(4), найдем явное выражение для $\overset{2}{\Gamma}{}^a_{bc}$. Учитывая, что $\omega_{12} = x^3$, $\omega^{21} = \dfrac{1}{x^3}$,

получаем $\overset{2}{\Gamma}{}^1_{21} = \overset{2}{\Gamma}{}^1_{12} = \dfrac{b_3}{x^3}$, $\overset{2}{\Gamma}{}^2_{21} = \overset{2}{\Gamma}{}^2_{12} = -\dfrac{x^2}{2x^3} - \dfrac{b_2}{x^3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галаев С. В., Гохман А. В.* Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях со связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Вып. 2. Изд-во Сарат. ут-та. С. 16 – 19.

2. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1995.

УДК 517.11

А. Н. Гамова

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ФОРМУЛ

Появление нестандартного анализа потребовало его теоретико-множественного обоснования. Теория Э. Нельсона (IST) рассматривает множества канторовского универсума как *стандартные и нестандартные*. Стандартные множества – это то, с чем имеет дело классическая математика, не оперирующая с константами, являющимися отличными от нуля бесконечно малыми, и что описывается в рамках теории множеств Цермело-Френкеля (ZFC), консервативным расширением которой является IST.

В язык теории IST добавляется новый предикатный символ $st(x)$ (x стандартно) и кванторы $\forall^{st}$, $\exists^{st}$. Формулы (строящиеся обычным образом) различаются как внутренние (формулы ZFC) и внешние (не являющиеся формулами ZFC). Аксиомы IST наряду с аксиомами ZFC содержат три новые аксиомы:

Принцип переноса

(T) $\forall^{st} t_1 \ldots \forall^{st} t_k \; (\forall^{st} x\, A(x,t_1,\ldots,t_k) \to \forall x\, A(x,t_1,\ldots,t_k))$, где $A(x,t_1,\ldots,t_k)$ внутренняя формула со свободными переменными $x, t_1, \ldots, t_k$, не содержащая других свободных переменных.

Принцип идеализации

(I) $\forall^{st\,fin} z\, \exists x\, \forall y{\in}z\, B(x,y) \leftrightarrow \exists x\, \forall^{st} y\, B(x,y)$, где $B(x,y)$ внутренняя формула со свободными переменными x, y и, возможно, другими свободными переменными.

Принцип стандартизации

(S) $\forall^{st} x\, \exists^{st} y\, \forall^{st} z\, (z{\in}y \leftrightarrow z{\in}x \;\&\; C(z))$,

где $C(z)$ внутренняя или внешняя формула со свободной переменной z и, возможно, другими свободными переменными.

Из аксиом IST по правилам вывода исчисления предикатов имеем:

(1) $\forall^{st} x\, \exists^{st} y\, A(x,y) \leftrightarrow \exists^{st} y^*\, \forall^{st} x\, A(x,y^*(x))$ и двойственная к ней

(1*) $\exists^{st} x\, \forall^{st} y\, A(x,y) \leftrightarrow \forall^{st} y^*\, \exists^{st} x\, A(x,y^*(x))$;

(2) $\forall x\, \forall^{st} y\, A(x,y) \leftrightarrow \forall^{st} y\, \forall x\, A(x,y)$ и двойственная к ней

(2*) $\exists x\, \exists^{st} y\, A(x,y) \leftrightarrow \exists^{st} y\, \exists x\, A(x,y)$;

где $A(x,y)$ внутренняя или внешняя формула, содержащая наряду со свободными переменными x, y возможно и другие стандартные переменные.

(3) $\forall^{st} x\; A(x) \leftrightarrow \forall x\, A(x)$ и двойственная к ней

(3*) $\exists^{st} x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, A(x)$;

(4) $\forall^{st\,fin} z\; \exists x\, \forall y \in z\, A(x,y) \leftrightarrow \exists x\, \forall^{st} y\; A(x,y)$ и двойственная к ней

(4*) $\exists^{st\,fin} z\, \forall x\; \exists y \in z\, A(x,y) \leftrightarrow \forall x\, \exists^{st} y\, A(x,y)$,

где $A(x,y)$ внутренняя формула.

Из (3) и (3*) следует, что для кванторов $\forall^{st}$ и $\exists^{st}$ имеют место обычные правила. Приведенные выше эквивалентности позволяют сводить многие понятия и утверждения нестандартной теории множеств и строящейся на этой основе нестандартной математики к эквивалентным выражениям канторовской математики. Процедура таких преобразований носит название алгоритма Нельсона. Суть алгоритма Нельсона состоит в приведении формулы к виду, когда может быть применен принцип переноса (снятия внешнего квантора стандартности).

Цель работы – программная реализация алгоритма Нельсона. Далее приводится описание *вычислительного алгоритма.*

Шаг 1. Высказывание нестандартного анализа записывают как формулу IST, т.е. без сокращений.

Шаг 2. Формулу IST приводят к пренексной нормальной форме $Q_1x_1\ldots Q_nx_n\, A(x_1,\ldots,x_n)$, где $A(x_1,\ldots,x_n)$ внутренняя формула, а Q_i (i=1,...,n) один из кванторов $\forall, \exists, \forall^{st}, \exists^{st}$. Если n=0, то процедура заканчивается.

Шаг 3. Если Q_n – внутренний квантор, то $A{:} = Q_nx_n\, A(x_1,\ldots,x_n)$ и переходят к шагу 2.

Шаг 4. Если Q_n – внешний квантор, то ищут первый внутренний квантор, просматривая кванторную приставку $Q_1x_1\ldots Q_nx_n$ справа налево.

Шаг 5. Если на шаге 4 внутренних кванторов не встретилось, то согласно (3) или (3*) квантор Q_n заменяют на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу 2 (т.е. последовательно справа налево «стирают» верхний индекс st у каждого квантора).

Шаг 6. Пусть Q_m – первый встретившийся на шаге 4 внутренний квантор. Допустим, что Q_{m-1} – внешний квантор того же типа, что и Q_m, тогда применяют эквивалентности (2) или (2*) и переходят к шагу 2.

Шаг 7. Если все кванторы $Q_{m+1},\ldots,Q_n$ имеют один и тот же тип, то применяют эквивалентности (4) или (4*) и переходят к шагу 2.

Шаг 8. Если происходит перемена типа квантора, т.е. если Q_m, Q_{p+1} – кванторы одного типа, а Q_{m+1}, Q_p – другого, противоположного типа, то «склеивая» однотипные кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_p$, применяют эквивалентности (1) или (1^*) и переходят к шагу 2.

Примеры, реализованные в программе в виде модулей:

- $\forall x\ \exists^{st} y\ \forall^{st} z\ A(x,y,z) \leftrightarrow \forall z^*\ \exists^{fin} y'\ \forall x\ \exists y \in y'\ A(x,y,z^*(y))$
- $\forall x\ \exists y\ \forall^{st} z\ A(x,y,z) \leftrightarrow \forall x\ \forall^{fin} z'\ \exists y\ \forall z \in z'\ A(x,y,z)$
- $\forall x\ (\forall^{st} y\ A(x,y) \to \forall^{st} z\ B(x,z)) \leftrightarrow \forall z\ \exists^{fin} y'\ \forall x\ (\forall y \in y'\ A(x,y) \to B(x,z))$
- $\forall t\ (\forall^{st} x\ A(t,x) \leftrightarrow \forall^{st} y\ B(t,y)) \leftrightarrow \forall y\ \forall z\ \exists^{fin} x'\ \exists^{fin} w'\ \forall t\ ((\forall x \in x'\ A(t,x) \to B(t,y))\ \&$ $(\forall w \in w'\ B(t,w) \to A(t,z)))$
- $\forall x\ (\forall^{st} y\ A(x,y) \to \exists z\ \forall^{st} w\ B(x,z,w)) \leftrightarrow \forall^{fin} w'\ \exists^{fin} y'\ \forall x\ (\forall y \in y'\ A(x,y) \to$ $\exists z\ \forall w \in w'\ B(x,z,w))$.

Собственно программа состоит из двух частей. В первой части синтаксическое дерево приводится к пренексной нормальной форме, во второй реализован алгоритм преобразования для дерева в пренексной нормальной форме. Для приведения дерева к пренексной нормальной форме осуществляется прямой обход следующего вида: если логическая связка не является эквивалентностью, то к пренексной нормальной форме приводится сначала левое поддерево, а затем правое; если логическая связка есть эквивалентность, то эта вершина заменяется на новую, у которой кванторная приставка пуста и логическая операция – конъюнкция. У левого поддерева кванторная приставка такая же, как у эквивалентности, логическая операция есть импликация из левого операнда эквивалентности в правый. У правого поддерева конъюнкции кванторная приставка как у эквивалентности, логическая операция есть импликация из правого операнда эквивалентности в левый, кроме того, в этом поддереве все квантифицированные переменные заменены на новые, до этого в дереве не встречавшиеся. После замены вершины обход дерева продолжается, начиная с новой вершины. Если очередное поддерево приведено к пренексной нормальной форме, то его кванторная приставка переносится в кванторную приставку родительской вершины (согласно правилам оперирования с кванторами). В результате кванторная приставка будет только у корневого узла. (Порядок вынесения кванторов из поддеревьев: сначала из левого, потом из правого, или сначала из правого, потом из левого, существенно влияет на алгоритм.)

Алгоритм для формулы в пренексной нормальной форме осуществлен в виде цикла, который повторяется, пока кванторная приставка не пуста. Если в голове списка оказывается внутренний квантор, то он удаляется из кванторного списка синтаксического дерева и добавляется в новый список, который после того, как мы исчерпаем исходный список, станет результатом работы алгоритма. Если в голове списка стоит внешний квантор, то ищется первый внутренний квантор, заодно проверяется, не меняется ли тип кванторов, предшествующих внутреннему, на двойственный начальному. Если при просмотре кванторной приставки внутренних кванторов не обнаружено, то к первому квантору в кванторной приставке применяется принцип переноса. Если внутренний и предшествующий ему квантор одного типа, то они меняются местами. Если произошла смена типа кванторов, то применяется принцип идеализации, иначе - принцип стандартизации.

Программа состоит из трех модулей. В основном модуле реализованы: синтаксический анализ, лексический анализ и вычислительный алгоритм. Во втором даны описания лексических и синтаксических структур, а также некоторые вспомогательные функции и процедуры для работы с ними. Третий модуль содержит процедуру, выдающую сообщение об ошибке.

ЛИТЕРАТУРА

Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83, № 6. P. 1165 – 1198.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

1. Рассмотрим краевую задачу для системы Дирака вида

$$BY' + (P(x) + P_\gamma(x))Y = \lambda Y, \quad 0 < x < \pi, \ \gamma \in (0,\pi), \tag{1}$$

$$V_1^T(\alpha)Y(0) = V_1^T(\beta)Y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}, \quad P_\gamma(x) = \frac{\mu}{x-\gamma}\begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix},$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, T – знак транспонирования.

Здесь $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, $\mu, \alpha, \beta, \varphi$ – комплексные числа. Пусть для определенности $\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta, \mathrm{Re}\,\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, $\mu + 1/2 \notin \mathrm{N}$, и пусть $|x-\gamma|^{-2\mathrm{Re}\,\mu} |p_k(x)| \in L(0,\pi)$, $p_k(x) \in W_1^1(0,\pi)$, $k = 1,2$.

Система Дирака без особенности изучена достаточно полно (см., например, [1]). Цель работы – выявить аналитические и асимптотические свойства характеристической функции (ХФ) задачи (1), (2), исследовать поведение спектра и функции Вейля (ФВ) задачи (1), (2). Для оператора Штурма-Лиувилля подобные результаты получены в [2].