УДК 518:517

Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2008, вып. 1

А. К. Пономаренко

ИНВАРИАНТНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ОДИННАДЦАТОЙ СТЕПЕНИ, СОДЕРЖАЩИЕ ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА1

В работе рассматривается вопрос о построении инвариантных кубатурных формул [1] с 11-свойством для интеграла по пространству Д". Формулы содержат значение оператора Лалпаса подынтегральной функции в одном из узлов (начале координат).

Построение инвариантных формул связано с системами нелинейных алгебраических уравнений для координат узлов и коэффициентов, не всегда имеющими вещественные решения, поэтому получение формул с вещественными параметрами представляет как теоретический, так и практический интерес.

Для повышения степени точности соответствующей формулы приближенного вычисления интегралов широко используется включение в кубатурную (квадратурную) сумму производных подынтегральной функции. Для интерполяционных кубатурных формул в связи с этим необходимо отметить теоремы существования И. П. Мысовских [2] , на основании которых в работах [3-5] получены содержащие производные кубатурные формулы не выше девятой степени.

В статье [6] для уточнения кубатурных формул применяется аналог теоремы С. Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах [1-2].

В настоящей работе при построении инвариантных относительно группы O_nG (группы всех ортогональных преобразований гипероктаэдра O_n в себя) формул введен оператор Лапласа $X^{n}{}_{2}$ ^^) двойственный с формой X^{n} ^{x}^ инвариантной ainoji ^{xj} j=i сительно той же группы. (Здесь O_n —выпуклая оболочка 2n точек (±1,0,..., 0), (0, ±1,..., 0),..., (0, 0,..., ±1).) Значение лапласиана подынтегральной функции в начале координат выбрано из соображений простоты получающихся ниже нелинейных систем алгебраических уравнений. Будем рассматривать интеграл

$$I(/) = /_{JR^n} P(r)f(x)\,dx,$$

$x = (x_1, \ldots, X_n)$, $r = X^{"}{}_{=i} X_j^2$, p(r) —неотрицательная весовая функция такая,

> 1 1/2 -J = I-*-J ' ю

что существуют моменты $v_{fc} = J_o r^k p(r)\,dr$, $k = 0, 1, \ldots, v_o > 0$.

Получим кубатурные формулы, инвариантные относительно группы O_nG и точные для любого алгебраического многочлена относительно $x_1, \ldots, X_n$ не выше одиннадцатой степени.

Первая из рассматриваемых формул имеет вид:

$$I(/) = Af(O) + BД/(O) + \pounds A_j \hat{}\ / \sum_{j=i\ i}^{2} (a_j g^{(0)})+^{2n}$$

1Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №05-01-00984).

$$+\sum_{j=1}^{2} B_j \sum_{1}^{2n(n-1)} f(b_j g^{(1)}) + C \sum_{1}^{8C_n^3} f(cg^{(2)})+$$

$$+F \sum_{1}^{48C_n^3} f(rh(\beta_1,\beta_2)) + D \sum_{1}^{16C_n^4} f(dg^{(3)}) + E \sum_{1}^{2^n} f(eg^{(n-1)})\ . \qquad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: g ^ = ^=L=(1, . . . , 1 , 0 , . . . , 0) , s = 0,1,. . . ,
S + 1
h(fc, th) = (Pi, fh, y / l - f t - f %, o , . . . , 0) ,
a_j, b_j, j = 1, 2,
c, d, r, e — радиусы сфер с центрами в точке 0(0,..., 0), A, B, A_j, B_j, j = 1, 2, C, D, E, F — коэффициенты, въ в2 —параметры, Д — оператор Лапласа.

В формуле (1) суммирование распространяется на все элементы 0„С-орбит точек, указанных в круглых скобках после знака функции f.

Для нахождения параметров формул используется модификация указанной выше теоремы С.Л.Соболева, согласно которой рассматриваемые формулы должны быть точны для многочленов a 2k ,k = 0,1,..., 5, a"4ст2fc,k = 0,1, 2,3, a42, o"42o"2, ^e^2k,
n
k = 0, 1, 2, a6a4, a8a2к, к = 0, 1, a10, где a2 = Y xj2, a4 =Y xj 2^k2, ..., a 2n =
j=1 j<k
xi2x22 .. .xn2 —базисные инвариантные формы группы O_nG.

Это требование для формулы (1) приводит к системе 19-и нелинейных алгебраических уравнений

$$A + \sum_{j=1}^{2} A_{j1} + \sum_{j=1}^{2} B_{j1} + C_1 + F_1 + D_1 + E_1 = m_0,$$

$$B + \sum_{j=1}^{2} A_{j1} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2} B_{j1} b_j^2 + C_1 c^2 + F_1 r^2 + D_1 d^2 + E_1 e^2 = m_1,$$

$$\sum_{j=1}^{2} A_{j1} a_j^{2k} + \sum_{j=1}^{2} B_{j1} b_j^{2k} + C_1 c^{2k} + F_1 r^{2k} + D_1 d^{2k} + E_1 e^{2k} = m_k,$$

$$k = 2, 3, 4, 5,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2} B_{j1} b_j^{2k} + \frac{1}{3} C_1 c^{2k} + z F_1 r^{2k} + \frac{3}{8} D_1 d^{2k} + \frac{n-1}{2n} E_1 e^{2k} = m_{k+4},$$

$$k = 2, 3, 4, 5,$$

$$\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{2} B_{j1} b_j^{2k} + \frac{1}{9} C_1 c^{2k} + z^2 F_1 r^{2k} + \frac{9}{64} D_1 d^{2k} + \frac{(n-1)^2}{4n^2} E_1 e^{2k} = m_{k+6},$$

$$k = 4, 5,$$

$$\frac{1}{27} C_1 c^{2k} + y F_1 r^{2k} + \frac{1}{16} D_1 d^{2k}) + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} E_1 e^{2k} = m_{k+9},$$

$$k = 3, 4, 5,$$

$$\frac{1}{81} C_1 c^{10} + yz F_1 r^{10} + \frac{3}{128} D_1 d^{10} + \frac{(n-1)^2(n-2)}{12n^3} E_1 e^{10} = m_{15},$$

$$\frac{1}{256} D_1 d^{2k} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24n^3} E_1 e^{2k} = m_{k+12},$$

$$k = 4, 5,$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120n^4} E_1 e^{10} = m_{18} \qquad (2)$$

относительно 20 неизвестных: A, B, $A_{j1} = 2nA_j$, $B_{j1} = 2n(n-1)B_j$, $j = 1, 2$, $C_1 = 8C_n^3 C$, $F_1 = 48C_n^3 F$, $D_1 = 16C_n^4 D$, $E_1 = 2^n E$, a_j, b_j, $j = 1, 2$, c, r, d, e, β_1, β_2.

При записи системы (2) использовались обозначения:

$$m_k = \mu\nu_{n+2k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, 5,$$

$$m_{k+4} = \mu\nu_{n+2k-1}\frac{n-1}{2(n+2)}, \quad k = 2, 3, 4, 5,$$

$$m_{k+6} = \mu\nu_{n+2k-1}\frac{n(n-1)(n+7)}{4(n+2)(n+4)(n+6)}, \quad k = 4, 5,$$

$$m_{k+9} = \mu\nu_{n+2k-1}\frac{(n-1)(n-2)}{6(n+2)(n+4)}, \quad k = 3, 4, 5,$$

$$m_{15} = \mu\nu_{n+9}\frac{n-1}{12(n+2)}\frac{(n-2)(n^2+11n+12)}{(n+4)(n+6)(n+8)};$$

$$m_{k+12} = \mu\nu_{n-2k-1}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24(n+2)(n+4)(n+6)}, \quad k = 4, 5,$$

$$m_{18} = \mu\nu_{n+9}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)},$$

$$\mu = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad \Gamma(z) — \text{гамма-функция Эйлера.}$$

Ступенчатая система (2) решается с частичным использованием методики, разработанной в работе [7]. Укажем ее решение, зависящее от свободного параметра ϵ:

$$E_1 = \frac{V_2}{\epsilon^{10}}, \quad \text{где} \quad V_2 = \frac{120n^4 m_{18}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}, \quad d^2 = \epsilon^2\frac{m_{17} - vV_2}{m_{16}\epsilon^2 - vV_2},$$

$$v = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24n^3}, \quad D_1 = 256\frac{m_{17} - vV_2}{d^{10}},$$

$$\alpha_{k-1} = m_{k-4} - \frac{3}{8} D_1 d^{2k} - \frac{n-1}{2n} E_1 \epsilon^{2k}, \quad k = 2, 3, 4, 5,$$

$$\alpha_{k+1} = m_{k+6} - \frac{9}{64} D_1 d^{2k} - \frac{(n-1)^2}{4n^2} E_1 \epsilon^{2k}, \quad k = 4, 5,$$

$$\alpha_{k+4} = m_{k+9} - \frac{1}{16} D_1 d^{2k} - \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} E_1 \epsilon^{2k}, \quad k = 3, 4, 5,$$

$$\alpha_{10} = m_{15} - \frac{3}{128} D_1 d^{10} - \frac{(n-1)^2}{12n^3} E_1 \epsilon^{10},$$

$$D_1 d^{10} - \frac{4}{125} E_1 \epsilon^{10},$$

$$\beta_1^2 = 0.5(-t + \sqrt{t^2 - 4\tau}), \quad \beta_2^2 = 0.5(-t - \sqrt{t^2 - 4\tau}),$$

t — любой вещественный корень уравнения

$$t^3 + 2t^2 + (1+z)t + y - z = 0,$$

$$\tau = \frac{y}{1-t}, \quad z = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{3\gamma_1}, \quad y = \frac{z(1-4z)}{\gamma_2 - 3}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_4 - 4\alpha_6 + 3\alpha_9}{\alpha_9 - 3\alpha_{10}},$$

$$\gamma_2 = \frac{(\alpha_3 - 4\alpha_5 + 3\alpha_8)(\alpha_7 r^4 - 2\alpha_8 r^2 + \alpha_9)}{r^2(\alpha_7\alpha_9 - \alpha_8^2)}, \quad c^2 = \frac{\alpha_8 - yF_1 r^8}{\alpha_7 - yF_1 r^6},$$

$$F_1 = \frac{\alpha_7\alpha_9 - \alpha_8^2}{yr^6(\alpha_7 r^4 - 2\alpha_8 r^2 + \alpha_9)}, \quad C_1 = 27\frac{\alpha_7 - yF_1 r^6}{c^6},$$

$b_j^2, \quad j = 1, 2,$ — корни квадратного уравнения $u^2 + pu + q = 0$,

$$\text{где } p = \frac{\alpha_{11}\alpha_{14} - \alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{14}}, \quad q = \frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{12}\alpha_{14}}{\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{14}},$$

$$B_{j1} = (-1)^{j-1}\frac{\alpha_{11} b_{3-j}^2 - \alpha_{12}}{b_j^4\sqrt{p^2 - 4q}}, \quad j = 1, 2,$$

$$\alpha_{k+9} = 4(\alpha_{k-1} - \frac{1}{3}C_1 c^{2k} - zF_1 r^{2k}), \quad k = 2, 3, 4, 5,$$

$$\alpha_{15+k} = m_k - (\sum_{j=1}^{2} B_{j1} b_j^{2k} + C_1 c^{2k} + F_1 r^{2k} + D_1 d^{2k} + E_1 \epsilon^{2k}),$$

$$k = 0, 1, \cdots, 5,$$

$$a_1^2 = -0.5(p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4q_1}), \quad a_2^2 = 0.5(-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4q_1}),$$

$$p_1 = \frac{\Delta_{p_1}}{\Delta_0}, \quad q_1 = \frac{\Delta_{q_1}}{\Delta_0}, \quad \Delta_0 = \alpha_{18}^2 - \alpha_{17}\alpha_{19},$$

$$\Delta_{p_1} = \alpha_{17}\alpha_{20} - \alpha_{18}\alpha_{19}, \quad \Delta_{q_1} = \alpha_{19}^2 - \alpha_{18}\alpha_{20},$$

$$A_{11} = \frac{\Delta_{A_1}}{\Delta_{01}}, \quad A_{21} = \frac{\Delta_{A_2}}{\Delta_{01}}, \quad \Delta_{01} = a_1^4 a_2^4 (a_2^2 - a_1^2).$$

$$\Delta_{A_1} = a_2^4(a_2^2\alpha_{17} - \alpha_{18}), \Delta_{A_2} = -a_1^4(a_1^2\alpha_{17} - \alpha_{18}).$$

Приведем пример параметров формулы (1) при $n = 5$ для весовой функции $p(r) = r^{-1}e^{-r^2}$:

$$\begin{aligned}
A &= 5.188488962699e+00, & c &= 4.659402407556e+00,\\
B &= 2.578621491614e-01, & C &= -2.662479062243e-06,\\
a_1 &= 1.284003969924e+01, & r &= 2.449489742783e+00,\\
A_1 &= 8.949365779309e-11, & F &= 3.337598865408e-01,\\
a_2 &= 1.916845657915e+00, & d &= 3.632864387059e+00,\\
A_2 &= 2.586268309151e-02, & D &= 6.724228995560e-05,\\
\\
b_1 &= 1.610948199226e+00, & \epsilon &= 1.790000000000e+00,\\
B_1 &= 1.384276906625e-01, & E &= 6.082668111868e-02,\\
b_2 &= 2.448499900388e+00, & \beta_1^2 &= 5.116692853074e-01,\\
B_2 &= -3.999527915162e+00, & \beta_2^2 &= 4.878430894815e-01.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Рассмотрим далее формулу, получаемую из (1) в результате замены последнего слагаемого в правой части на E^ 1^{2Cn} f (eg^{(4)}).

Решение соответствующей, аналогичной (2), системы, зависящее от параметра е, отличается от решения системы (2) лишь выражениями

$$E_1 = 3125\frac{m_{18}}{\epsilon^{10}}, \quad d^2 = \epsilon^2\frac{m_{17}-25m_{18}}{m_{16}\epsilon^2-25m_{18}}, \quad D_1 = 256\frac{m_{17}-25m_{18}}{d^{10}},$$

$$r^2 = \frac{\alpha_4-4\alpha_6+3\alpha_9}{\alpha_3-4\alpha_5+3\alpha_8}, \text{ где обозначено}$$

$$\alpha_{k-1} = m_{k+4} - \frac{3}{8}D_1 d^{2k} - \frac{2}{5}E_1\epsilon^{2k}, \quad k=2,3,4,5,$$

$$\alpha_{k+1} = m_{k+6} - \frac{9}{64}D_1 d^{2k} - \frac{4}{25}E_1\epsilon^{2k}, \quad k=4,5,$$

$$\alpha_{k+4} = m_{k+9} - \frac{1}{16}D_1 d^{2k} - \frac{2}{25}E_1\epsilon^{2k}, \quad k=3,4,5,$$

$$\alpha_{10} = m_{15} - \frac{3}{128}.$$

Здесь $E_1 = 32C_n^5 E$.

Приведем пример параметров последней формулы при $n=6$ в случае весовой функции $p(r) = e^{-r^2}$:

$$\begin{aligned}
A &= 7.108611484509e+00, & c &= 2.581981447715e+00,\\
B &= 3.884616869089e-01, & C &= -6.173963472088e-02,\\
a_1 &= 7.678622224934e+00, & r &= 2.645751311065e+00,\\
A_1 &= 9.848729338124e-08, & F &= 1.151646899478e-02,\\
a_2 &= 2.147406607715e+00, & d &= 2.034788722766e+00,\\
A_2 &= 5.416321488763e-02, & D &= 5.096668578653e-02,\\
b_1 &= 1.640356801648e+00, & e &= 3.110000000000e+00,\\
B_1 &= 1.815163736702e-01, & E &= 1.117881561393e-03,\\
b_2 &= 2.543851025693e+00, & \beta_1^2 &= 4.851330019827e-01,\\
B_2 &= -2.112305855193e-02, & \beta_2^2 &= 3.135831959235e-01.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Как показали вычисления, формула (1) имеет вещественные координаты узлов и коэффициенты при $n = 5, 7, 8, \dots, 11$, вторая формула — при $n = 5, 6$ (при $n = 5$ формулы совпадают) для весовых функций $p(r) = r^\alpha e^{-r^2}$, $p(r) = \begin{cases} r^\alpha(1-r)^\beta, & 0 < r < 1, \\ 0, & 1 \leqslant r, \end{cases}$

и соответствующих значений е.

Следует заметить, что хотя формулы (1.1) и (1.2) имеют по одному отрицательному коэффициенту, вычисление всех моментов до 11-го порядка включительно показало совпадение 14-и первых значащих цифр и полученных точных значений (использовался пакет BC31, переменные, характеризующие промежуточные и окончательные результаты, имели описание double). Это свидетельствует о достаточно хорошей устойчивости формул.

Число узлов формулы (1) равно

$$N_1 = \frac{2}{}n(n^3 + 8n^2 - 25n + 22) + 2^{™} + 2,$$

второй формулы —

$$N_2 = -n(2n^4 - 15n^3 + IlOn^2 - 225n + 158) + 2. \quad 15$$

В аналогичных формулах автора (например, [9]), не содержащих оператор Лапласа, число узлов больше на 2(n - 1).

Для сравнения количества узлов полученных и других формул используем теорему о нижней границе числа узлов кубатурной формулы в случае центральной симметрии области интегрирования [2], формулу — сферическое произведение формулы типа Гаусса с шестью узлами для интеграла по радиусу и формулы с 11-свойством для сферы [8] (с минимальным числом узлов, кроме n = 8, 9) и формулу (6.26) из [2].[2]Число узлов рассматриваемой формулы типа сферического произведения

$$N_3 = -n(2n^4 - 15n^3 + 70n^2 - 105n + 63), \quad 5$$

формулы (6.26) и формулы — декартова произведения формул типа Гаусса с 6-ю узлами по каждой из координат $x_1, x_2, \cdots, x_n$ равно

$$N_4 = 6^n.$$

Нижняя граница числа узлов, полученных формул по теореме Мысовских, имеет вид

$$N_{min} = j\hat{\ }n\text{-}(''\text{-}^4 + IOn^3 + 55n^2 + 110n + 184).$$

Следует отметить, что эта нижняя граница практически не достигается.

Как показали вычисления, отношения ^1 , ^2 при n = 5,6,--- ,11 заключены между 2.32 и 2.70, ^ между 9.96 и 22.26, ^--между 23.35 и 54960.9.

Summary

A. K. Ponomarenko. Some invariant cubature formulae of the eleventh degree containing Laplasian operator.

For integral over the n-space with a radial symmetric weight function two cubature formulae of degree eleven invariant on the group of the hyperoctahedron are constructed. Cubature summas formulas contain the value of the Laplasian operator of the integrand function in the point O(O, 0, • • • , 0). The examples of approximate values of parameters of these formulae are given.

Литература

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сибирск. мат. журн. 1962. Т. 3, №5. С. 769-791.
2. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М., 1981. 336 с.
3. *Мысовских И. П.* Применение ортогональных многочленов к построению кубатурных формул // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1972. Т. 12, №2. С. 467-475.
4. *Исматуллаев Г. П.* О построении кубатурных формул для гипершара и поверхнсти сферы // Вопросы вычислит. и прикл. математики. Ташкент, 1978. Вып. 51. С. 191-203.
5. *Пономаренко А. К.* О кубатурных формулах девятой степени, содежащих производные // Методы вычислений. Л., 1991. Вып. 16. С. 30-41.
6. *Шамсиев С.Ш.* Об инвариантных кубатурных формулах, содержащих производные // Численное интегрирование и смежные вопросы. Ташкент: Фан, 1990. С. 77-85.
7. *Лебедев В.И.* О квадратурах на сфере // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, №2. С. 293-306.
8. *Стоянова С.Б.* Кубатурная формула одиннадцатой степени точности для сферы // Методы вычислений. Л., 1980. Вып. 12. С. 38-46.
9. *Пономаренко А. К.* Инвариантные кубатурные формулы одиннадцатой степени, инвариантные относительно группы гипероктаэдра // Кубатурные формулы и их приложения: VI международный семинар-совещание. Уфа: ИМВЦ УфНЦ РАН, БГПУ, 2001. С. 96-103.

Статья поступила в редакцию 13 сентября 2007 г.

[2]АВТору неизвестны другие формулы 11-й степени по R^n, отличные от формул типа декартового и сферического произведений и формул автора.