ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Кулжанов У.Н.[1], Уралова О.Б.[2], Авлиёева С.О.[3]

[1]Кулжанов Уткир Негматович – доцент, PhD,
кафедра теории вероятностей и прикладной математики, математический факультет
Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова;
[2]Уралова Озода Бурибоевна – преподаватель,
Академический лицей Самаркандский государственный университет ветеринарной медицины, животноводства и биотехнологии,
[3]Авлияева Ситабону Отабек кизи– студент,
математический факультет
Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова,
г. Самарканд, Республика Узбекистан

Аннотация: *рассматривается определение характеристической функции случайной величины и его основные свойства. Характеристическая функция случайной величины играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистике. Она содержит полную информацию о распределении случайной величины и широко используется для исследования свойств распределений, предельных теорем и статистического моделирования. В связи с этим в статье рассматривается характеристические функции нормального, равномерного, пуассоновского, экспоненциального и дискретного равномерного распределений, которые широко применяются в изучении теоретических вопросов и решения практических задач теории вероятностей*

Ключевые слова: *дискретная случайная величина, непрерывная случайная величины, характеристическая функция случайной величины, случайный вектор, нормальное, равномерное, пуассоновское, экспоненциальное, дискретное равномерное распределение*.

CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF SOME IMPORTANT RANDOM VARIABLES

Kulzhanov U.N.[1], Uralova O.B.[2], Avliyoeva S.O.[3]

[1]Kulzhanov Utkir Negmatovich – Associate Professor, PhD,
DEPARTMENT OF PROBABILITY THEORY AND APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF MATHEMATICS,
SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHARAF RASHIDOV;
[2]Uralova Ozoda Buriboevna – Lecturer,
ACADEMIC LYCEUM, SAMARKAND STATE UNIVERSITY OF VETERINARY MEDICINE, ANIMAL HUSBANDRY AND BIOTECHNOLOGY,
[3]Avliyaeva Sitabonu Otabek kizi – student,
Faculty of Mathematics,
Samarkand State University named after Sharaf Rashidov,
Samarkand, Republic of Uzbekistan

Abstract: *the article discusses the definition of the characteristic function of a random variable and its main properties. The characteristic function of a random variable plays a fundamental role in probability theory and mathematical statistics. It contains complete information about the distribution of a random variable and is widely used to study the properties of distributions, limit theorems and statistical modeling. In this regard, the article considers the characteristic functions of normal, uniform, Poisson, exponential and discrete uniform distributions, which are widely used in studying theoretical issues and solving practical problems of probability theory.*

Keywords: *discrete random variable, continuous random variable, characteristic function of a random variable, random vector, normal, uniform, Poisson, exponential, discrete uniform distribution*.

УДК 519.213.2

Характеристическая функция случайной величины играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистике. Она содержит полную информацию о распределении случайной величины и широко используется для исследования свойств распределений, предельных теорем и статистического моделирования.

Характеристическая функция случайной величины X определяется как математическое ожидание комплексной экспоненты [1]:

Определение. *Характеристической функцией вещественной случайной величины X называется комплекснозначная функция действительного аргумента $t \in \mathbb{R}$:*

$$\varphi(t) = Me^{itX} = \int\limits_{\Omega} e^{itx}\, dP(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x),$$

где интеграл справа называется интегралом Стильтеса.

Замечание 1. *Заметим, что характеристическая функция существует для любой случайной величины* X*, т.е.*

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}\right| F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1.$$

Замечание 2. *Если случайная величина* X *имеет дискретное распределение, то*

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} P(X = x_k) = \sum_k e^{itx_k} p_k,$$

где $x_1, x_2, \ldots -$*не более чем счётное набор значений, которые принимает случайная величина* X.

Замечание 3. *Если случайная величина* X *имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью* $p(x)$*, то*

$$\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx,$$

то есть характеристическая функция есть (обратное) преобразование Фурье функция $p(x)$.

Основными свойствами характеристической функции являются:

1. $\varphi(0) = 1$ и $|\varphi(t)| \le 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.
2. $\varphi_{bX+a}(t) = e^{ita}\varphi_X(bt)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n -$независимые случайные величины, то характеристическая функция суммы $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ равна

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

4. Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей прямой.
5. $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$.

Рассмотрим характеристические функции некоторых распространенных распределений [2].

1. Нормальное распределение. Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ), то его характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi_X(t) = e^{iat} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{iat - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Это свойство полезно при доказательстве центральной предельной теоремы.

2. Равномерное распределение. Для случайной величины X, равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$, характеристическая функция выражается как:

$$\varphi_X(t) = \int\limits_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)it} e^{itx}\Big|_a^b = \frac{1}{(b-a)it}\left(e^{ibt} - e^{iat}\right).$$

Если отрезок симметричен, т.е. $[-a, a]$, то

$$\varphi_X(t) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^{itx}}{2a} dx = \frac{1}{2ait} e^{itx}\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{2ait}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right) = \frac{\sin at}{at}.$$

3. Пуассоновское распределение. Если X случайная величина имеет Пуассоновское распределение с параметром λ, то его характеристическая функция выражается следующим образом:

$$\varphi_x(t) = Me^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

Это свойство часто используется в теории случайных процессов.

4. Экспоненциальное распределение. Если случайная величина X имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$, то ее характеристическая функция представляется следующей формулой:

$$\varphi_X(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{itx} dx = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

5. Дискретное равномерное распределение. Для случайной величины X, принимающей значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \cdots, p_n$ характеристическая функция определяется равенством:

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Заключение. Характеристические функции являются мощным инструментом для анализа вероятностных распределений. Они позволяют легко находить моменты, исследовать сходимость случайных величин и решать задачи теории случайных процессов. Их применение простирается от классической статистики до современных методов машинного обучения и обработки сигналов.

Список литературы / References

1. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. - М.: «Наука». Главное издательство физико-математической литературы, 1972.- 288 с. 4-е изд. М., 1999.
2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. - М.: «Наука». Главное издательство физико-математической литературы, 1988. 6-е изд. М., 1988.