множества составляют базу.

9. Покажите, что любое замкнутое множество компактного пространства является компактным подпространством. А любое компактное подпространство компактного хаусдорфова пространства X есть замкнутое множество в X.

10. Покажите, что вторая аксиома счетности сильнее первой аксиомы счетности. Что это означает?

11. Какие из примеров пространств 1–8 удовлетворяют первой, второй аксиоме счетности?

12. Приведите примеры двух гомеоморфных метрических пространств, между которыми не существует изометрии.

13. Покажите, что непрерывные отображения топологических пространств сохраняют свойства компактности и связности, но не обязаны сохранять свойства отделимости. Как это нужно понимать?

14. Докажите, что взаимно однозначное непрерывное отображение компактного хаусдорфова пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом этих пространств.

15. Обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных вещественных функций, заданных на топологическом пространстве X. Покажите, что относительно поточечно определенных операций сложения и умножения функций $C(X)$ является коммутативным кольцом с 1.

16. Проверьте, что множество $M_x=\{f \in C(X): f(x) = 0\}$, $x \in X$, будет максимальным идеалом кольца $C(X)$.

17. Докажите, что компактность тихоновского пространства X эквивалентна тому, что любой максимальный идеал кольца $C(X)$ равен M_x для некоторой (единственной) точки $x \in X$.

18. Если φ: $X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств, то α_{φ}: $C(Y) \to C(X)$, $\alpha_{\varphi}(g)= \varphi g=g^{\circ}\varphi$ для всех $g \in C(Y)$, есть кольцевой гомоморфизм, сохраняющий 1.

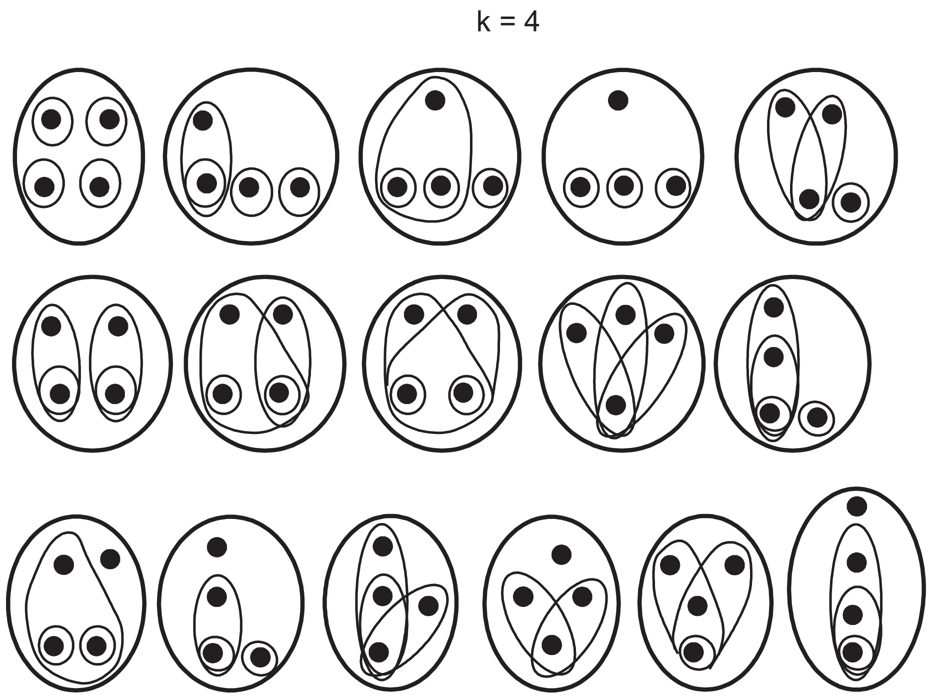

Рис. 4

Если же Y – компакт, то любой кольцевой гомоморфизм $C(Y) \to C(X)$, сохраняющий 1, имеет вид α_φ для некоторого однозначно определенного непрерывного отображения $\varphi: X \to Y$. Тем самым устанавливается антиэквивалентность между категорией всех компактов X и их непрерывных отображений и категорией колец $C(X)$ с гомоморфизмами, сохраняющими 1. Докажите эти утверждения.

Примечания

1. *Вечтомов Е. М.* О лагранжевых группах // Проблемы историко-научных исследований в математике и математическом образовании: материалы Междунар. науч. конф. Пермь: Изд-во ПГПУ, 2007. С. 23–32; *Он же*. Об изучении групповой структуры // Труды Междунар. науч. конф. «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». Плоцк (Польша), 2010. С. 91–100; *Он же*. Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2(1). С. 111–120; *Он же*. О бинарных отношениях для математиков и информатиков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1(3). С. 51–58; *Он же*. Об эстетике математики // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1(4). С. 69–75; *Он же*. Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34; *Он же*. Основные математические структуры: учеб. пособие. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013; *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1(3). С. 41–48; *Вечтомов Е. М., Чермных В. В., Широков Д. В.* Методика изучения теории действительных чисел // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 2(3). С. 56–68; *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Изучение теории метрических пространств // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 2(3). С. 103–111.

2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств / пер. с нем. М.: КомКнига, 2006.

3. *Stone M.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. № 3. P. 375–481.

4. *Александров П. С., Федорчук В. В., Зайцев В. И.* Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии // Успехи математических наук. 1978. Т. 33. Вып. 3. С. 3–48; *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики / пер. с фр. М.: ИЛ, 1963; Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.

5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977; *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974; *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры / пер. с фр. М.: Наука, 1968; *Келли Дж.* Общая топология / пер. с англ. М.: Наука, 1981; *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989; *Куратовский К.* Топология: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1966. Т. 1; 1969. Т. 2; *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М.: Мир, 1986.

6. *Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М.* Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2008; *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии / пер. с англ. М.: Мир, 1967.

7. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Бурбаки Н. Очерки по истории математики / пер. с франц. М.: ИЛ, 1963. С. 245–259.

8. *Вечтомов Е. М.* Философия математики. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013.

9. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Изучение теории метрических пространств // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 2(3). С. 103–111.

10. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В., Широков Д. В.* Методика изучения теории действительных чисел // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 2(3). С. 56–68.

11. *Болтянский В. Г., Ефремович В. А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982 (Библиотечка «Квант». Вып. 21); *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.

12. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Т. 28. С. 3–46; *Он же*. Основные математические структуры: учеб. пособие. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. Гл. 4; *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. N. Y.: Springer-Verlag, 1976.

13. *Вечтомов Е. М.* Основные математические структуры: учеб. пособие. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. Гл. 7.

14. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2(1). С. 111–120; *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1(3). С. 41–48.

15. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* О полукольцах sc-функций // Вестник СыктГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 15. С. 73–82; *Они же*. О тематике научно-исследовательской работы студентов-математиков // Материалы V Всерос. науч.-метод. конф. «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России». Киров: Изд-во ВятГГУ, 2012. С. 286–291.

16. *Александров П. С., Урысон П. С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971.

17. *Вечтомов Е. М.* Основные математические структуры: учеб. пособие. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. С. 235.