УДК 512.553

Е.Г. Зиновьев

ИНЪЕКТИВНЫЕ И ДЕЛИМЫЕ МОДУЛИ НАД CSP-КОЛЬЦАМИ

Дается описание инъективных и делимых модулей над так называемыми csp-кольцами.

В работах П.А. Крылова [1] и А.А. Фомина [2] появилось понятие кольца псевдорациональных чисел. С помощью этого кольца, например, изучалась модульная структура абелевых sp-групп над их кольцами эндоморфизмов [3, 4]. sp-группа – это смешанная группа, лежащая между суммой и произведением своих p-компонент с некоторыми дополнительными свойствами. В данной работе изучаются инъективные и делимые модули над csp-кольцами, которые являются обобщением кольца псевдорациональных чисел. В статьях [1] и [2] дано описание идеалов, факторколец кольца псевдорациональных чисел, доказана его наследственность, в [5] дано описание инъективных модулей над этим кольцом, в [6] рассматриваются общие результаты о модулях над csp-кольцами.

Определение 1. Пусть P – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p\in P$ пусть $R_p = Z_{p^k}$, где $k\in N$, или $R_p = Q_p^*$ (здесь Z_{p^k} – кольцо вычетов по модулю p^k, Q_p^* – кольцо целых p-адических чисел). Положим $K=\prod\limits_{p\in P} R_p$, $T=\bigoplus\limits_{p\in P} R_p$. Подкольцо R кольца K называется csp-кольцом, если $T\subset R$ и R/T – некоторое поле.

Если все $R_p=\widehat{Z}_p$ и $R/T \cong Q$, то R называется кольцом псевдорациональных чисел (Q – поле рациональных чисел).

Приведем без доказательства несколько результатов, встречающихся в [5].

Теорема 1. Пусть I – идеал кольца R. Если $I\subset T$, то $I=\bigoplus\limits_{p\in P}(I\cap R_p)$. Если $I\not\subset T$, то $I=eR\oplus\bigoplus\limits_{p\in S}(I\cap R_p)$, где e – идемпотент кольца R, S – некоторое конечное множество простых чисел.

Рассмотрим общее строение R-модулей. Обозначим $R/T=F$.

Теорема 2. Всякий R-модуль M равен $A\oplus D$, где D – наибольший подмодуль в M, являющийся F-пространством, а A – подмодуль, не содержащий F-пространств.

Определение 2. Пусть R – csp-кольцо. Модуль D_R называется делимым, если $rD=D$ для всех неделителей нуля $r\in R$.

Обозначим через ε_p элемент кольца R такой, что его p-компонента равна 1, а все остальные равны 0.

Если модуль A не содержит F-пространств, то такой модуль будем называть редуцированным. Далее для каждого $p\in P$ имеет место разложение $R=R_p\oplus K_p$, где K_p – дополнительное прямое слагаемое.

Отсюда $A=R_pA\oplus K_pA$. Нетрудно видеть, что $R_pA=0$ либо R_pA – наибольший R_p-подмодуль в A. Далее R_pA будем обозначать как A_p.

Предложение 1. Пусть A – редуцированный R-модуль. Тогда справедливы включения

$$\bigoplus_{p\in P} A_p \subseteq A\subset \prod_{p\in P} A_p .$$

Доказательство. Поскольку $A_p=\varepsilon_pA$, где $\varepsilon_p=1_{R_p}$, $A_p\subset A$ для каждого $p\in P$, то $A_q\bigcap\sum\limits_{p\neq q}A_p=0$ для всех $q\in P$ и $\bigoplus\limits_{p\in P}A_p\subseteq A$. Покажем, что A вкладывается в $\prod\limits_{p\in P}A_p$. Построим отображение $f:A\to\prod\limits_{p\in P}A_p$, действующее по правилу $f(a)=(a_p)$, где $a_p=\varepsilon_pa$, $p\in P$. Тогда $Kerf=\{a\in A:\varepsilon_pa=0$ для всех $p\in P\}$. Поскольку A – редуцированный модуль, то $Kerf=0$. Предложение доказано.

Для описания делимых R-модулей достаточно описать строение делимых редуцированных R-модулей. Без доказательства приведем следующие свойства, некоторые из них являются известными.

Предложение 2. p-адический модуль делим тогда и только тогда, когда он инъективен.

Предложение 3. Каждый модуль над Z_{p^k}, где $k\in N$, делим.

Лемма 1. Справедливы следующие утверждения:

1) делимые p-адические модули являются инъективными R-модулями;

2) инъективные модули над Z_{p^k}, где $k\in N$, являются инъективными R-модулями.

Лемма 2. Делимые Z_{p^k}-модули являются делимыми R-модулями.

Теперь можно доказать такой результат.

Теорема 3. Редуцированный R-модуль D делим тогда и только тогда, когда ε_pD – делимый R_p-модуль для всех таких $p\in P$, что $R_p=Q_p^*$.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Если ε_pD – делимый R_p-модуль, то ε_pD – делимый R-модуль для всех $p\in P$ (леммы 1, 2). Тогда $\prod\limits_{p\in P}D_p$ – делимый R-модуль, и уравнение $rx=d$, где $r\in R$, $d\in D$, разрешимо в $\prod\limits_{p\in P}D_p$.

Покажем, что оно разрешимо в D. Пусть $rd_1=d$, где $d_1\in\prod\limits_{p\in P}D_p$. Тогда уравнение $r\overline{x}=\overline{d}$ разрешимо в

$D \big/ \bigoplus_{p\in P} D_p$. Действительно, поскольку R/T – поле, то все отличные от нуля элементы кольца R обратимы по модулю T. Далее $r\overline{d_1} \in D \big/ \bigoplus_{p\in P} D_p$.

Существует $s \in R$ такой, что $rs = 1 + t$, где $t \in T$. Имеем $\overline{rsd_1} \in D \big/ \bigoplus_{p\in P} D_p$, но $\overline{rs} = \overline{1}$, следовательно, $\overline{d_1} \in D \big/ \bigoplus_{p\in P} D_p$ и $d_1 \in D$.

Таким образом, D – делимый R-модуль. Теорема доказана.

Если рассмотреть один «крайний» случай для кольца R, когда все $R_p = Z_{p^k}$, где $k \in N$, то справедливо следствие.

Следствие 1. Пусть для всех $p \in P$ $R_p = Z_{p^k}$, где $k \in N$. Тогда каждый модуль над R делим.

Далее рассмотрим инъективные R-модули. Известно, что R-модуль, являющийся F-пространством, инъективен. Значит, достаточно рассмотреть редуцированные R-модули. Известен следующий результат.

Предложение 4. Для всякого делимого p-адического модуля D имеет место разложение

$$D = D_p \oplus A_p ,$$

где D_p – векторное пространство над полем p-адических чисел, A_p – делимый периодический Q_p^*-модуль.

Следующая теорема обобщает основной результат из [5].

Теорема 4. Редуцированный R-модуль инъективен тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod_{p\in P} C_p$, где C_p – инъективный модуль над Z_{p^k}, если $R_p = Z_{p^k}$, либо $C_p = D_p \oplus A_p$, если $R_p = Q_p^*$, где D_p – векторное пространство над полем p-адических чисел, A_p – делимый периодический Q_p^*-модуль.

Доказательство. Заметим, что $\prod_{p\in P} C_p$ – инъективный R-модуль (лемма 1). Обратно, пусть M – инъективный редуцированный R-модуль.

Тогда $\varepsilon_p M$ – инъективный Q_p^*-модуль или инъективный Z_{p^k}-модуль.

В случае Q_p^*-модуля $\varepsilon_p M$ – делимый p-адический модуль, тогда $\varepsilon_p M = \bigoplus_{p\in P} A_p$ (предложение 4). Каждый редуцированный R-модуль A содержится в R-модуле $\prod_{p\in P} \varepsilon_p A$ (предложение 1). Поэтому

$$M \subset \prod_{p\in P} C_p ,$$

где C_p – такие, как и в условии теоремы. Поскольку M инъективен, то $\prod_{p\in P} C_p = M \oplus N$ для некоторого R-модуля N. Тогда

$$\varepsilon_p \prod_{p\in P} C_p = C_p = \varepsilon_p M \oplus \varepsilon_p N .$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_p N = 0$ для каждого $p \in P$. Учитывая, что $N \subseteq \prod_{p\in P} \varepsilon_p N$, находим N=0 и $M = \prod_{p\in P} C_p$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 29–34.
2. *Fomin A.A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Trends in Math. 1999. P. 87–100.
3. *Крылов П.А.* Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43, № 1. С. 108–119.
4. *Царев А.В.* Псевдорациональный ранг абелевой группы // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 1. С. 312–325.
5 *Чеглякова С.В.* Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. Т. 7, № 2. С. 627–629.
6. *Зиновьев Е.Г.* Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 46–47.

Статья поступила в редакцию журнала 20 ноября 2006 г., принята к печати 27 ноября 2006 г.