

С другой стороны $(g_{22} - g_{11})^2 > 0$, т. е. $(g_{22})^2 - 2g_{11}g_{22} + (g_{11})^2 > 0$, откуда следует, что

$$(g_{22})^2 + (g_{11})^2 > 2g_{11}g_{22} \quad (20)$$

Из формул (19) и (20) следует, что $|\lambda_3| > |\lambda_4|$ и $Ind\lambda_2 = Ind\lambda_3$.

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= g_{22}\dot{v} + g_{11}i\dot{u} = g_{22}\dot{v} + g_{11}\dot{v} + g_{22}i\dot{u} + g_{11}i\dot{u} - g_{11}\dot{v} - g_{22}i\dot{u} = \\ &= (g_{22} + g_{11})\dot{v} + (g_{22} + g_{11})i\dot{u} - g_{11}\dot{v} - g_{22}i\dot{u}. \end{aligned}$$

Обозначим $\lambda_5 = (g_{22} + g_{11})\dot{v} + (g_{22} + g_{11})i\dot{u}$, $\lambda_6 = -g_{11}\dot{v} - g_{22}i\dot{u}$; $|\lambda_5| > |\lambda_6|$, так как

$$\sqrt{(g_{22} + g_{11})^2 \dot{v}^2 + (g_{22} + g_{11})^2 \dot{u}^2} > \sqrt{(g_{11})^2 \dot{v}^2 + (g_{22})^2 \dot{u}^2}.$$

Следовательно $Ind\lambda_3 = Ind\lambda_5$.

$$\lambda_5 = (g_{22} + g_{11})\dot{v} + (g_{22} + g_{11})i\dot{u} = (g_{22} + g_{11})(\dot{v} + i\dot{u}).$$

Это означает, что $Ind\lambda_5 = Ind(g_{22} + g_{11}) + Ind(\dot{v} + i\dot{u})$

$Ind(g_{22} + g_{11}) = 0$, так как $Re(g_{22} + g_{11}) > 0$, окончательно имеем:

$$Ind\lambda_2 = Ind\lambda_3 = Ind\lambda_5 = Ind(\dot{v} + i\dot{u}).$$

Получается, что $\kappa = Ind\lambda = Ind\lambda_1 + Ind\lambda_2 = 2Ind(\dot{v} + i\dot{u})$.

Так как мы имеем дело с поверхностью положительной гауссовой кривизны с краем взаимно-однозначно отображающуюся на плоскую область G , то граница области G гомеоморфна единичной окружности, поэтому, не нарушая общности, будем считать, что граница области G – единичная окружность, $u = \cos \varphi$, $v = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, следовательно $\dot{u} = -\sin \varphi$, $\dot{v} = \cos \varphi$.

Используя формулу подсчета индекса из [2, 96], находим:

$$\kappa = Ind\lambda = 2Ind(\dot{v} + i\dot{u}) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi (-\sin \varphi)' - (-\sin \varphi) \cos' \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = -2.$$

При $\sigma \equiv 0$ выполнены условия теоремы 4.5 из [1], из которой следует, что при $\sigma \equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация является только тривиальной, т. е. $\vec{y} = \overrightarrow{const}$. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\vec{y} = \overrightarrow{const}$, тогда из равенств $d\vec{y} = \partial_1 \vec{y} du + \partial_2 \vec{y} dv$ и (3) следует, что $\partial_j \vec{y} = \alpha_j^k \partial_k \vec{r} = 0$, $j = 1, 2$, следовательно, $\alpha_j^k = 0$, $j = 1, 2$, откуда, в силу (11), получаем, что $\sigma \equiv 0$.

Таким образом, мы доказали пункт а) теоремы.

При $\sigma \not\equiv 0$ задача (15)-(18) удовлетворяет условию теоремы 4.10 из [1], из которой следует справедливость пункта б) теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958. 544 с.
3. Фоменко В.Т. О единственности решений проблем Кристоффеля и Минковского для овалоидов // Сб. науч. тр. по межвуз. программе «Университеты России – фундаментальные исследования». Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та, 1998. С. 73-95.

О.Б. Кожевников, Е.С. Арапина-Арапова

ИНВЕРСНЫЕ КЛИФФОРДОВЫ ПОЛУГРУППОИДЫ

Факторгруппоид произвольной полугруппы является полугруппой. В настоящей работе рассматривается весьма широкий класс полугруппоидов, на которых не выполняется аналог этого полугруппового свойства. Иными словами, частичный факторгруппоид полугруппоида не всегда является полугруппоидом. Изучаемый в работе класс является подклассом класса полугруппоидов, рассмотренного ранее в [4].

Если в частичном группоиде произведение $x \cdot y$ не определено, то пишем $x \cdot y = \emptyset$ (иногда символ $(\cdot)$ опускается). Частичный группоид $(S; \cdot)$ называется **сильно ассоциативным (слабо ассоциативным)**, если

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (1)$$

(соответственно условие $(x \cdot y) \cdot z \neq \emptyset \neq x \cdot (y \cdot z)$ влечет равенство (1) для любых $x, y, z \in S$). Символ $(=)$ здесь означает равенство на множестве $S \cup \{\emptyset\}$. Сильно ассоциативный частичный группоид В.В. Вагнер называет [1] полугруппоидом.

Отображение φ частичного группоида S в частичный группоид T (здесь и далее применяется мультипликативная терминология) называется [2] гомоморфизмом, если

$$(2)(xy \neq \emptyset) \rightarrow (\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y) \neq \emptyset)$$

для любых $x, y \in S$. Если при этом из $\varphi(x) \varphi(y) \neq \emptyset$ всегда следует $xy \neq \emptyset$, то φ называют **сильным гомоморфизмом**.

Эквивалентность τ на частичном группоиде S называется **конгруенцией**, если произведение любых двух τ – классов (как подмножеств в S) содержится в некотором τ – классе. При этом τ называют **сильной конгруенцией**, если условие $x \tau y \ \& \ u \tau v \ \& \ xy \neq \emptyset$ всегда влечет $uv \neq \emptyset$. Если τ – конгруенция на частичном группоиде S , то фактормножество S / τ относительно частичной операции $(\circ)$, определяемой правилом: если $a \cdot b \neq \emptyset$, то $\tau(a) \circ \tau(b) = \tau(a \cdot b)$, а если $a \cdot b = \emptyset$, то $\tau(a) \circ \tau(b) = \emptyset$, называется **частичным факторгруппоидом** частичного группоида S по конгруенции τ .

Если $\varphi: S \rightarrow T$ – сюръективный гомоморфизм частичного группоида S на частичный группоид T и $\text{Ker } \varphi$ – ядро отображения φ , то существует биективный гомоморфизм (не обязательно сильный) из частичного факторгруппоида $S / \text{Ker } \varphi$ на T , а потому, в отличие от обычных универсальных алгебр, $S / \text{Ker } \varphi$ не всегда изоморфен T . Очевидно $S / \text{Ker } \varphi$ изоморфен T тогда и только тогда, когда гомоморфизм φ сильный.

Группоид, являющийся нулевым расширением [3] частичного группоида S , обозначается $S^\circ (=S \cup \{0\})$, а частичный группоид, являющийся нулевым ограничением группоида S (обладающего нулем) – через $S^* (=S \setminus \{0\})$. Частичный группоид S является полугруппоидом тогда и только тогда, когда S° – полугруппа. Это обстоятельство позволяет без труда переносить полугрупповую терминологию на класс полугруппоидов. Например, полугруппоид S называется **инверсным (простым)**, если S° – инверсная (0 – простая) полугруппа; ограничение на S естественного порядка инверсной полугруппы S° – **естественным порядком на полугруппоиде S** ; ограничение на S идеальной эквивалентности Грина полугруппы S° – соответствующей **эквивалентностью Грина на полугруппоиде S** и т. д. Идемпотент e полугруппоида S называем примитивным идемпотентом полугруппоида S , если e примитивен [3] в полугруппе S° .

Инверсный простой полугруппоид с примитивным идемпотентом называется **полугруппоидом Брандта** (в литературе чаще – группоидом Брандта). Известно [3], что бициклическая полугруппа, т.е. двупорожденная полугруппа $\langle a, b \rangle$ с единицей e и определяющим соотношением $ab = e$, является, в отличие от полугруппоида Брандта, примером инверсного простого полугруппоида без примитивного идемпотента. Этот факт будет использован нами при доказательстве основной теоремы.

Полугруппоид, являющийся объединением полугруппоидов Брандта, назовем **клиффордовым полугруппоидом**. Полный клиффордов полугруппоид суть клиффордова полугруппа. Различные классы клиффордовых полугруппоидов изучались авторами ранее. В настоящей работе исследуется класс **K** инверсных клиффордовых полугруппоидов, идемпотенты которых составляют попарно не пересекающиеся цепи, т.е. подчинены условию

$$(ef \neq \emptyset) \rightarrow (e \leq f \vee f \leq e),$$

где $(\leq)$ – естественный порядок на инверсном полугруппоиде.

Доказано, что эквивалентность Грина **J** на полугруппоиде класса **K** всегда является конгруенцией, а частичный факторгруппоид S / J не обязательно является полугруппоидом.

Л е м м а 1. Каждый J – класс полугруппоида S класса K является замкнутым в S полугруппоидом Брандта.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале, что любой J – класс $J(a)$, содержащий $a \in S$, замкнут в S . Действительно, если $a J b$ и $ab \neq \emptyset$, то $a' a \cdot b b' \neq \emptyset$ (здесь и далее символ x' означает элемент, инверсный элементу $x \in S$). Ввиду условия (2), для элементов $e = a' a$, $b b' = f$ имеем $e \leq f$, либо $f \leq e$. Полагаем для определенности $f \leq e$. Если допустить $f \neq e$, то, согласно $a J b$, существует такой элемент $c \in S$, что $c c' = e$, $c' c = f$, откуда получаем $ec = ce = c$, $ec' = c' e = c'$, $c' c \neq e = c c'$. Благодаря лемме 1.31 в [3], отсюда следует, что $\langle c, c' \rangle$ – бициклическая подполугруппа полугруппоида S . Но это невозможно ввиду клиффордовости полугруппоида S . Полученное противоречие означает $f = e$, а потому $a = a a' a = a b b'$. Отсюда по определению идеальной эквивалентности Грина R получаем $a R ab$. Но $R \subset J$ и, следовательно, $a J (ab)$. Итак, $J(a)$ – замкнутый подполугруппоид в S . Из вышесказанного следует также примитивность полугруппоида $J(a)$. То, что $J(a)$ – инверсный простой полугруппоид, вытекает из самого определения отношения J . Таким образом, $J(a)$ – полугруппоид Брандта и лемма 1 доказана.

Если в условии леммы 1 предположить, что полугруппоид S полный, то лемма превращается в известное утверждение о том, что каждый J – класс инверсной клиффордовой полугруппы является группой.

Л е м м а 2. Эквивалентность Грина J на любом полугруппоиде класса K является конгруенцией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S \in K$, $a, b \in S$, $ab \neq \emptyset$. Докажем, что $J(a) \cdot J(b) \subseteq J(ab)$. Ввиду леммы 1, $J(a)$, $J(b)$, $J(ab)$ – полугруппоиды Брандта. Тогда, если $c \in J(a)$, $d \in J(b)$, $cd \neq \emptyset$, то найдутся такие $x \in J(a)$, $y \in J(b)$, что $xx' = c' c$, $aa' = x' x$, $yy' = d' d$, $bb' = y' y$. Так как $ab \neq \emptyset$, то, ввиду условия (2), либо $a' a \leq b b'$, либо $b b' \leq a' a$. Для определенности полагаем $b b' \leq a' a$. Аналогично, либо $c' c \leq d d'$, либо $d d' \leq c' c$. Если имеет место первое, то, как и при доказательстве леммы 1, получим бициклическую полугруппу (с единицей dd') в инверсном клиффордовом полугруппоиде S , что невозможно. Значит, $dd' \leq c' c$.

Из последнего неравенства при помощи представления элементов инверсной полугруппы S° биективными частичными преобразованиями легко получаем равенство $s x a b = c d y b$, откуда получаем $(s x)' c d y b = a b$, то есть элемент cd делит элемент ab внутренним образом. Аналогично и наоборот, ab делит cd внутренним образом, то есть $(ab) J (cd)$. Поэтому J – конгруенция на полугруппоиде S , что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Согласно лемме 2, существует частичный фактор группоид S / J . Однако этот факторгруппоид, вообще говоря, полугруппоидом не является (хотя S – полугруппоид). Это подтверждает следующий

П р и м е р. Пусть $B = \{e, a, a', f\}$ – полугруппоид Брандта с идемпотентами e и f . Если $g, h \in B$, то, доопределяя на множестве $B \cup \{g, h\}$ частичную операцию до полной так, как показано в [4], получаем полугруппоид $S = B \cup \{g, h\}$ такой, что эквивалентность J на S является конгруенцией, но S / J полугруппоидом не является, хотя S – полугруппоид. Для любых классов Σ, Γ частичных группоидов через $\Sigma * \Gamma$ обозначается класс всех тех частичных группоидов S , на которых существует такая конгруенция τ , что $S / \tau \in \Gamma$, а каждый τ – класс, как частичный подгруппоид, принадлежит Σ . Частичные группоиды класса $\Sigma * \Gamma$ назовем частичными Γ – группоидами частичных Σ – группоидов.

Пусть Σ – некоторый класс полугрупп. Тогда, если Γ – класс полурешеток, то $\Sigma * \Gamma$ – класс частичных полугруппоидов, являющихся полурешетками Σ – полугрупп. А если Γ – класс антицепей, то $\Sigma * \Gamma$ – класс прямых объединений Σ – полугрупп. На этом же языке можно характеризовать и клиффордовы полугруппы.

Из доказанных лемм и основного результата работы [4] непосредственно следует

Т е о р е м а. Инверсный клиффордов полугруппоид, удовлетворяющий условию (2), является идемпотнтным коммутативным слабо ассоциативным частичным группоидом полугруппоидов Брандта.

Эта теорема является аналогом известного свойства инверсных клиффордовых полугрупп.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В.В. Диаграммируемые полугруппоиды и обобщенные группоиды // Изв. вузов. 1967. Мат. № 10 (65).
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.
4. Кожевников О.Б. Об одном классе инверсных полугрупп с нулем // Вестник ТГПИ. 2007. Естественные науки.

О.Б. Кожевников

О КАТЕГОРИИ ПОЛУГРУПП И КАТЕГОРИИ ПОЛУГРУППОИДОВ

Доказано, что категория [1] полугрупп есть собственная подкатегория категории полугруппоидов, а категория полугрупп Брандта [2] – собственная подкатегория категории группоидов Брандта. Это означает, что теорию полугруппоидов нельзя свести к теории полугрупп, а теорию группоидов Брандта – к теории полугрупп Брандта.

Частичный группоид $(S; \cdot)$ называется полугруппоидом, если для любых $x, y, z \in S$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

где $(=)$ означает предикат равенства на множестве $S \cup \{\emptyset\}$ ($\emptyset \notin S$) а равенство $u \cdot v = \emptyset$ означает, что произведение $u \cdot v$ в S не определено и $(u \cdot v) \cdot w = w \cdot (u \cdot v) = \emptyset$ для любого $w \in S$. Скажем, что S – полный частичный группоид, если операция $(\cdot)$ всюду определена.

Между понятиями полугруппы и полугруппоида существует тесная связь. Полугруппы – это в точности те полугруппоиды, операция в которых всюду определена. С другой стороны, если S – частичный группоид (здесь и далее заданный в мультипликативной терминологии), и $0 \notin S$, то, доопределяя на множестве $S \cup \{0\}$ частичную операцию $(\cdot)$, полагая $x \cdot 0 = 0$ тогда и только тогда, когда $x \cdot y = \emptyset$ в S и считая 0 нулем этого группоида, получаем группоид, обозначаемый в дальнейшем S° и называемый нулевым расширением частичного группоида S . Обратно, если S -группоид с нулем, то частичный группоид, нулевым расширением которого является S , обозначается S^* и называется нулевым ограничением группоида S . Таким образом, $(S^*)^\circ = S$ для любой полугруппы с нулем S и $(S^\circ)^* = S$ для любого частичного группоида S . Очевидно, частичный группоид S является полугруппоидом тогда и только тогда, когда S° – полугруппа. Если τ – бинарное отношение на полугруппе S с нулем 0 и $(0, 0) \in \tau$, то бинарное отношение

$$\tau^* = \tau \setminus \{(0, 0)\}$$

на полугруппоиде S^* назовем нулевым ограничением бинарного отношения τ . Если τ – эквивалентность на S и $\{0\}$ есть τ – класс, то τ^* – эквивалентность на S^* . В частности, если τ – одна из идеальных эквивалентностей Грина на полугруппе S с нулем 0 , то τ^* называется соответствующей эквивалентностью Грина на полугруппоиде S^* .

Отображение φ частичного группоида в частичный группоид называется [3] гомоморфизмом, если $(xy \neq \emptyset \rightarrow \varphi(x) \varphi(y) \neq \emptyset) \& (\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y))$ для любых $x, y \in S$. Если при этом выполняется и обратная импликация, то φ называют сильным гомоморфизмом.

Пусть S, T – полугруппы с нулем 0 , а φ – такой гомоморфизм из S в T , что $\varphi(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$ для любого $x \in S$. Как показал В.Т. Кулик, отображение

$$\varphi^* = \varphi \setminus \{(0, 0)\}$$

полугруппоида S^* в полугруппоид T^* является сильным гомоморфизмом, называемым нулевым ограничением гомоморфизма φ и, наоборот, если φ – сильный гомоморфизм полугруппоида S в полугруппоид T , то отображение

$$(7) \varphi^\circ = \varphi \cup \{(0, 0)\}$$

является гомоморфизмом полугруппы S° в полугруппу T° .