

h-ОДНОРОДНЫЕ λ -ПРОСТРАНСТВА

С.В. Медведев¹

Пусть X – h -однородное сепарабельное метризуемое несчётное λ -пространство. Тогда: 1) X является CDH-пространством, 2) X гомеоморфно $X \setminus A$ для любого счётного множества A из X .

Ключевые слова: CDH-пространство; h -однородное пространство; λ -пространство; гомеоморфизм.

Все пространства предполагаются сепарабельными метризуемыми.

Сепарабельное топологическое пространство X называется *счётно плотно однородным*, если для любых двух счётных всюду плотных множеств A и B из пространства X существует такой гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, что $f(A) = B$. Кратко такое пространство X называется *CDH-пространством*. Это понятие применяется только для сепарабельных пространств. Термин «CDH-пространство» был введён Беннетом в 1972 г. Однако понятие CDH-пространства является классическим; оно фактически встречалось ещё в работах Кантора, Брауэра, Фреше и других математиков прошлого века. Важными примерами CDH-пространств служат евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и гильбертов куб $[0; 1]^\omega$.

Теорема 1. *Любое абсолютно борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой.*

Напомним, что *абсолютно борелевским пространством* называется пространство, гомеоморфное борелевскому подмножеству полного метрического пространства. Теорема 1 доказана М. Хрусаким и Б. Авилес [1] в предположении выполнения аксиом теории ZFC. Отметим также [1], что из аксиомы детерминированности вытекает, что любое CDH-пространство метризуемо полной метрикой. В то же время, как известно, аксиома детерминированности противоречит аксиоме выбора.

Теорема 1 показывает, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди множеств, устроенных более сложно, чем борелевские множества в польских пространствах. Ниже в теореме 2 указан ещё один класс CDH-пространств. Теорема 2 доказана в системе аксиом ZFC и представляет собой основной результат заметки; она усиливает утверждение 4.9 из статьи [4].

Обозначения. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y гомеоморфны. Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω , также $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно является T_1 -пространством и обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Нульмерное пространство называется *h -однородным*, если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Пространство X называется *пространством первой категории*, если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств.

Куратовский [2, §40] ввёл так называемые λ -пространства. Сепарабельное пространство X называется *λ -пространством*, если любое счётное подмножество из X является G_δ -множеством в X . Можно доказать [2], что любое несчётное польское пространство содержит несчётное λ -множество.

Остальные обозначения и применяемые термины можно найти в монографиях [2] и [6].

Отметим следующие связи между λ -пространствами и пространствами первой категории.

Лемма 1 [2]. *Любое λ -пространство является пространством первой категории.*

Лемма 2 [3]. *Любое CDH-пространство первой категории является λ -пространством.*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

¹ Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Лемма 3 [5]. Пусть в нульмерном метризуемом пространстве X_i дано замкнутое нигде не плотное множество F_i , где $i \in \{1; 2\}$. Пусть дан гомеоморфизм $f: F_1 \rightarrow F_2$.

Тогда существует покрытие $\mathcal{V}_i$ множества $X_i \setminus F_i$ попарно не пересекающимися открыто-замкнутыми (в X_i) множествами для каждого $i \in \{1; 2\}$ и биекция $\psi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ такие, что для любых множеств $D_1 \subset \bigcup \mathcal{V}_1$ и $D_2 \subset \bigcup \mathcal{V}_2$, связанных произвольной биекцией $g: D_1 \rightarrow D_2$ и удовлетворяющих условию $g(D_1 \cap V) = D_2 \cap \psi(V)$ для любого $V \in \mathcal{V}_1$, комбинированное отображение $f \nabla g: F_1 \cup D_1 \rightarrow F_2 \cup D_2$ непрерывно в каждой точке множества F_1 , а обратное отображение $(f \nabla g)^{-1}$ непрерывно в каждой точке множества F_2 .

В ситуации, описанной леммой 3, мы будем говорить, что:

1) покрытие $\mathcal{V}_i$ множества $X_i \setminus F_i$ образует *остаточное семейство множеств* относительно множества F_i для каждого $i \in \{1; 2\}$;

2) биекция $\psi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ согласована с гомеоморфизмом $f: F_1 \rightarrow F_2$;

3) тройка $\langle \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \psi \rangle$ образует *KR-покрытие* для $\langle X_1 \setminus F_1, X_2 \setminus F_2, f \rangle$.

Результат, аналогичный лемме 3, был также получен А.В. Островским и ван Энгеленом. Отметим, что термин «KR-покрытие» был предложен ван Энгеленом.

В доказательстве теоремы 2 используются некоторые идеи из статьи [4].

Теорема 2. Любое h -однородное несчётное λ -пространство является CDH-пространством.

Доказательство. В h -однородном несчётном λ -пространстве X зафиксируем счётные всюду плотные множества A и B .

Так как пространство X нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ дискретных открытых покрытий пространства X , что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X , состоящую из открыто-замкнутых множеств, причём для любого n покрытие $\mathcal{U}_{n+1}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}_n$. По определению h -однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U: X \rightarrow U$.

Счётное множество $A \cup \{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $A' = \{a_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $A' \setminus A$ было бы всюду плотно в X . Аналогично, счётное множество $B \cup \{\varphi_U(B) : U \in \mathcal{U}\}$ расширим до счётного множества $B' = \{b_n : n \in \omega\}$ таким образом, чтобы множество $B' \setminus B$ было бы всюду плотно в X .

Так как пространство X – несчётное, то $X' = X \setminus (A' \cup B')$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории X ; следовательно, X' также является множеством первой категории в X . По определению λ -пространства, $A' \cup B'$ – множество типа G_δ в пространстве X . Тогда $X' = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$, где каждое множество X_n замкнуто и нигде не плотно в X . Так как пространство X нульмерно, то без ограничения общности можно считать, что множества $X_n, n \in \omega$, попарно не пересекаются. По построению, для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$ множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X , причём $\varphi_U(X_n) \subset U$, $\varphi_U(X_n) \cap A = \emptyset$ и $\varphi_U(X_n) \cap B = \emptyset$.

Построим гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, для которого $f(A) = B$.

Для этого по индукции в пространстве X построим замкнутые нигде не плотные множества F_n и E_n , гомеоморфизм $f_n: F_n \rightarrow E_n$, KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \rangle$ для $\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \rangle$, удовлетворяющие следующим условиям для любого $n \in \omega$:

- 1) $X_n \cup F_n \cup \{a_n\} \subset F_{n+1}$;
- 2) $X_n \cup E_n \cup \{b_n\} \subset E_{n+1}$;
- 3) $f_n(A \cap F_n) = B \cap E_n$;

- 4) сужение $f_n|_{F_i} = f_i$ для любого $i < n$;
 5) семейство $\mathcal{V}_{n+1}$ вписано в $\mathcal{V}_n$, а семейство $\mathcal{W}_{n+1}$ вписано в $\mathcal{W}_n$;
 6) если $V \in \mathcal{V}_n$ и $V^* \in \mathcal{V}_m$ для $n < m$, то $V^* \subset V \Leftrightarrow \psi_m(V^*) \subset \psi_n(V)$.

База индукции. Для $n=0$ положим $F_0 = E_0 = \emptyset$, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{W}_0 = \{X\}$, $\psi_0(X) = X$ и $f_0(\emptyset) = \emptyset$.

Индуктивный переход. Предположим, что множества F_n и E_n , гомеоморфизм $f_n: F_n \rightarrow E_n$ и KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_n, \mathcal{W}_n, \psi_n \rangle$ для $\langle X \setminus F_n, X \setminus E_n, f_n \rangle$ построены согласно условиям (1)–(6).

Сделаем следующий шаг. Зафиксируем множества $V \in \mathcal{V}_n$ и $W = \psi_n(V) \in \mathcal{W}_n$.

Положим $Y = V \cap X_m$, где m – наименьший индекс, для которого множество $Y \neq \emptyset$. Аналогично, положим $Z = W \cap X_k$, где k – наименьший индекс, для которого множество $Z \neq \emptyset$.

Множество A' всюду плотно в X . Зафиксируем точку $a_i \in V \cap A'$ с наименьшим возможным индексом i . Выберем точку $b_j \in W \cap B'$ с наименьшим возможным индексом j по следующему правилу: $b_j \in B \Leftrightarrow a_i \in A$.

Множество $Y \cup \{a_i\}$ нигде не плотно в V , поэтому существует такое базисное множество $U \in \mathcal{U}$, что $U \subset V$ и $U \cap (Y \cup \{a_i\}) = \emptyset$. Положим $F_V = Y \cup \{a_i\} \cup \varphi_U(Z)$. Аналогично, найдётся базисное множество $U^* \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условиям $U^* \subset W$ и $U^* \cap (Z \cup \{b_j\}) = \emptyset$. Пусть $E_W = Z \cup \{b_j\} \cup \varphi_{U^*}(Y)$. Определим гомеоморфизм $f_V: F_V \rightarrow E_W$ по следующему правилу:

$$f_V(x) = \begin{cases} b_j, & \text{если } x = a_i, \\ \varphi_{U^*}(x), & \text{если } x \in Y, \\ (\varphi_U)^{-1}(x), & \text{если } x \in \varphi_U(Z). \end{cases}$$

По лемме 3 существует KR-покрытие $\langle \mathcal{V}_V, \mathcal{W}_V, \psi_V \rangle$ для $\langle V \setminus F_V, W \setminus E_W, f_V \rangle$.

Несложно проверить, что $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup \{F_V : V \in \mathcal{V}_n\}$ и $E_{n+1} = E_n \cup \bigcup \{E_{\psi_n(V)} : V \in \mathcal{V}_n\}$ – замкнутые нигде не плотные множества в пространстве X . Зададим отображение $f_{n+1}: F_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$ по следующему правилу:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_V(x), & \text{если } x \in F_V \text{ для некоторого } V \in \mathcal{V}_n, \\ f_n(x), & \text{если } x \in F_n. \end{cases}$$

Из построения вытекает, что отображение f_{n+1} является локальным гомеоморфизмом в точках множества $F_{n+1} \setminus F_n$, а из индуктивного предположения и леммы 3 следует, что отображение f_{n+1} является гомеоморфизмом в точках множества F_n .

Семейство $\mathcal{V}_{n+1} = \{U \in \mathcal{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$ образует покрытие множества $X \setminus F_{n+1}$, а семейство $\mathcal{W}_{n+1} = \{\psi_V(U) \in \mathcal{W} : U \in \mathcal{V}_V, V \in \mathcal{V}_n\}$ образует покрытие множества $X \setminus E_{n+1}$. Биекция $\psi_{n+1}: \mathcal{V}_{n+1} \rightarrow \mathcal{W}_{n+1}$ определяется естественным образом: $\psi_{n+1}(U) = \psi_V(U)$, если $U \in \mathcal{V}_V$ для некоторого $V \in \mathcal{V}_n$. Несложно проверить, что биекция ψ_{n+1} согласована с гомеоморфизмом f_{n+1} . Итак, $\langle \mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{W}_{n+1}, \psi_{n+1} \rangle$ образует KR-покрытие для $\langle X \setminus F_{n+1}, X \setminus E_{n+1}, f_{n+1} \rangle$.

Ясно, что все условия (1)–(6) выполняются. Индуктивный переход завершён.

Из условий (1) и (2) следует, что $X = \bigcup \{F_n : n \in \omega\} = \bigcup \{E_n : n \in \omega\}$.

Зададим отображение $f: X \rightarrow X$ по правилу $f(x) = f_n(x)$, если $x \in F_n$ для некоторого n . Это определение корректно в силу условия (4). Более того, f – биекция. По построению, сужение $f|_{F_n}$ является гомеоморфизмом. Из леммы 3 вытекает, что f – гомеоморфизм.

Из условия (3) следует, что $f(A) = B$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2, леммы 1 и леммы 2 вытекает следующая неожиданная характеристика λ -пространств.

Следствие 1. Пусть дано h -однородное несчётное пространство X . Тогда X является λ -пространством тогда и только тогда, когда X – CDH-пространство первой категории.

Следствие 2. Пусть $X = \bigoplus \{X_n : n \in \omega\}$, где каждое X_n является h -однородным несчётным λ -пространством. Тогда X – CDH-пространство.

Установим ещё одно свойство h -однородных λ -пространств.

Теорема 3. Пусть дано h -однородное несчётное λ -пространство X . Тогда X гомеоморфно своему подпространству $X \setminus A$ для любого счётного множества $A \subset X$.

Доказательство. Так как пространство X нигде не счётно, то дополнение $X \setminus A$ является всюду плотным подмножеством в X . Согласно лемме 1, X – пространство первой категории. Тогда [2] дополнение $X \setminus A$ также будет пространством первой категории относительно себя.

Так как пространство X нульмерно, то согласно [6, теорема 7.3.1] существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ дискретных открытых счётных покрытий пространства X , что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X , причём для любого n покрытие $\mathcal{U}_{n+1}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}_n$. По определению h -однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U : X \rightarrow U$.

Рассмотрим счётное множество $A^* = A \cup \bigcup \{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$. Из определения λ -множества следует, что A^* – множество типа G_δ в пространстве X . Несложно проверить, что $X^* = X \setminus A^*$ – всюду плотное множество в пространстве первой категории X ; следовательно, X^* также является множеством первой категории в X . Более того, X^* – множество типа F_σ в пространстве X . Поэтому множество X^* можно представить в виде счётного объединения $X^* = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$ замкнутых (в X) нигде не плотных множеств X_n . Из построения вытекает, что множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X , причём $\varphi_U(X_n) \subset U \setminus A$ для любых $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \omega$.

Применяя лемму 4 из [5], делаем вывод, что любое открытое множество из пространства $X \setminus A$ содержит нигде не плотное замкнутое (относительно $X \setminus A$) подмножество, гомеоморфное пространству X . Тогда по теореме 3 из [5] пространство $X \setminus A$ гомеоморфно h -однородному расширению $h(X, \omega)$ пространства X относительно пространств первой категории. В [5] было показано, что для любого сепарабельного h -однородного пространства X первой категории расширение $h(X, \omega)$ гомеоморфно самому пространству X .

Теорема 3 доказана.

Замечание. Интересно выяснить, останутся ли теоремы 2 и 3 верными для (нульмерных) h -однородных пространств.

Литература

1. Hrusak, M. Countable dense homogeneity of definable spaces / M. Hrusak, B. Zamora Aviles // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 133. – Issue 11. – P. 3429–3435.
2. Куратовский, К. Топология: моногр: в 2 т. / К. Куратовский; пер. с англ. М.Я. Антоновского. – М.: Мир, 1966. – Т.1. – 595 с.
3. Fitzpatrick, Jr. B. Countable dense homogeneity and the Baire property / B. Fitzpatrick Jr., H-X. Zhou // Topology Applic. – 1992. – Vol. 43. – P. 1–14.
4. Hernandez-Gutierrez, R. Countable dense homogeneity and λ -sets / R. Hernandez-Gutierrez, M. Hrusak, J. van Mill // Fund. Math. – 2014. – Vol. 266. – Issue 2. – P. 157–172.
5. Medvedev, S.V. About closed subsets of spaces of first category / S.V. Medvedev // Topology Applic. – 2012. – Vol. 159. – P. 2187–2192.
6. Engelking, R. General Topology / R. Engelking. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 529 p.

Поступила в редакцию 5 июня 2014 г.

h-HOMOGENEOUS λ -SPACES**S.V. Medvedev¹**

Let X be an h -homogeneous separable metrizable uncountable λ -space. Then: 1) X is a CDH-space, 2) X is homeomorphic to $X \setminus A$ for any countable subset A of X .

Keywords: CDH-space; h -homogeneous space; λ -space; homeomorphism.

References

1. Hrusak M., Zamora Aviles B. Countable dense homogeneity of definable spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2005. Vol. 133. Issue 11. pp. 3429–3435.
2. Kuratowski K. *Topologiya: monografiya* (Topology: the monograph). Moscow, Mir Publ., 1966. Vol. 1. 595 pp. (in Russ.). [Kuratowski K. *Topology*. New York and London, Academic Press, 1966. Vol. 1. 560 pp. (in Eng.).]
3. Fitzpatrick Jr.B., Zhou H-X. *Topology Applic.* 1992. Vol. 43. pp. 1–14.
4. Hernandez-Gutierrez R., Hrusak M., van Mill J. Countable dense homogeneity and λ -sets. *Fund. Math.* 2014. Vol. 266. Issue 2. pp. 157–172.
5. Medvedev S.V. About closed subsets of spaces of first category. *Topology Applic.* 2012. Vol. 159. pp. 2187–2192.
6. Engelking R. *General Topology*. Berlin, Heldermann Verlag, 1989. 529 pp.

Received 5 June 2014

¹ Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: medv@math.susu.ac.ru