УДК 501.1

Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$

С. А. Чумаченко

Чумаченко Сергей Алексеевич, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, chumachenkosergei@gmail.com

Первый ортонормированный базис в пространстве непрерывных функций был построен Хааром в 1909 г. Фабер в 1910 г. проинтегрировал систему Хаара и получил первый пример базиса в пространстве непрерывных функций, состоящего из непрерывных функций. Эту систему переоткрыл в 1927 г. Шаудер. Все функции Фабера – Шаудера являются кусочно-линейными, а частичные суммы есть вписанные ломаные. В дальнейшем предпринимались попытки построить гладкие аналоги базиса Фабера – Шаудера. В 1965 г. это удалось К. М. Шайдукову. Построенные им функции были гладкими, но состояли из дуг парабол. Шайдукову удалось доказать равномерную сходимость полученных разложений, но не удалось получить оценки отклонения. Иной аналог системы Фабера – Шаудера в 2007 г. предложили Т. У. Аубакиров и Н. А. Бокаев. Они построили класс функций, которые образуют базис в пространстве непрерывных функций, получили оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции. Построенные в их работе функции были, как и в системе Фабера – Шаудера, кусочно-линейными. Система Фабера – Шаудера входит в построенный ими класс систем. В настоящей статье мы строим гладкие аналоги системы Фабера – Шаудера и получаем оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции. Построенные системы являются системами сжатий и сдвигов одной функции, которую мы называем двоичным базисным сплайном. Каждый такой двоичный базисный сплайн есть интеграл n-го порядка от функции Уолша W_{2^n-1}. Таким образом, нам удалось построить аналоги системы Фабера – Шаудера со сколь угодно большой степенью гладкости и получить для разложений по этим системам оценки отклонения в терминах модулей непрерывности.

Ключевые слова: базисные сплайны, гладкая интерполяция, кратномасштабный анализ.

Поступила в редакцию: 18.12.2019 / Принята: 01.04.2020 / Опубликована: 31.08.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

ВВЕДЕНИЕ

Система Фабера – Шаудера является одним из простейших базисов в пространстве $C[0,1]$. Впервые она встречается в результатах Фабера в 1910 г. [1], в дальнейшем была переоткрыта Шаудером в 1927 г. [2]. Простота представления и широкий спектр базисных и аппроксимационных свойств системы Фабера – Шаудера позволяют решать широкий спектр прикладных задач [3–10]. Т. У. Аубакировым и Н. А. Бокаевым рассмотрена система, включающая в себя систему Фабера – Шаудера [11]. К недостаткам систем Фабера – Шаудера и Аубакирова – Бокаева надо отнести отсутствие гладкости.

Гладкий аналог системы Фабера – Шаудера рассмотрен К. М. Шайдуковым в [12]. Однако в этой работе, хоть и была получена базисность системы в пространстве $C[0,1]$, не были получены оценки скорости приближения.

В данной работе мы построим семейство систем типа Фабера – Шаудера, имеющих заданный порядок гладкости. Также мы докажем базисность этих систем в пространстве $C[0,1]$ и получим оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции в терминах модуля непрерывности.

В первой части статьи вводится двоичный базисный сплайн, который является обобщением системы Фабера – Шаудера с заданным порядком гладкости, и рассматриваются свойства антипериодичности. Во второй части статьи рассматривается система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна и доказывается, что это базис в $C[0,1]$.

1. ДВОИЧНЫЕ БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ

Пусть

$$If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt, \;\; x \in [0,1] \text{ — оператор интегрирования,} \tag{1}$$

$$r_k(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x)) \text{ — функции Радемахера,} \tag{2}$$

$$W_{2^{n-1}}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x) \text{ — функции Уолша.} \tag{3}$$

Тогда функцию

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x), \quad x \in [0,1], \quad n,N \in \mathbb{N}, \quad N \leqslant n,$$

будем называть *двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша*, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$.

На рис. 1 приведен график функции $\psi_{n,N}(x)$. При $N = n-1$ данная система будет базисом Рисса в L_2 [13]. Во второй части статьи будем рассматривать случай $N = n$, но для начала выведем несколько общих свойств для произвольного N.

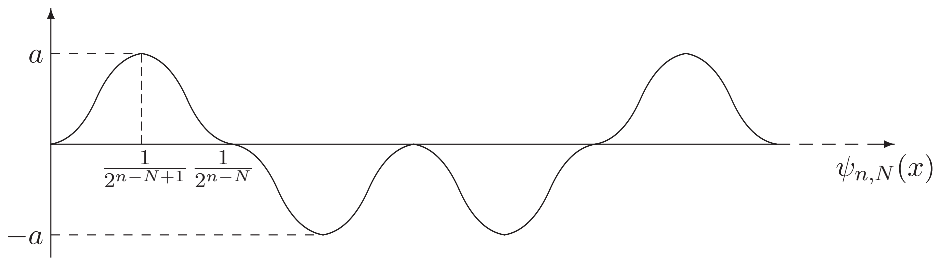

Рис. 1. Двоичный базисный сплайн / Fig. 1. Binary basic spline

Замечание 1. Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно.

Определение 1. Функцию f будем называть *антипериодической на двоичном интервале $\Delta_j^{(n)}$ с периодом $\frac{1}{2^{n+1}}$*, если для любых $x, y \in \Delta_j^{(n)}$, связанных соотношением $x + \frac{1}{2^{n+1}} = y$, справедливо равенство $f(x) = -f(y)$.

Замечание 2. Функция Радемахера r_k периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$ и антипериодична на любом интервале $\Delta_j^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) функция Уолша $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$;

2) функция Уолша $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$, $\nu = 0, 1, \dots, 2^k - 1$;

3) функция Уолша $W_{2^n-1}(x) = r_0 r_1 \dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$, $\nu = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, $k = 0, \dots, n-1$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно из замечания 2. Для доказательства утверждения 2) заметим, что функция $r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ и $r_k(\Delta_{2\nu}^{(k+1)}) = -r_k(\Delta_{2\nu+1}^{(k+1)})$.

Для доказательства утверждения 3) запишем W_{2^n-1} в виде:

$$W_{2^n-1} = r_0 r_1 \dots r_{k-1} r_k \dots r_{n-1}.$$

По доказанному ранее произведение $r_k \dots r_{n-1}$ антипериодично на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$, а произведение $r_0 r_1 \dots r_{k-1}$ постоянно на интервале $\Delta_\nu^{(k)}$. Поэтому W_{2^n-1} антипериодична на $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$. □

Лемма 2. *Пусть I — оператор интегрирования* (1). *Тогда функция $I^N(W_{2^n-1})(x)$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ ($k = 0, \dots, n-1-N$, $N = 0, 1, \dots, n-1$) и $\int\limits_{\Delta_j^{(n-1-N)}} I^N W_{2^n-1}\, dx = 0$.*

Доказательство. Случай $N = 0$ доказан в лемме 1, п. 3. Пусть утверждение леммы верно при некотором N, т. е. $I^N W_{2^n-1}$ антипериодична на всех интервалах $\Delta_\nu^{(k)}$ ($k = 0, \dots, n-1-N$). Зафиксируем k из $[0, n-1-N]$ и покажем, что $I^{N+1} W_{2^n-1}$ антипериодичны в интервалах $\Delta_\nu^{(k-1)}$. Выберем интервал

$$\Delta_\nu^{(k-1)} = \left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right) = \left(\frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k}\right) =$$
$$= \left(\frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+1}{2^k}\right) \bigsqcup \left(\frac{2\nu+1}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k}\right) \bigsqcup \left\{\frac{2\nu+1}{2^k}\right\}.$$

Функция $I^N W_{2^n-1}$ антипериодична на $\Delta_\nu^{(k-1)}$ и на интервалах $\Delta_{2\nu}^{(k)}$ и $\Delta_{2\nu+1}^{(k)}$ по предположению. Тогда при $x \in \left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ имеем

$$(I^{N+1} W_{2^n-1}) \left(\frac{2\nu+1}{2^k} + x\right) = \int\limits_0^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\, dt = \int\limits_{\frac{2\nu+1}{2^k}}^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\, dt =$$
$$= -\int\limits_{\frac{2\nu}{2^k}}^{\frac{2\nu}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{2\nu}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\, dt = -(I^{N+1} W_{2^n-1}) \left(\frac{2\nu}{2^k} + x\right),$$

т. е. $I^{N+1} W_{2^n-1}$ антипериодичны на интервале $\left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right)$. □

Лемма 3. *Функция* $\psi_{n,N}$:
1) равна нулю в точках $\frac{\nu}{2^{n-N}}$;
2) имеет максимум по модулю в точках $\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}}$;
3) знак функции определяется аналогично $W_{2^{n-N}-1}(x)$.

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции.

1. Для $N=0$ все утверждения леммы очевидны, так как $\psi_{n,0}$ является функцией Уолша.

2. Пусть все утверждения верны для $N-1$. Докажем эти утверждения для N.

Согласно лемме 2, $I^N W_{2^n-1}$ антипериодичны на интервале $\left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right)$. Следовательно, знак функции $\psi_{n,N}$ определяется как произведение функций Радемахера $r_0 r_1 \dots r_{n-N-1}$, или согласно функции Уолша $W_{2^{n-N}-1}$. Таким образом, утверждение 3) доказано.

Для того чтобы доказать утверждения 1) и 2), достаточно рассмотреть отрезок $[0, \frac{1}{2^{n-N}}]$, поскольку тогда для остальных отрезков данные утверждения будут получаться из-за антипериодичности.

Так как при $N-1$ на отрезке $[0, \frac{1/2}{2^{n-N}}]$ знак функции $\psi_{n,N-1}$ положителен, то $\psi_{n,N}$ на этом отрезке возрастает. На отрезке $[\frac{1/2}{2^{n-N}}, \frac{1}{2^{n-N}}]$, вследствие антипериодичности, — убывает, причем с такими же значениями производных. Из этого следуют сразу и 1), и 2) утверждения. □

Замечание 3. Согласно определению, $\left|\max\limits_x(\psi(n,N)(x))\right| = 1$, $x\in[0,1]$.

Лемма 4. *Пусть* $\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x)$ $(x\in[0,1])$. *Тогда*

$$\psi_n\left(\frac{4\cdot\nu+1}{4\cdot 2^{n-N}}\right) = \psi_n\left(\frac{4\cdot\nu+3}{4\cdot 2^{n-N}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3 и замечанию 3, $\left|\psi_{n,N}\left(\frac{2\cdot\nu+1}{2\cdot 2^{n-N}}\right)\right| = 1$. С другой стороны,

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{2\cdot\nu+1}{2\cdot 2^{n-N}}\right)\right| = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}\left(2^n\cdot\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Согласно лемме 2, $\psi'_{n,N}$ будет антипериодична на интервале $[\frac{2\nu}{2^{n-N}}, \frac{2\nu+2}{2^{n-N}}]$, а $\psi''_{n,N}$ — на интервале $[\frac{2\nu}{2^{n-N}}, \frac{2\nu+1}{2^{n-N}}]$. Тогда

$$\int\limits_{\frac{4\nu}{4\cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4\cdot 2^{n-N}}} \left(I^{N-2}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt = -\int\limits_{\frac{4\nu}{4\cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4\cdot 2^{n-N}}} \left(I^{N-2}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\psi_{n,N}\left(\frac{2\cdot\nu+1}{2\cdot 2^{n-N}}\right) = Q(n,N)\int\limits_{\frac{4\nu}{4\cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+2}{4\cdot 2^{n-N}}} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt =$$

$$= 2\cdot Q(n,N)\int\limits_{\frac{4\nu}{4\cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4\cdot 2^{n-N}}} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt = 2\psi_{n,N}\left(\frac{1}{4\cdot 2^{n-N}}\right).$$

Таким образом, $\psi_{n,N}\left(\frac{1}{4\cdot 2^{n-N}}\right) = \frac{1}{2}$.

Аналогично показывается, что $\psi_{n,N}\left(\frac{3}{4\cdot 2^{n-N}}\right) = \frac{1}{2}$. □

Теорема 1. *Нормирующий коэфициент вычисляется следующим образом:*

$$Q(n,N) = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}, \quad 1 \leqslant N \leqslant n. \tag{4}$$

Доказательство. Разберем два случая.

1. «Первое» интегрирование — интегрирование n-й производной функции $\psi_n(x)$, т. е. самой функции Уолша. На каждом отрезке функция равна либо 1, либо -1, а длина каждого отрезка равна $\frac{1}{2^n}$. Значит, значение функции в точке $\frac{1}{2^n}$ будет равно $\frac{1}{2^n}$. Аналогично и в остальных точках вида $\frac{i}{2^n}$ оно будет равно либо $\frac{1}{2^n}$, либо 0, либо $-\frac{1}{2^n}$. Но нам необходимо, чтобы после каждого интегрирования значение в точках локального максимума (минимума) было равно 1 (-1). Значит, нормирующий коэффициент после первого интегрирования должен быть $Q(n,1) = 2^n$. Если в формулу (4) поставить $N=1$, мы также получим $Q(n,1) = 2^n$.

2. Каждое последующее интегрирование: пусть мы проводим i-е интегрирование, т. е. от функции $\psi_n^{(n-i+1)}(x)$ переходим к функции $\psi_n^{(n-i)}(x)$. В отличие от первого случая, функция не является кусочно-постоянной. Однако, по лемме 3, значение функции будет равно $\frac{1}{2}$ в точках $x = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2^{n-i+1}}\right)$ и $x = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2^{n-i+1}}\right)$. Используя свойство антипериодичности (лемма 2), получаем, что $\psi(x) = 1 - \psi\left(\frac{1}{2} - x\right)$. Следовательно, среднее значение функции на отрезке $\left[0, \frac{1}{2^{n-i+1}}\right]$ равно $\frac{1}{2}$. Значит, значение функции $\psi_n^{(n-i)}(x)$ в точке $x = \frac{1}{2^{n-i+1}}$ будет равно $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-i+1}}$. Но аналогично п. 1 оно должно быть равно единице, поэтому нормирующий коэффициент после второго и каждого последующего интегрирования должен быть $Q(n,i) = Q(n,i-1)\cdot 2^{n-i+2}$.

Отсюда находим

$$Q(n,N) = 2^n \cdot \prod_{i=2}^{N} 2^{n-i+2} = 2^{n+\sum_{i=2}^{n}(n-N+2)} =$$
$$= 2^{n+(N-1)\frac{2+2\cdot n-N}{2}} = 2^{n+\frac{2nN+2N-N^2-2-2\cdot n+N}{2}} = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}. \qquad \square$$

2. СИСТЕМА СЖАТИЙ И СДВИГОВ ДВОИЧНОГО БАЗИСНОГО СПЛАЙНА В $C[0,1]$

Определение 2. Функцию $\psi_n(x) = Q(n,n)I^n W_{2^n-1}(x)$, $x \in [0,1]$, будем называть *двоичным базисным сплайном n-й степени*, где $Q(n,n)$ — нормирующий коэффициент в $C[0,1]$.

Замечание 4. При $n=1$ двоичный базисный сплайн $\psi_n(x)$ совпадает с точностью до множителя с образующей функцией системы Фабера – Шаудера.

Покажем, что система сжатия и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в $C_0[0,1]$ (этот факт без доказательства в случае $n=2$ присутствует в работе [14]), а при добавлении двух дополнительных функций — в $C[0,1]$.

Рассмотрим систему

$$\phi_{m,j}(x) = \psi_n(2^m x - j), \quad m \in Z_0, \quad j \in [0, 2^m - 1].$$

Пусть $f(x)$ — функция из $C_0[0,1]$. Обозначим

$$R_0(x) = f(x), \tag{5}$$

$$S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x),\ \ x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right], \tag{6}$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x). \tag{7}$$

На рис. 2 изображен процесс приближения, где R_m, R_{m+1} — график остатка после m-го и $(m+1)$-го шага соответственно, $\phi_{m,j}$ — сжатие и сдвиг основной базисной функции, S_m — приближение на m-м шаге, которое строится не по частичным суммам ряда, а по остаткам.

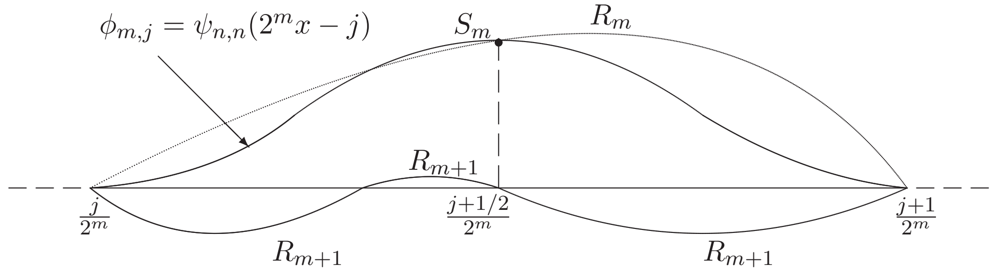

Рис. 2. Процесс приближения по остаткам
Fig. 2. Approximation process by residual

Определение 3. Назовем *модулем непрерывности* выражение

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}(f(x+h) - f(x)), \quad x \in [0, 1-h], \tag{8}$$

модулем непрерывности второго порядка (*модулем гладкости*) —

$$\omega_f^2(\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)), \quad x \in [0, 1-2h]. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $\phi_{m,j}(x)$ — базис в $C_0[0,1]$. Имеет место следующая оценка через модуль непрерывности:*

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|$$

(*здесь и далее используется норма в $C_0[0,1]$*).

Доказательство. Для начала докажем

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| = |R_{m+1}(x)|\,. \tag{10}$$

В самом деле, используя (5) и (7), получим

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| = \left|R_0(x) - S_0(x) - \sum_{i=1}^{m} S_i(x)\right| =$$

$$= R_1(x) - S_1(x) - \sum_{i=2}^{m} S_i(x) = \dots = R_{m+1}(x).$$

Теперь докажем

$$R_{m+1}(x) \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

Пусть $j \in [0, 2^n - 1]$. Определим модуль двоичной непрерывности

$$\widetilde{\omega}_{f,n} = \sup_j \left| f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|$$

и модуль двоичной непрерывности второго порядка при $j \in [0, 2^n - 2]$

$$\widetilde{\omega}^2_{f,n} = \sup_j \left| f\left(\frac{j+2}{2^n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) + f\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|. \tag{11}$$

По построению очевидно, что $R_m\left(\frac{j}{2^m}\right) = 0$. Из (6) и (7) следует

$$R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) = R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) - S_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) =$$
$$= R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) - \left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right) + R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\phi_{m,j}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right).$$

Учитывая, что $\phi_{m,j}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) = \frac{1}{2}$, получаем

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2}\left(2R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) - \left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right) + R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2} + 1/4\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}. \tag{13}$$

В самом деле, используя (12), имеем

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(2R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) - \left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right) + R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\sup_j\left|2R_{m-1}\left(\frac{4j+1}{2^{m+2}}\right) - \left(R_{m-1}\left(\frac{4j+2}{2^{m+2}}\right) + R_{m-1}\left(\frac{4j}{2^{m+2}}\right)\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \sup_j\left|2S_{m-1}\left(\frac{4j+1}{2^{m+2}}\right) - \left(S_{m-1}\left(\frac{4j+2}{2^{m+2}}\right) + S_{m-1}\left(\frac{4j}{2^{m+2}}\right)\right)\right|\right).$$

Учитывая, что

$$S_{m-1}\left(\frac{4j+1}{2^{m+2}}\right) = R_{m-1}\left(\frac{j\ \mathrm{div}\ 2 + \frac{1}{2}}{2^{m-1}}\right)\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+1}{2^{m+2}}\right),$$

$$S_{m-1}\left(\frac{4j+2}{2^{m+2}}\right)=R_{m-1}\left(\frac{j\ \mathrm{div}\ 2+\frac{1}{2}}{2^{m-1}}\right)\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+2}{2^{m+2}}\right),$$
$$S_{m-1}\left(\frac{4j+0}{2^{m+2}}\right)=R_{m-1}\left(\frac{j\ \mathrm{div}\ 2+\frac{1}{2}}{2^{m-1}}\right)\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+0}{2^{m+2}}\right),$$

получаем

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}\leqslant\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2}+\left|R_{m-1}\left(\frac{j\ \mathrm{div}\ 2+\frac{1}{2}}{2^{m-1}}\right)\right|\times$$
$$\times\left|2\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+1}{2^{m+2}}\right)-\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+2}{2^{m+2}}\right)-\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{4j+0}{2^{m+2}}\right)\right|.$$

Последнюю сумму, стоящую под модулем, записываем в виде

$$\left|2\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{\frac{j}{2}+\frac{1}{8}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{\frac{j}{2}+\frac{1}{4}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,j\ \mathrm{div}\ 2}\left(\frac{\frac{j}{2}}{2^{m-1}}\right)\right|. \tag{14}$$

Рассмотрим 2 случая.

1. Пусть j четное, т. е. $j=2k$. Тогда выражение (14) принимает вид

$$\left|2\phi_{m-1,k}\left(\frac{k+\frac{1}{8}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,k}\left(\frac{k+\frac{1}{4}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,k}\left(\frac{k}{2^{m-1}}\right)\right|. \tag{15}$$

Из леммы 4 следует

$$\phi_{m-1,k}\left(\frac{k+\frac{1}{4}}{2^{m-1}}\right)=\frac{1}{2}. \tag{16}$$

Так как функция $\phi_{m-1,0}$ является выпуклой на отрезке $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, то

$$\phi_{m-1,k}\left(\frac{k+\frac{1}{8}}{2^{m-1}}\right)=d\leqslant\frac{1}{4}. \tag{17}$$

Тогда выражение под знаком модуля в (15) равно $4d-\frac{1}{2}$ и для него выполняется неравенство

$$-\frac{1}{2}\leqslant 4d-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{18}$$

2. Пусть j нечетное, т. е. $j=2k+1$. Тогда выражение (14) принимает вид

$$\left|2\phi_{m-1,k}\left(\frac{\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{8}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,k}\left(\frac{\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{4}}{2^{m-1}}\right)-\phi_{m-1,k}\left(\frac{\frac{2k+1}{2}}{2^{m-1}}\right)\right|. \tag{19}$$

Из (16) и (17) следует, что выражение под знаком модуля в (19) равно $2(1-d)-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}-2d$ и для него выполняется неравенство

$$0\leqslant\frac{1}{2}-2d\leqslant\frac{1}{2}. \tag{20}$$

Из (18) и (20) следует

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}\leqslant\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2}+\frac{1}{2}\left|R_{m-1}\left(\frac{j\ div\ 2+1/4}{2^{m-1}}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}=\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2}+\frac{1}{4}\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m},$$

что доказывает неравенство (13).

Покажем, что при всех $t \geqslant 2$

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{4^{t-1}} \cdot \widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}. \tag{21}$$

В самом деле, из (11)

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} = \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2R_m\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \left(R_m\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + R_m\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right|.$$

Применив (7), получим

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leqslant \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2R_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \left(R_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + R_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right| +$$
$$+ \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2S_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \left(S_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + S_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right|.$$

Теперь используем (6):

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leqslant \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2R_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \left(R_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + R_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right| +$$
$$+ \sup_{j\in[0,2^n-2]} \Bigg| \Bigg(2\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \Bigg(\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) +$$
$$+\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\Bigg)\Bigg) R_{m-1}\left(\frac{j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}\right)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \widetilde{\omega}^2_{(\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}),m+t} \cdot \left| R_{m-1}\left(\frac{j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}\right)\right|.$$

Далее для оценки $\omega^2_{(\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}),m+t}$ снова применим (11):

$$\omega^2_{(\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}),m+t} =$$
$$= \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{k+2}{2^{m+t}}\right) - 2\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{k+1}{2^{m+t}}\right) + \phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}\left(\frac{k}{2^{m+t}}\right)\right| =$$
$$= \sup_{k\in[0,2^n-2]} \Bigg| \psi_n\left(2^{m-1}\frac{k+2}{2^{m+t}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right) - 2\psi_n\left(2^{m-1}\frac{k+1}{2^{m+t}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right) +$$
$$+\psi_n\left(2^{m-1}\frac{k}{2^{m+t}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right)\Bigg| =$$
$$= \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \psi_n\left(\frac{k+2}{2^{t+1}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right) - 2\psi_n\left(\frac{k+1}{2^{t+1}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right) + \psi_n\left(\frac{k}{2^{t+1}} - j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}\right)\right|.$$

Учитывая, что $k \in [0, 2^n - 2]$, $j \in [0, 2^n - 2]$, $k,\ j \in \mathbb{Z}_0$, имеем

$$\omega^2_{(\phi_{m-1,j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}),m+t} = \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \psi_n\left(\frac{k+2}{2^{t+1}}\right) - 2\psi_n\left(\frac{k+1}{2^{t+1}}\right) + \psi_n\left(\frac{k}{2^{t+1}}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]} \left| \psi_n\left(x + \frac{2}{2^{t+1}}\right) - 2\psi_n\left(x + \frac{1}{2^{t+1}}\right) + \psi_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2^{t+1}}\right)^2 \cdot \sup_{x\in[0,1]} |\psi''_n(x)|.$$

Стоит отметить, что при $n=2$ в точках $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ второй производной не существует, однако существуют вторые производные слева и справа, и этого вполне достаточно. Следовательно, данное доказательство справедливо для $n \geqslant 2$.

Согласно теореме 1,

$$\sup_{x\in[0,1]} |\psi_n''(x)| = \sup_{x} \left|\psi_{n,n}''(x)\right| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-2)} \sup_{x\in[0,1]} |\psi_{n,n-2}(x)| = \\ = \frac{2^{\frac{n^2+3n-2}{2}}}{2^{\frac{n^2+3n-12}{2}}} \cdot |\psi_{n,n-2}(x)| = 2^5 \, |\psi_{n,n-2}(x)| \, .$$

Согласно замечанию 3, $|\psi_{n,n-2}(x)| \leqslant 1$. Тогда

$$\widetilde{\omega}^2_{(\phi_{(m-1),j\,\mathrm{div}\,2^{t+1}}),m+t} \leqslant \left(\frac{1}{2^{t+1}}\right)^2 2^5 \leqslant \frac{1}{2^{2t-3}}. \tag{22}$$

В свою очередь,

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{2^{2t-3}} \left| R_{m-1}\left(\frac{j\,\mathrm{div}\,2^t + 1/4}{2^{m-1}}\right)\right|. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{2^{2t-2}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m} = \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{4^{t-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m},$$

и неравенство (21) доказано.

Вернемся к неравенству (12):

$$\left| R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}.$$

Учитывая (13), получим

$$\left| R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2} + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}\right).$$

Преобразуем его с помощью неравенства (21):

$$\left| R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m+2} + \frac{1}{16}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1}\right) + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}\right) = \\ = \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m+2} + \frac{1}{8}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m} + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1}.$$

На следующем шаге преобразуем все слагаемые с индексом R_{m-2}

$$\left| R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m+2} + \frac{1}{64}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}\right) + \frac{1}{8}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m} + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}\right) + \\ + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1} = \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m+2} + \frac{1}{8}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m} + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1} + \frac{1+4}{128}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}.$$

Покажем с помощью метода математической индукции, что после k-го шага последнее неравенство примет вид

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + C_k\omega^2_{R_{m-k-2},m-k}\right), \tag{24}$$

где

$$C_{-2}=1, \quad C_{-1}=0, \quad C_k=\frac{1}{4}(C_{k-1}+C_{k-2}). \tag{25}$$

Пусть при $k-1$ справедливо

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1},m-t} + C_{k-1}\omega^2_{R_{m-(k-1)-2},m-(k-1)}\right). \tag{26}$$

Выполним преобразование (26) с помощью неравенства (21):

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-2} C_t\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1-1},m-t} + \frac{1}{4^{m-t-(m-(k-1)-1)-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1-2},m-(k-1)-1}\right)+\right.$$

$$\left.+C_{k-1}\omega^2_{R_{m-(k-1)-2},m-(k-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + \frac{1}{4^{k-t-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-2},m-k}\right) + C_{k-1}\omega^2_{R_{m-k-1},m-k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + C^*_k\omega^2_{R_{m-k-2},m-k}\right),$$

где

$$C^*_k = \sum_{t=-2}^{k-2}\frac{1}{4^{k-t-1}}C_t = \frac{1}{4}\sum_{t=-2}^{k-3}\frac{1}{4^{(k-1)-t-1}}C_t + \frac{1}{4}C_{k-2} = \frac{1}{4}\left(C_{k-1}+C_{k-2}\right),$$

т. е. $C^*_k = C_k$. Неравенство (24) доказано.

В итоге после $k=m-2$ шагов имеем

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-3} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t} + C_{m-2}\omega^2_{R_0,2}\right). \tag{27}$$

Слагаемые вида $\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t}$ мы можем переписать с помощью неравенства (23) следующим образом:

$$\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{R_0,m-t} + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}}\left|R_0\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-1}+\frac{1}{2}}{2}\right)\right|.$$

Но $R_0=f$, следовательно,

$$\widetilde{\omega}^2_{R_1,(m-t)} \leqslant \widetilde{\omega}^2_{f,(m-t)} + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}}\|f\| = \widetilde{\omega}^2_{f,(m-t)} + \frac{1}{2^{2(m-t)-5}}\|f\|. \tag{28}$$

Подставим (28) в (27), получим

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t\widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + \sum_{t=-2}^{m-3}\frac{C_t}{2^{2(m-t)-5}}\|f\|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t\widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + 8\|f\|\sum_{t=-2}^{m-3}\frac{C_t}{4^{m-t-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t\widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + 8\|f\|C_{m-1}\right). \qquad (29)$$

Таким образом, в двоично-рациональных точках получена предварительная оценка через модуль двоичной непрерывности.

Теперь возьмем произвольный x из $\varepsilon = \frac{1}{2^{(m+2)}}$ — окрестности точки $\frac{j+1/4}{2^m}$. Тогда

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \left|R_{m+1}(x) - R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) + R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|R_{m+1}(x) - R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| + \left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right|. \qquad (30)$$

Учитывая (10), неравенство (30) примет вид

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \left|\left(f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right) - \left(f\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) - \sum_{i=0}^{m} S_i\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right)\right| +$$

$$+\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| + \sum_{i=0}^{m}\left|S_i(x) - S_i\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| + \left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right|. \qquad (31)$$

Оценим второе слагаемое в (31). Заметим, что если $x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1/2}{2^m}\right]$, то $x \in \left[\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}}{2^i}, \frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+1}{2^i}\right]$. Учитывая (6) и равенство

$$\sup_{x\in[0,1]}|\psi_n'(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\psi_{n,n}'(x)\right| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)}\sup_{x\in[0,1]}|\psi_{n,n-1}(x)|,$$

имеем

$$\sum_{i=0}^{m}\left|S_i(x) - S_i\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{m}\left|R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\phi_{i,j\operatorname{div}2^{m-i}}(x) -\right.$$

$$\left. -R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\phi_{i,j\operatorname{div}2^{m-i}}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\left|\left(\phi_{i,j\operatorname{div}2^{m-i}}(x) - \phi_{i,j\operatorname{div}2^{m-i}}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right)R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\left|\psi_n\left(2^ix - j\operatorname{div}2^{m-i}\right) - \psi_n\left(2^i\left(\frac{j+1/4}{2^m} - j\operatorname{div}2^{m-i}\right)\right)\cdot R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)}\sup_{x\in[0,1]}|\psi_{n,n-1}(x)|\cdot\left|2^i\left(x - \frac{j+\frac{1}{4}}{2^m}\right)\right|\cdot\left|R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{4}{2^{m-i+2}}\left|R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right) \leqslant \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}}\left|R_i\left(\frac{j\operatorname{div}2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right). \qquad (32)$$

Подставим (32) в (31)

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| + \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}}\cdot\left|R_{(i-1)+1}\left(\frac{2\,(j \operatorname{div} 2^{m-i}) + \frac{1}{4}}{2^{(i-1)}}\right)\right|\right) + \\ + \left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right|. \quad (33)$$

Из определения модуля гладкости в (9) и определения модуля двоичной непрерывности второго порядка в (11) очевидно, что $\widetilde{\omega}^2_{f,m} \leqslant \omega^2_f\left(\frac{1}{2^m}\right)$. Первое слагаемое оценим с помощью (8). Второе и третье слагаемые содержат только двоично-рациональные точки, оценка для которых получена в (29).

Тогда (33) примет вид

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{i-2} C_t\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i-t}}\right) + 8\|f\|C_{i-1}\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 8\|f\|C_{m-1}\right) = \\ = \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{t=-2}^{i-2}\frac{C_t}{2^{m+1-i}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i-t}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}}\|f\| + \sum_{t=-2}^{m-2}\frac{C_t}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + \\ + 4C_{m-1}\|f\| = \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t_1=-2}^{m-2}\sum_{i_1=t_1+2}^{m}\frac{C_{t_1}}{2^{m+1-i_1}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i_1-t_1}}\right) + \\ + \sum_{t=-2}^{m-2}\frac{C_t}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}} + 4C_{m-1}\right)\|f\|. \quad (34)$$

Произведем замену переменных в двойной сумме в (34). Пусть $m - t = i_1 - t_1$, $i = m - i_1$. Так как $i_1 - t_1 \geqslant 2$, $i_1 - t_1 \leqslant m + 2$, то $-2 \leqslant t \leqslant m - 2$. С другой стороны, $m + t_1 - i_1 \geqslant -2 + m - i_1$, а значит, $i \leqslant t + 2$. Так как $i_1 \leqslant m$, то $i \geqslant 0$. Окончательно получим

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}\left(\sum_{i=0}^{t+2}\frac{C_{t-i}}{2^{i+1}} + \frac{C_t}{2}\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + \\ + \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{C_{m-i-1}}{2^{i-2}} + 4C_{m-1}\right)\|f\|. \quad (35)$$

Покажем с помощью метода математической индукции, что для всех $k \geqslant -2$

$$C_k \leqslant 2^{-\frac{3}{5}k}. \quad (36)$$

Из (25) для $k = -2$ и $k = -1$ имеем

$$1 = C_{-2} \leqslant 2^{\frac{6}{5}}, \quad 0 = C_{-1} \leqslant 2^{\frac{3}{5}}.$$

Пусть утверждение доказано для $k - 2$ и $k - 1$, следовательно,

$$C_{k-2} \leqslant 2^{-\frac{3}{5}(k-2)}, \quad C_{k-1} \leqslant 2^{-\frac{3}{5}(k-1)}.$$

Пользуясь неравенством (25),

$$C_k = \frac{1}{4}\left(C_{k-2}+C_{k-1}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(2^{-\frac{3}{5}(k-2)}+2^{-\frac{3}{5}(k-1)}\right) \leqslant 2^{-\frac{3}{5}k}\left(\frac{2^{\frac{6}{5}}+2^{\frac{3}{5}}}{4}\right) \leqslant 2^{-\frac{3}{5}k},$$

что доказывает неравенство (36).

Из (35) и (36) получим

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}\left(\sum_{i=0}^{t+2}\frac{2^{-\frac{3}{5}(t-i)}}{2^{i+1}} + 2^{-\frac{3}{5}t-1}\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + $$
$$+\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{2^{-\frac{3}{5}(m-i-1)}}{2^{i-2}} + 2^{2-\frac{3}{5}(m-1)}\right)\|f\| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}2^{-\frac{3}{5}t-1}\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}}+1\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}}+1\right)\|f\| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{5}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2}2^{-\frac{3}{5}t-1}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\|f\|\right). \tag{37}$$

При больших t модуль гладкости

$$\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) = \left|f\left(x+\frac{2}{2^{m-t}}\right) - 2f\left(x+\frac{1}{2^{m-t}}\right) + f(x)\right|$$

нельзя оценить лучше, чем $4\|f\|$. Однако при таких значениях t коэффициенты C_t будут малы. С другой стороны, когда C_t недостаточно малы, модуль двоичной непрерывности $\widetilde{\omega}^2_{f,m-t}$ становится достаточно мал из-за величины интервала разбиения. Перепишем (37) следующим образом:

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{5}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k}2^{-\frac{3}{5}t-1}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-k}}\right) + \sum_{t=k+1}^{m-2}2^{-\frac{3}{5}t-1}4\|f\| + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\|f\|\right) \tag{38}$$

и выберем $k = m \operatorname{div} 2 - 1$. Следовательно, (38) будет иметь вид

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{2^{\frac{1}{5}}}{1-2^{-\frac{3}{5}}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}}\right) + \left(2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2+1} + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\right)\|f\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|, \tag{39}$$

или, подставив в (39) $m \operatorname{div} 2 \geqslant \frac{m-1}{2}$,

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

Теперь необходимо доказать, что разложение в ряд по системе единственно. Возьмем произвольную функцию $f_0(x) \in C_0[0,1]$. Рассмотрим двоично-рациональную точку $\frac{1}{2}$. В этой точке $f_0(x)$ принимает произвольное значение. Единственная функция из системы $\phi_{m,j}(x)$, коэффициент которой не определен в этой точке и которая не равна нулю, — $\phi_{0,0}(x)$. Следовательно, $f_0(x)$ должна быть приближена с помощью коэффициента при $\phi_{0,0}(x)$. Таким образом, коэффициент при $\phi_{0,0}(x)$ определяется однозначно. Далее рассмотрим точки $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. В каждой из этих точек из системы $\phi_{m,j}(x)$ существует ровно одна функция, не равная нулю в этой точке и коэффициент которой не был определен ранее (соответственно $\phi_{1,0}(x)$ и $\phi_{1,1}(x)$). Продолжая далее данный процесс, заметим, что для каждой двоично-рациональной точки существует ровно одна функция, коэффициент которой не был определен на предыдущих шагах, и при этом отличная от нуля в этой двоично-рациональной точке. Таким образом, коэффициенты каждой функции при разложении в ряд определяются однозначно.

Для того чтобы система была базисом в $[0,1]$, дополним ее следующими функциями: $\phi_{-1,1} = \psi_{n,N}(2x) \quad (x \in [0, \frac{1}{2}])$ и $\phi_{-1,0} = \psi(2x-1) \quad (x \in [\frac{1}{2}, 1])$. Приблизив произвольную функцию $f(x) \in C[0,1]$, соответственно, $\phi_{-1,0}$ в $x = 0$ и $\phi_{-1,1}$ в $x = 1$, получим произвольную функцию $f_0(x) \in C_0[0,1]$ $\square$

Библиографический список

1. *Faber G.* Uber die ortogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch Math. Verein. 1910. Vol. 19. P. 104–112.
2. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Fimktionalraumen // Math. Z. 1927. Bd. 26. P. 47–65.
3. *Матвеев В. А.* О рядах по системе Шаудера // Матем. заметки. 1967. Т. 2, вып. 3. С. 267–278.
4. *Ciesielski Z.* Some properties of Schauder basis of space C[0, 1] // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1960. Vol. 3. P. 141–144.
5. *Бочкарев С. В.* О рядах по системе Шаудера // Матем. заметки. 1968. Т. 4, вып. 4. С. 453–460.
6. *Ульянов П. Л.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера // Матем. заметки. 1970. Т. 7, вып. 4. С. 431–442.
7. *Сабурова Т. Н.* Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера – Шаудера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, вып. 2. С. 401–422.
8. *Горячев А. П.* О коэффициентах Фурье по системе Фабера – Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 15, вып. 2. С. 341–352.
9. *Абрамова В. В.* О системе Фабера – Шаудера на треугольнике // Математика. Механика. 2015. Вып. 17. С. 3–6.
10. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды : М. : АФЦ, 1999. 550 с.
11. *Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А.* О новом классе систем функций типа Фабера – Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 82, вып. 5. С. 643–651. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm3840
12. *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Учен. зап. Казан. ун-та. 1965. Т. 125, № 2. С. 133–142.
13. *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Матем. заметки. 2018. Т. 103, вып. 6. С. 863–874. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11654
14. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань, 2016. Т. 53. С. 163–164.

Образец для цитирования:

Чумаченко С. А. Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

Smooth Approximations in $C[0, 1]$

S. A. Chumachenko

Sergei A. Chumachenko, https://orcid.org/0000-0001-7088-3740, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, chumachenkosergei@gmail.com

The first orthonormal basis in the space of continuous functions was constructed by Haar in 1909. In 1910, Faber integrated the Haar system and obtained the first basis of continuous functions in the space of continuous functions. Schauder rediscovered this system in 1927. All functions of Faber – Shauder are piecewise linear, and partial sums are inscribed polygons. There was many attempts to build smooth analogues of the Faber – Schauder basis. In 1965, K. M. Shaidukov succeeded. The functions he constructed were smooth, but consisted of parabolic arcs. Shaidukov proved the uniform convergence of the obtained expansions, but failed to obtain deviation estimates. Another analogue of the Faber – Schauder system was proposed by T. U. Aubakirov and N. A. Bokaev in 2007. They built a class of functions that form a basis in the space of continuous functions, obtained estimates of the deviation of partial sums from the approximated function. The functions constructed were piecewise linear, as in the Faber – Schauder system. We construct smooth analogues of the Faber – Schauder system and obtain estimates of the deviation of partial sums from the approximate function. Those are systems of compressions and shifts of a single function, which we call the binary basic spline. The binary basic spline is an integral of the n-th order of the Walsh function W_{2^n-1}. Thus, we were able to construct analogues of the Faber – Schauder system with a large degree of smoothness and obtain deviations in terms of module of continuity.

Keywords: basic splines, smooth interpolation, multi-scale analysis.

Received: 18.12.2019 / Accepted: 01.04.2020 / Published: 31.08.2020

References

1. Faber G. Uber die ortogonalenfunctionen des Herrn Haar. *Jahresber. Deutsch Math. Verein.*, 1910, vol. 19, pp. 104–112.
2. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Fimktionalraumen. *Math. Z.*, 1927, Bd. 26, pp. 47–65.
3. Matveev V. A. On Schauder system series. *Math. Notes*, 1967, vol. 2, iss. 3, pp. 646–652. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01094054
4. Ciesielski Z. Some properties of Schauder basis of space C[0, 1]. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1960, vol. 3, pp. 141–144.
5. Bochkarev S. V. Series with respect to the Schauder system. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, iss. 4, pp. 763–767. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01093716
6. Ulianov P. L. On series with respect to a Schauder system. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, iss. 4, pp. 261–268. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01151699
7. Saburova T. N. Composite functions and their series in the Faber – Schauder system. *Math. USSR-Izv.*, 1972, vol. 6, iss. 2, pp. 395–415. DOI: https://doi.org/10.1070/IM1972v006n02ABEH001879
8. Goryachev A. P. The Fourier coefficients with respect to the Faber – Schauder system. *Math. Notes*, 1974, vol. 15, iss. 2, pp. 192–198. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02102406
9. Abramova V. V. Faber – Schauder system on the triangular mesh. *Mathematics. Mechanics*, 2015, iss. 17, pp. 3–6 (in Russian).

10. Kashin B. S., Saakian A. A. *Ortogonal'nye riady* [Ortogonal series]. Moscow, AFC, 1999. 550 p. (in Russian).
11. Aubakirov T. U., Bokaev N. A. On a new class of function systems of Faber – Schauder type. *Math. Notes*, 1974, vol. 82, iss. 5, pp. 643–651. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434607110016
12. Shaidukov K. M. Parabolic basis in continuos function space. *Uchenie zapiski Kazanskogo universiteta*, 1965, vol. 125, no. 2, pp. 133–142 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.4213/mzm3840
13. Lukomskii S. F., Terekhin P. A., Chumachenko S. A. Rademacher Chaoses in Problems of Constructing Spline Affine Systems. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, iss. 6, pp. 919–928. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434618050280
14. Chumachenko S. A. One analogue of Faber – Schauder system. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni Lobachevskogo*. Kazan, 2016, vol. 53, pp. 163–164 (in Russian).

Cite this article as:

Chumachenko S. A. Smooth Approximations in $C[0,1]$. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 326–342 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342