УДК 27.17.21, 28.23.35

А.А. Максимов, С.В. Папшев

ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ НЕЧЕТКИХ МАТРИЦ

Рассматриваются нечеткие графы и нечеткие автоматы в форме задающих их вещественнозначных матриц. Исследуются свойства степенных матриц, их поведение относительно операций сложения и max-min умножения. Приводятся результаты вычисления индексов и периодов всех неизоморфных беспетлевых орграфов с числом вершин от двух до шести. Результаты, полученные для нечетких автоматов, иллюстрируются на примере из области биомедицины при оценке степени совместимости и эффективности применяемых лекарственных средств.

Нечеткий автомат, граф, нечеткая матрица, индекс и период матриц

A.A. Maksimov, S.V. Papshev

INDICES AND PERIODS OF FUZZY MATRICES

Fuzzy graphs and fuzzy automata determined by real valued matrices are considered in this paper. Powers of matrices, their properties and behavior concerning addition and max-min multiplication are investigated. The calculating of indexes and periods for all non-isomorphic loopless directed graphs with number of vertices from two to six are resulted. The received results for fuzzy automata are illustrated by an example from biomedicine area at estimation of compatibility and efficiency of applied medicines.

Fuzzy automation, graph, fuzzy matrix, index and period of matrix

Автоматные модели являются одним из распространенных способов дискретного описания технических объектов и систем. Однако в ряде случаев мы не можем однозначно определить возможность перехода системы из одного состояния в другое, а также однозначно описать взаимосвязь «входы-выходы» системы из-за различного рода неопределенностей. К таким системам относятся, например, всевозможные экспертные и биомедицинские системы, в которых есть неопределенность, связанная с нечеткостью рассуждений, восприятия и принятия решений экспертом. Например, промоделировать изменение состояния некоего пациента детерминированным автоматом затруднительно ввиду того, что эти изменения не определяются однозначно. Сложно сказать, в какой точно момент состояние пациента изменилось с «хорошего» на «удовлетворительное». Эти и подобные им системы описываются с помощью аппарата нечетких моделей [1].

Началом практического использования аппарата нечетких множеств можно считать работу Ви (Wee W.G.) и Фу (Fu K.S.) [2], в которой была предложена конструкция нечеткой автоматной модели, являющейся обобщением конструкции детерминированных автоматов. В данной модели неопределенность выражалась в том, что изменения состояний определялись неоднозначно, а переходы из состояния в состояние имели некоторую оценку, например из отрезка [0,1]. Данная модель активно использовалась различными авторами для описания поведения систем с неоднозначно определенными состояниями.

Нечеткие матрицы и нечеткие графы являются возможными средствами для описания нечетких автоматов. Функция переходов для каждого входного сигнала нечеткого автомата представляется нечеткой матрицей (нечетким графом). Поскольку итерации входного сигнала соответствует возведение данной матрицы в степень, при решении достаточно большого числа задач исследуют степени различных вещественнозначных матриц (нечетких как частный случай). Исследуют также их поведение относительно различных операций сложения и умножения, как, например, max-min умножение [3,4], максимум-сложения [5,6] (линейные системы с синхронизацией).

Рассмотрим некоторые свойства степенных матриц, для этого приведем необходимые определения.

Нечетким подмножеством множества X называется любая функция $\mu: S \to [0,1]$. Число $\mu(s)$ можно интерпретировать как меру уверенности в суждении о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому подмножеству μ.

Нечеткое подмножество ρ декартова произведения $X \times Y$ называется нечетким бинарным отношением между элементами множеств X и Y.

Пусть ρ_1 есть нечеткое отношение в $X \times Y$, ρ_2 – нечеткое отношение в $Y \times Z$. Композиция $\rho_1 \circ \rho_2$ определяется равенством

$$(\rho_1 \circ \rho_2)(x,z) = \max_y [\min\{\rho_1(x,y), \rho_2(y,z)\}]. \tag{1}$$

Нечеткие отношения (например, ρ) часто записывают в виде так называемых нечетких матриц:

$$A = (a_{ij}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \tag{2}$$

где $a_{ij} = \rho(x_i, y_j)$.

Далее будем рассматривать нечеткие отношения на некотором множестве (данным нечетким отношениям будут соответствовать квадратные матрицы).

Пусть A, B, C – нечеткие матрицы размерности $n \times n$. Тогда $A + B = C$, если $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$ для $i,\ j = 1,2,\ldots,n$. $AB = C$, если $c_{ij} = \sum\limits_{l=1..n}^{\oplus} a_{il} \otimes b_{lj}$ для $i,\ j = 1,2,\ldots n$. $A^T = C$, если $c_{ij} = a_{ji}$ для $i,\ j = 1,2,\ldots n$.

$$I_n = (\delta_{ij}),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ если } i \ne j; \end{cases} i,\ j = 1,2,\ldots n, \tag{3}$$

где операциями $\oplus$ и $\otimes$ для удобства записи обозначены операции max и min соответственно.

Нечеткие матрицы, состоящие из нулей и единиц, могут рассматриваться как двоичные булевы матрицы, т.е. матрицы над алгеброй логики B_2, операциями которой являются логическое умножение и логическое сложение. В этой интерпретации формула умножения матриц принимает привычный вид:

$$(AB)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}. \tag{4}$$

Пусть $A = (A, \cdot)$ – произвольная полугруппа и $a \in A$ – некоторый ее элемент. Подполугруппа $< a >$, порожденная элементом a, состоит из всех положительных степеней элемента a: $< a > = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$. Если $< a > = A$, то A называется циклической полугруппой (см. [7]).

Для каждого $a \in A$ существуют двевозможности:

–все степени элемента a в полугруппе $A=(A,\cdot)$ различаются между собой, тогда циклическая полугруппа $<a>$ является бесконечной;

–существуют такие положительные числа m и n, что $a^n = a^m$, где $1 \le m < n$. Легко видеть, что все дальнейшие степени элемента a будут совпадать с одним из элементов $a^m, a^{m+1}, ..., a^{n-1}$, т.е. циклическая полугруппа $<a>$ является конечной.

Во втором случае циклическую полугруппу $<a>$ можно представить в виде графа, вершины которого суть элементы полугруппы, а дуги соответствуют парам (a^k, a^{k+1}), где $k = 1,2,3...$. Число $m-1$ называется индексом, а число $n-m$ – периодом циклической полугруппы $<a>$. Количество элементов в конечной полугруппе называется её порядком.

Известно, что любая квадратная нечеткая матрица образует относительно операции min-max-умножения циклическую полугруппу. Так как общий состав элементов нечеткой матрицы при возведении её в степень не расширяется, циклическая полугруппа, порожденная нечеткой матрицей, конечна и потому для каждой такой матрицы A определены индекс $ind(A)$ и период $p(A)$.

Назовем количеством порогов в нечеткой матрице число различных значений её элементов. Заметим, например, что, матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ размерности 2×2 с числом порогов, равным 3, реализуют одни и те же индекс и период: $(1, 1)$. Это связано с тем, что и в первой, и во второй матрице для элементов выполняются следующие соотношения: $a_{11} = a_{21} > a_{12} > a_{22}$. Таким образом, задавая порядковые соотношения между элементами, мы получаем целый класс нечетких матриц с одинаковым индексом и одинаковым периодом. Если число порогов обозначить через $k(A)$, то число матриц – представителей размерности $n \times n$ равно $\left(k(A)\right)^{n^2}$.

Рассмотрим задачу нахождения индексов и периодов для нечетких графов.

Ориентированным графом (далее для краткости: графом) называется пара $G=(V,\alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины графа), а $\alpha \subseteq V \times V$ – бинарное отношение на множестве V. Пара (u,v) называется дугой графа с началом u и концом v. Отношения α называют отношением смежности, а соответствующую ему двоичную булеву матрицу $A(\alpha)$ – матрицей смежности графа G.

Если каждой дуге (u,v) графа $G=(V,\alpha)$ присвоить вес $c(u,v)$, тогда орграф G называется взвешенным орграфом.

Направленным (или ориентированным) нечетким графом называется пара $\hat{G}=(V,\hat{\alpha})$, где V – конечное непустое множество (вершины графа), а $\hat{\alpha}$ – нечеткое отношение на множестве V. Пара (u,v) называется дугой графа (или ориентированным ребром) с началом u и концом v; $\hat{\alpha}(u,v)$ – значение функции принадлежности для ребра (u,v) (вес ребра), причем вершины являются инцидентными в том и только в том случае, если $\hat{\alpha}(u,v) > 0$. Отношения α называют нечетким отношением смежности, а соответствующую ему нечеткую матрицу $A(\hat{\alpha})$ – нечеткой матрицей смежности графа $\hat{G}$.

Очевидно, что нечеткий орграф является частным случаем взвешенного орграфа, у которого дуги имеют вес из отрезка $[0,1]$.

Говоря об индексе и периоде графа G (нечеткого графа $\widehat{G}$), будем иметь в виду индекс и период его матрицы смежности (нечеткой матрицы смежности) и писать $ind(G)$ и $p(G)$ ($ind(\widehat{G})$ и $p(\widehat{G})$) соответственно.

Известно [8], что любое нечеткое отношение ρ можно представить в форме: $\rho = \underset{\alpha}{\vee} \alpha \cdot \rho_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, где $\mu_{\rho_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если, } \mu_\rho(x,y) \ge \alpha, \\ 0, \text{ если } \mu_\rho(x,y) < \alpha. \end{cases}$

Запись $\alpha \cdot \rho_\alpha$ обозначает, что все элементы обычного отношения ρ_α умножаются на α, ρ_α называется обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения. Как уже отмечалось, нечеткое отношение на некотором множестве часто представляют в виде нечеткой матрицы. Соответственно, любую нечеткую матрицу A можно представить в виде

$$A = \sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes A_\alpha . \tag{5}$$

A_α называют α-срезкой или α-сечением A.

Очевидно, что для любого натурального m имеет место

$$A^m = \sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes A_\alpha^m . \tag{6}$$

Лемма 1. Для любых двух нечетких матриц A, B и $\alpha \in (0,1]$ выполняется следующее равенство: $(AB)_\alpha = A_\alpha B_\alpha$.

Доказательство. Для заданного $\alpha \in (0,1]$ имеем

$$\left[(AB)_\alpha\right]_{ij} = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1..n}^{\oplus} a_{il} \otimes b_{lj} < \alpha \Leftrightarrow \sum_{l=1..n}^{\oplus} [A_\alpha]_{il} \otimes [B_\alpha]_{lj} = 0 \Leftrightarrow [A_\alpha B_\alpha]_{ij} = 0 . \tag{7}$$

Откуда очевидно следует, что $(AB)_\alpha = A_\alpha B_\alpha$.

Теорема 1 (Ли,[9]). Для любой нечеткой матрицы A размерности $n \times n$, $p(A) \| [n]$, где $[n]$ – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots n$.

Теорема 2 (Шварц, 1970 [10]). Для любой двоичной булевой матрицы A размерности $n \times n$ справедлива следующая оценка:

$$Ind(A) \le (n-1)^2 . \tag{8}$$

Следующая теорема обобщает данный результат на произвольные нечеткие матрицы.

Теорема 3. Для любой нечеткой матрицы A размерности $n \times n$ справедлива следующая оценка:

$$Ind(A) \le (n-1)^2 . \tag{9}$$

Доказательство. Для любой нечеткой матрицы размерности $n \times n$ имеем

$$A^{(n-1)^2+[n]} = \sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes \left(A^{(n-1)^2+[n]}\right)_\alpha . \tag{10}$$

По лемме 1 (10) будет равно

$$\sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes \left(A_\alpha^{(n-1)^2+[n]}\right). \tag{11}$$

По теоремам 1 и 2 (11) равно

$$\sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes \left(A_\alpha^{(n-1)^2}\right) = \sum_{\alpha \in k(A)}^{\oplus} \alpha \otimes \left(A^{(n-1)^2}\right)_\alpha = A^{(n-1)^2}, \tag{12}$$

откуда, очевидно, следует, что $Ind(A) \le (n-1)^2$.

Таким образом, мы показали, что независимо от числа порогов нечеткой матрицы, значение её индекса не может превышать фиксированного числа, зависящего от её размерности (9).

Графы $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ по определению изоморфны, если существует биекция $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$, сохраняющая отношение смежности: $(u,v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ для любых $u, v \in V_1$. Если Φ – двоичная булева матрица, соответствующая отображению φ, A_1, A_2 – матрицы смежности графов G_1 и G_2 соответственно, то условие изоморфности этих двух графов в матричной форме принимает вид $A_2 = \Phi^T A_1 \Phi$.

Нечеткая матрица A называется подобной нечеткой матрице B, если существует перестановочная (т.е. имеющая в каждой строке и в каждом столбце точно одну единицу) двоичная булева матрица Φ такая, что $B = \Phi^T A\, \Phi$. Так как $\Phi^T \Phi = \Phi \Phi^T = I$ (тождественная матрица), то $A = \Phi B \Phi^T = (\Phi^T)^T B \Phi^T$, т.е. B подобна A.

В [11] было показано, что подобные нечеткие матрицы имеют равные индексы и равные периоды. Следствием из данного результата является то, что изоморфные графы также имеют равные индексы и равные периоды.

Теорема 4. Пусть нечеткая матрица A имеет индекс и период равные i и p соответственно и $\mathbf{I}$ – единичная матрица, тогда матрица вида $(A+\mathbf{I})$ имеет индекс и период равные $i+p-1$ и1 соответственно.

Доказательство. Поскольку нечеткая матрица A имеет индекс и период равные i и p соответственно,то по определению индекса и периода имеем

$$A^{i+p+1} = A^{i+1}. \tag{13}$$

Тогда

$$(A+\mathrm{I})^{i+p+1} = A^{i+p+1} + A^{i+p} + A^{i+p-1} + \ldots + A^{i+2} + A^{i+1} + A^{i} + \ldots + A^2 + A + \mathrm{I}. \tag{14}$$

Так как $A^{i+p+1} = A^{i+1}$, (14) равно

$$A^{i+p} + A^{i+p-1} + \ldots + A^{i+2} + A^{i+1} + A^{i} + \ldots + A^2 + A + \mathbf{I} = (A+\mathbf{I})^{i+p} \tag{15}$$

Таким образом:

$$(A+\mathbf{I})^{i+p+1} = (A+\mathbf{I})^{i+p}. \tag{16}$$

Т.е. по определению индекса и периода нечеткой матрицы матрица $(A+\mathbf{I})$ имеет индекс и период равные $i+p-1$ и1 соответственно.

Следствие 1. Пусть нам дан нечеткий граф $\widehat{G} = (V, \widehat{\alpha})$ с индексом, равным i , и периодом – p, тогда граф $\widehat{G}^*$, полученный из графа $\widehat{G}$ добавлением петель на каждую из вершин, имеет индекс и период, равные $i+p-1$ и 1 соответственно.

Актуальной задачей для нечетких матриц и графов является вопрос о реализуемости индексов и периодов нечеткими матрицами фиксированной размерности. В [11,12] были подсчитаны индексы и периоды всех булевых матриц до размерности 6 (включительно), а также некоторых классов нечетких матриц с фиксированным числом порогов.

Если рассматривать булевы матрицы как матрицы смежностей некоторых орграфов, то среди этих матриц есть подобные матрицы, которые соответствуют изоморфным графам. Вопрос о реализуемости индексов и периодов орграфами различных типов пока остается открытым.

Следует отметить, что генерация всех неизоморфных орграфов (а также неавтономных автоматов) с числом вершин (состояний) свыше четырех является сложной и ресурсоемкой задачей. В этой связи важным является использование методов генерации, сокращающих полный перебор всех матриц. В [13] описан метод поэтапной генерации неизоморфных автоматов с увеличением числа входных сигналов. Генерация множества $M(n,m)$ – неизоморфных автоматов с n состояниями и m входными сигналами осуществляется на основе множеств автоматов $M(n,m\text{-}1)$ и $M(n,1)$. При этом для автономных автоматов $M(n,1)$ показано, что время их генерации пропорционально числу автоматов. Генерация автоматов из множества $M(n,m)$ осуществляется на основе пар автоматов (A,B), где $A \in M(n,m-1)$, $B \in M(n,1)$, а перебор производится только по группам автоморфизмов автоматов: $Aut(A)$ и $Aut(B)$. В [14] показано, как результаты для неизоморфных автоматов могут быть перенесены на графы.

Задача нахождения индекса и периода графа, в свою очередь, является NP-полной задачей. В связи с этим выполнение данных расчетов потребовало разработки специальных программных средств для реализации распределенных вычислений. В табл. 1-5 приводятся результаты вычислений индексов и периодов беспетлевых орграфов с числом вершин от двух до шести.

Таблица 1

Индексы и периоды двухвершинных беспетлевых орграфов

Индекс	Период		Всего с фиксированным индексом
	1	2	
0	1	0	1
1	1	1	2
Всего с фиксированным периодом	2	1	Всего: 3

Таблица 2

Индексы и периоды трехвершинных беспетлевых орграфов

Индекс	Период			Всего с фиксированным индексом
	1	2	3	
0	1	6	1	8
1	4	0	0	4
2	2	0	0	2
3	1	0	0	1
4	1	0	0	1
Всего с фиксированным периодом	9	6	1	Всего: 16

Таблица 3

Индексы и периоды четырехвершинных беспетлевых орграфов

Индекс	Период	Всего с

	1	2	3	4	фиксированным индексом
0	1	30	8	1	40
1	18	35	0	0	53
2	33	1	0	0	34
3	38	1	0	0	39
4	42	0	0	0	42
5	8	0	0	0	8
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	0	1
Всего с фиксированным периодом	142	67	8	1	Всего: 218

Таблица 4

Индексы и периоды пятивершинных беспетлевых орграфов

Индекс	Период						Всего с фиксированным индексом
	1	2	3	4	5	6	
0	1	133	61	12	1	3	211
1	246	741	74	0	0	8	1069
2	1856	329	0	0	0	8	2193
3	2455	106	0	0	0	4	2565
4	2196	82	0	0	0	2	2280
5	1018	6	0	0	0	2	1026
6	107	0	0	0	0	0	107
7	52	0	0	0	0	0	52
8	47	0	0	0	0	0	47
9	46	0	0	0	0	0	46
10	6	0	0	0	0	0	6
11	2	0	0	0	0	0	2
12	1	0	0	0	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	1
16	1	0	0	0	0	0	1
Всего с фиксированным периодом	8036	1397	135	12	1	27	Всего: 9608

Таблица 5

Индексы и периоды шестивершинных беспетлевых орграфов

Индекс	Период	Всего

	1	2	3	4	5	6	с фиксированны м индексом
0	1	719	394	177	16	64	1371
1	21449	19681	2836	238	0	652	44856
2	437111	22523	1095	22	0	828	461579
3	522499	15293	331	30	0	412	538565
4	285099	14032	348	0	0	186	299665
5	137213	2852	27	0	0	144	140236
6	39177	106	6	0	0	18	39307
7	7263	10	2	0	0	0	7275
8	3950	272	0	0	0	0	4222
9	2440	272	0		0	0	2712
10	583	0	0	0	0	0	583
11	191	0	0	0	0	0	191
12	141	0	0	0	0	0	141
13	82	0	0	0	0	0	82
14	5	0	0	0	0	0	5
15	69	0	0	0	0	0	69
16	78	0	0	0	0	0	78
17	5	0	0	0	0	0	5
18	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0	0	1
25	1	0	0	0	0	0	1
Всего с фиксирова нным периодом	145735 8	75760	5039	467	16	2304	Всего: 1540944

Проиллюстрируем возможные приложения полученных результатов. Рассмотрим следующую модельную ситуацию: пусть наблюдается некоторый пациент, пораженный двумя заболеваниями. Предположим, что медикаментозное лечение данного пациента состоит в назначении ему лекарств двух или более типов, каждое из которых может оказывать, помимо терапевтического воздействия, побочное влияние на сопутствующее заболевание. Таким случаем может быть, например, наблюдение пациента с артериальной гипертензией и сахарным диабетом. Известно, что многие антигипертензивные препараты (например, b-адреноблокаторы, диуретики в высоких дозах) могут оказывать негативное влияние на сопутствующее заболевание – сахарный диабет. И наоборот, многие препараты, предназначенные для лечения сахарного диабета, например дибикор, вызывают повышение артериального давления, поскольку воздействуют на метаболитические функции организма.

Вышеуказанную ситуацию возможно промоделировать неким автоматом [15]. Роль внешних воздействий будут играть лекарства. Роль выходных сигналов играют объективные показатели состояния пациента, например его температура и давление. Вместе с тем оценка состояния такого больного может быть получена только в слабых шкалах порядка и наименования, что предполагает некоторую степень неопределенности. Применительно к рассмотренной задаче это означает, что оценивать состояние пациента можно лишь с помощью нечетких критериев, например «хорошее», «удовлетворительное», «критическое» и т.п. То есть описать данную ситуацию можно только с помощью нечетких моделей, например нечеткой автоматной моделью.

Таким образом, при моделировании терапевтического воздействия на пациента в нашем исходном примере имеем нечеткий автомат с двумя входными сигналами, отражающими факт поступления лекарств в организм. Далее врач или несколько врачей, основываясь на данных о пациенте, могут дать прогнозные оценки действия каждого лекарства, оценивая возможности изменения состояний больного. Переведя лингвистические оценки в нечеткий вид, получим матрицы перехода некоторого нечеткого автомата. Состоянию данного автомата будет соответствовать некоторый набор значений анализов пациента, например, значение уровня сахара в крови, принадлежащее некоторому отрезку значений, артериальное давление из некоторого диапазона и т.п.Формализация вышеизложенного процесса позволяет получить нечеткий автомат с двумя входными сигналами и десятью состояниями.

$A=(S,X,\delta)$, где $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_{10}\}$, $X=\{x_1,x_2\}$ и функция переходов δ задана следующими нечеткими матрицами перехода:

$$M_1=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 & 1 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 & 1 & 0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.4 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0.4 & 0.8 & 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0.5 & 1 & 1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 1 & 0.4 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0.1 & 1 & 0.6 & 1 & 1 & 06 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.4 & 1 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Данный пример носит модельный характер, на практике же количество состояний нечеткого автомата может быть гораздо больше.

Для врача и пациента желательно получить качественные суждения о состоянии пациента при моделировании, например в терминах «хорошее», «удовлетворительное», «критическое», а не в терминах n-состояний в которых может находиться модель.

Данная задача решается посредством факторизации числа состояний нечеткого автомата следующим образом. Используя предложенный в [16,17] алгоритм по построению конгруэнций нечеткого автомата, получаем 3 возможных разбиения множества состояний исходного нечеткого автомата, являющиеся его конгруэнциями:

$$\theta_1=\{\{s_1,s_2,s_3\},\{s_4,s_5,s_6,s_7\},\{s_8\}\{s_9,s_{10}\}\},$$

$$\theta_2 = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4, s_5, s_6, s_7\}, \{s_8\}\{s_9, s_{10}\}\},$$

$$\theta_3 = \{\{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6, s_7\}, \{s_8, s_9, s_{10}\}\}. \quad (18)$$

По каждой из конгруэнций (18) можно построить модель исходного нечеткого автомата, которая с той или иной степенью точности будет описывать его поведение, но будет обладать меньшим числом состояний – так называемый фактор-автомат [16]. Состояния данной модели являются классами данного разбиения, т.е. обобщениями состояний исходного нечеткого автомата.

Выбирая ту или иную конгруэнцию, мы можем строить обобщенную модель исходного автомата, соответствующую выбранной конгруэнции.

Так, в нашем примере мы по конгруэнции θ_3 можем построить модель исходного автомата с числом состояний 3, которые можно интерпретировать как «хорошее», «удовлетворительное» и «критическое». Полученная нечеткая модель будет иметь вид $A^* = (S^*, X, \delta^*)$, где $S^* = \{s_1, s_2, s_3\}$, $X = \{x_1, x_2\}$ и функция переходов δ^* задана следующими нечеткими матрицами перехода:

$$M_1^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}; \; M_2^* = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.8 \\ 0.4 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Получившийся в результате данной операции автомат в некотором смысле сохраняет функциональное поведение исходного автомата. Используя полученную модель, можно попытаться оценить степень совместимости применяемых лекарственных средств, а также время достижения положительного эффекта для пациента.

Функциональное поведение данного нечеткого автомата будет отражать изменение состояния пациента с течением времени. Если два препарата вводятся последовательно, то их совокупному воздействию будет соответствовать матрица переходов, равная произведению матриц, соответствующих введению первого и второго препаратов, т.е. матрица $M = M_1^* M_2^*$. Регулярному приему препаратов соответствует возведение данной матрицы в степень, вследствие чего важными для нас будут являться значения индекса и периода матрицы $M = M_1^* M_2^*$.

Матрицы, входящие в период, будут описывать цикличность изменения состояния пациента. Изучение периодичности нечеткой системы позволяет дать рекомендации о применении дополнительных препаратов с целью стабилизации состояния пациента, т.е. уменьшения значения периодичности. Рассматривая наш пример, видим, что период матрицы $M = M_1^* M_2^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$ в нашем случае принимает значение, равное единице. То есть после стабилизации состояния больного в течение любого срока совместного применения препаратов нечеткая матрица переходов будет иметь один и тот же вид, что можно интерпретировать как достаточно хороший показатель совместимости препаратов. Следует отметить, что характер стабилизации в общем случае тоже может быть достаточно разным, например состояние пациента может стать стабильно тяжелым в результате применения препаратов.

Значение индекса матрицы переходов автомата отражает время, необходимое для достижения положительного эффекта (стабилизации состояния), в нашем случае индекс равен нулю, что говорит о том, что основной терапевтический эффект будет достигаться сразу же после приема препарата.

Большое значение индекса говорит о продолжительной стабилизации состояния пациента, а большое значение периода нечеткой матрицы $M = M_1^* M_2^*$ – о последовательном циклическом изменении состояния пациента при приеме этих двух препаратов.

Очевидно, что данный подход легко обобщается на случай использования и большего числа лекарственных средств. Данная интерпретация результатов вычисления индексов и периодов нечетких матриц наглядно иллюстрирует возможность применения формального аппарата нечетких моделей в различных прикладных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Inform. and Control. 1965. Vol. 8. P. 338-353.
2. Wee W.G., Fu K.S. A Formulation of Fuzzy Automata and its Applications as a Model ofLearning Systems // I.E.E.E. Trans. Syst. Science and Cybernetics. 1969. Vol. SSC-5, P. 215-223.
3. Fan Z.T., Liu De-Fu. Convergency of power sequence of monotone increasing fuzzy matrix // Fuzzy Sets and Systems 6 (1997) 281–286.
4. Thomasson M.G., Convergence of powers of a fuzzy matrix // J. Math. Anal. Appl. 57 (1977) 476–480.
5. Baccelli F., Cohen G., Olsder G., Quadrat J. Synchronization and Linearity. John Wiley & Sons, New York, 1992.
6. Schutter B. De On the ultimate behavior of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra // Linear Algebra Appl. 307 (2000) 103-117.
7. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.
8. Кон П. Универсальная алгебра. М., Мир, 1968.
9. Li J.X. Periodicity of powers of fuzzy matrices (finite fuzzy relations) // Fuzzy Sets and Systems 48 (1992) 365-369.
10. Schwarz S. On the semigroup of binary relations on a finite Set // Czech. Math. J. 20, 632-679 (1970).
11. Максимов А.А., Салий В.Н. Индексы и периоды нечетких матриц и графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А.А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 7. С. 87-95.
12. Максимов А.А. Базы данных алгебраических свойств некоторых дискретных объектов // Теоретические проблемы информатики и её приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А.А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 7. С. 81-86.
13. Папшев С.В. Порождение конечных неизоморфных автоматов. Саратов, 1986. Деп. в ВИНИТИ, № 4166-В86. Библиогр. указ. деп. научных работ, № 10,1986,668.
14. Лаврушин В.И., Папшев С.В., Печенкин В.В. Об изоморфизме графов и конечных автоматов // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во СГУ, 1990. С. 162-166.
15. Максимов А.А. Приложения методов анализа и синтеза моделей нечетких дискретных систем в биомедицине // Социально-экономическое развитие России: проблемы, поиски, решения: сб. науч. тр. по итогам науч.-исслед. работы Сарат. гос. соц.-экон. ун-та в 2008 году: в 2 ч. Ч. 1 / Сарат. гос. соц.-экон. ун-т. Саратов, 2009. С. 123-124.
16. Максимов А.А. Исследование сложных информационных систем с использованиемуниверсально-алгебраических конструкций нечетких автоматов // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. 2006. №14(3). С.126-128.
17. Максимов А.А. Минимизация сложных информационных систем с использованием универсально-алгебраических конструкций нечетких автоматов // Теоретические и прикладные вопросы современных информационных технологий: материалы Всерос. науч.-техн. конф. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2007. С. 187-191.

Максимов Алексей Алексеевич – кандидат физико-математических наук,

Maksimov Aleksey Alekseevich – Candidate of Sciences in Physics and доцент кафедры прикладной математики и информатики Саратовского государственного социально-экономического университета

Папшев Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Саратовского государственного технического университета

Mathematics, Assistant Professor of the Chair of Applied Mathematics & Computer Science of Saratov State Socio-Economic University

Papshev Sergey Vladimirovich – Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Assistant Professor of the Chair of Information Systems and Technologies of Saratov State Technical University

Статья поступила в редакцию 03.03.2011, принята к опубликованию 20.03.2011