УДК 514.7

ГЕНИАЛЬНОЕ НАСЛЕДИЕ СОФУСА ЛИ

М. Рахула

Аннотация

Описываются этажи T^kM, сектор-расслоения и теория секторных форм по Уайту. Итерацией касательного функтора T строятся касательные группы T^kG. Изучаются инварианты групповых операторов, их преобразование при симметриях и устойчивость. Используемым в работе аппаратом является исчисление Ли – Картана.

Ключевые слова: струи, касательный функтор, этаж, касательная группа, устойчивость инвариантов.

Введение

Имеются два подхода к математическому описанию мира. Это объясняется двойственностью объекта исследования и двойственностью самой природы. А. Пуанкаре, комментируя дискуссию, состоявшуюся между Ньютоном и Лейбницем, писал[1]: «Современным математикам трудно понять противоречия, волновавшие наших предшественников при создании инфинитезимального исчисления. Можно ли понять, почему два великих геометра, которые владели этим аппаратом более искусно, чем кто-либо до них, впадали в мистику и замешательство? Нам представляется, что подходы Ньютона и Лейбница совпадают, а если говорить о различиях, то они, скорее всего, сводятся лишь к различным обозначениям в их методе». На самом деле противоречия существуют объективно. Теперь, спустя три столетия, мы понимаем, что действительная причина заключается в дуальности структур. Одно и то же дифференциальное уравнение (ДУ) может быть истолковано двояко. Например, ДУ $r'' + r = 0$, где r – радиус-вектор точки, описывает в репере (r, r') эллиптическую траекторию $r_t = r\cos t + r'\sin t$, в то время как это же ДУ $f'' + f = 0$, где f – скалярное (тензорное) поле и штрих означает производную Ли относительно векторного поля X, описывает пульсацию поля $f_t = f\cos t + f'\sin t$. В одном истолковании имеем траекторию частицы, а в другом – состояние поля. Подобные ситуации встречаются часто, и ныне их можно свести в единое *исчисление Ли – Картана.* Эли Картан строил геометрию с помощью дифференциальных форм и внешнего дифференцирования[2], в то время как в теории Софуса Ли преобладает идея *линеаризации* процесса. Поток в сплошной среде характеризуется векторным полем или, по терминологии Ли, инфинитезимальным преобразованием[3]. «Софус Ли заложил основы общей теории непрерывных групп с инфинитезимальной точки зрения и показал ее важность многочисленными приложениями к геометрическим вопросам и к дифференциальным уравнениям», – пишет Г. Вейль[4]. Что касается линеаризации, то теперь мы имеем весьма общую, но простую схему[5]: сущность *дифференциальных продолжений* раскрывается в структуре многократных расслоений и итерациях касательного

[1]См. [1], Приложение, гл. 2.
[2]Метод Картана описан, например, в книгах [2, 3].
[3]Теория Ли и приложения были достаточно полно изложены в [4].
[4]См. в книге [5, с. 47].
[5]Имеется литература [6–12].

функтора T. При итерациях функтора T многообразию M ставятся в соответствие его *этажи* T^kM, а отображению $f : M_1 \to M_2$ – ***морфизмы этажей*** $T^kf : T^kM_1 \to T^kM_2$, $k = 1, 2, \dots$ Элемент этажа T^kM, касательный вектор к этажу $T^{k-1}M$, трактуется как стоп-кадр движения k-го порядка. Этот подход перспективен, если исследуется взаимодействие потоков, когда один поток увлекается другим потоком, затем результат подвергается преобразованию третьим потоком и т. д. В основе такого исследования лежит двойственность. Подобно тому, как ньютоновская механика соединятся с дифференциалами Лейбница, здесь мы говорим о дифференциальных уравнениях с производными Ли и симметриях операторов в сочетании с формами Картана.

В настоящей работе показывается, как можно ориентироваться в этажах и как следует работать с касательным функтором[6]. Линеаризация приводит к матрицам и линейным группам, и в частности, к калибровочным группам. На примерах линейных групп $GL(n, \mathbb{R})$, $n = 2, 3$, будет показано, в чем заключается устойчивость инвариантов и какова при этом роль возникающих сизигий.

1. Этажи

Каждый раз, поднимаясь с очередного этажа на следующий, получаем удвоение размерности:

$$\dim M = n \quad \Rightarrow \quad \dim T^kM = 2^kn, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для элементов этажей вводим обозначения по следующему правилу:

$$\begin{aligned} u \in M,\ (u, u_1) &\in TM, \\ (u, u_1, u_2, u_{12}) &\in T^2M, \\ (u, u_1, u_2, u_{12}, u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}) &\in T^3M, \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Элемент $(u, u_1) \in TM$ – это пара, состоящая из точки $u \in M$ и касательного к многообразию M вектора u_1 в этой точке. Далее, каждый раз, поднимаясь этажом выше, мы к символам, обозначающим точку этажа $T^{k-1}M$, добавляем те же символы с дополнительным индексом k, обозначающие в совокупности касательный к $T^{k-1}M$ вектор в этой точке, $k = 2, 3, \dots$

Для описания структуры этажей как многократных векторных расслоений предлагаемая индексация удобна. Естественные проекции

$$\pi_l : T^lM \to T^{l-1}M, \quad l = 1, 2, \dots k,$$

с учетом их дифференциалов определяют k различных проекций с этажа T^kM на этаж $T^{k-1}M$:

$$T^{k-1}\pi_1,\ T^{k-2}\pi_2,\ \dots,\ T\pi_{k-1},\ \pi_k. \tag{2}$$

При l-й проекции из ряда (2) символы с индексом l изымаются, а символы, которые остаются, определяют результат – точку этажа $T^{k-1}M$. Так, чтобы спуститься с третьего этажа на второй, имеем три проекции, и наше правило показывает:

$$\begin{array}{ccc} & (u, u_1, u_2, u_{12}, u_3, u_{13}, u_{23}, u_{123}) & \\ \swarrow_{T^2\pi_1} & \downarrow_{T\pi_2} & \searrow_{\pi_3} \\ (u, u_2, u_3, u_{23}) & (u, u_1, u_3, u_{13}) & (u, u_1, u_2, u_{12}) \end{array}$$

[6] В сравнении с книгами [8] и [11] наш подход намного проще и поэтому удобнее в применении.

Вообще, для того чтобы спуститься с этажа T^kM вниз на многообразие M, существует $k!$ различных способов[7].

Далее, каждой гладкой функции Φ с этажа $T^{k-1}M$ можно сопоставить на этаже T^kM пару $(\Phi\circ\pi_k, d\Phi)$ – саму функцию, поднятую на k-й этаж, и ее дифференциал. Согласно этому принципу в итеративном процессе каждой гладкой функции f, заданной на многообразии M, на этаже T^kM сопоставится 2^k различных функций:

$$f \rightsquigarrow (f\circ\pi_1, df) \rightsquigarrow (f\circ\pi_1\pi_2, df\circ\pi_2, d(f\circ\pi_1), d^2f) \rightsquigarrow \dots$$

Введем для этих функций обозначения, используя ту же индексацию, что для элементов этажей:

$$\begin{aligned} f &\rightsquigarrow (f, f_1)\\ &\rightsquigarrow (f, f_1, f_2, f_{12})\\ &\rightsquigarrow (f, f_1, f_2, f_{12}, f_3, f_{13}, f_{23}, f_{123}) \rightsquigarrow \dots \end{aligned} \tag{3}$$

В анализе говорят просто о дифференциалах $f,\ df,\ d^2f,\ d^3f, \dots$, что, с нашей точки зрения, не вполне корректно, так как у нас эти функции определяются на разных этажах[8].

1.1. Секторы, сектор-расслоения и сектор-формы. По тому же принципу (3) координатные функции u^i, заданные на окрестности $U\subset M$, индуцируют на окрестностях $T^kU\subset T^kM$ координатные функции

$$\begin{aligned} u^i &\rightsquigarrow (u^i, u^i_1)\\ &\rightsquigarrow (u^i, u^i_1, u^i_2, u^i_{12})\\ &\rightsquigarrow (u^i, u^i_1, u^i_2, u^i_{12}, u^i_3, u^i_{13}, u^i_{23}, u^i_{123}) \rightsquigarrow \dots \end{aligned}$$

Координаты с нижним индексом l являются для l-й проекции (2) слоевыми, остальные – базисными, $l = 1, 2, \dots, k$. Точка k-го этажа определяется 2^kn координатами.

Дифференциалы (3), определяемые функцией f на этажах T^kM, выражаются в координатах следующим образом:

$$f_1 = f_iu^i_1, \quad f_2 = f_iu^i_2, \quad f_3 = f_iu^i_3, \dots$$

$$f_{12} = f_{ij}u^i_1u^j_2 + f_ku^k_{12}, \quad f_{13} = f_{ij}u^i_1u^j_3 + f_ku^k_{13}, \quad f_{23} = f_{ij}u^i_2u^j_3 + f_ku^k_{23}, \dots$$

$$f_{123} = f_{ijk}u^i_1u^j_2u^k_3 + f_{ij}(u^i_1u^j_{23} + u^i_2u^j_{13} + u^i_3u^j_{12}) + f_ku^k_{123}, \dots,$$

где $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u^i}$, $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}, \dots$

[7]Структура T^kM описывается коммутативной диаграммой в виде k-мерного куба, и сквозных проекций от T^kM до M по ребрам этого куба, действительно, имеется $k!$

[8]Правда, равенством проекций (2) можно в этаже T^kM выделить $(k+1)n$-мерное подрасслоение, являющееся эквивалентом *касательного составного многообразия порядка k* по В.В. Вагнеру [13, с. 187] или *соприкасающегося расслоения* Osc^kM в теории Мирона – Атанасиу [7, 14]. В случае $n = 1$, $k = 2$ это напоминает ситуацию, когда на параболоиде $z = xy$ равенством $x = y$ высекается парабола. Говорить о структуре многократного векторного расслоения в таком случае, естественно, не приходится.

Все эти дифференциалы – линейные функции на слоях соответствующих расслоений. Например, функция f_{123} разложена, как видим, в сумму пяти слагаемых, и индекс 1 (соответственно 2 и 3) представлен в каждом слагаемом один и только один раз, а это значит, что функция f_{123} линейна на слоях трех расслоений $T^2\pi_1, T\pi_2$ и π_3.

Если в этих формулах частные производные f_i, f_{ij}, $f_{ijk}, \ldots$ заменить произвольными скалярными коэффициентами, то получим следующий общий случай. Скалярная функция на этаже T^kM, линейная на слоях всех расслоений (2), называется *k-секторной формой* по Уайту [11]. При этом элементы этажа T^kM называются *k-секторами*, а сам этаж T^kM – *k-секторным расслоением.*

Теория секторных форм Уайта является намного более общей, чем теория внешних форм Картана, которую она включает как частный случай. Например, 1-форма Φ на многообразии M как скалярная функция на этаже TM обладает дифференциалом $d\Phi$. В координатах на T^2U имеем:

$$\Phi = \varphi_i u_1^i \quad \rightsquigarrow \quad d\Phi = \partial_j\varphi_i\, u_1^i u_2^j + \varphi_k u_{12}^k.$$

Если производные $\partial_j\varphi_i$ проальтернировать и просимметрировать по индексам: $\partial_j\varphi_i = \partial_{[j}\varphi_{i]} + \partial_{(j}\varphi_{i)}$, то в выражении $d\Phi$ выделится внешний дифференциал этой формы $\partial_{[j}\varphi_{i]}\varphi_i\, u_1^i u_2^j$. Таким образом в структуре сектор-расслоений (этажей) и на секторных формах трактуются любые операции с внешними формами.

1.2. Обобщенная формула Лейбница. Гладкое отображение $\lambda : U\times V \to W$, где U, V и W – гладкие многообразия, имеет касательное отображение $T\lambda$:

$$\lambda : U\times V \to W : (u,v) \mapsto w,$$
$$T\lambda : \big((u,u_1),(v,v_1)\big) \mapsto (w,w_1).$$

Отображение λ сопоставляет паре точек $u\in U$ и $v\in V$ точку $w \in W$, которую обозначим $u\cdot v$. Определим отображения

$$l_u : V \to W : v \mapsto u\cdot v, \quad r_v : U\to W : u \mapsto u\cdot v.$$

Касательным векторам u_1 и v_1 к U и V в точках u и v сопоставляется вектор w_1, касательный к W в точке w, – сумма образов[9] $Tr_v(u_1)$ и $Tl_u(v_1)$. Обозначим их соответственно $u_1\cdot v$ и $u\cdot v_1$. Получаем формулы, правая из которых – *обобщенная формула Лейбница*:

$$w = u\cdot v, \quad w_1 = u_1\cdot v + u\cdot v_1. \tag{4}$$

1.2.1. Производные Ли. Пользуясь формулой (4), можно вывести все вычислительные формулы для производных Ли. Так, из равенства $(Yf)' = Y'f + Yf'$ выводим производную Ли[10] $\mathcal{L}_X Y = Y' = XY - YX$, разрешая, по сути, уравнение $w_1 = u_1\cdot v + u\cdot v_1$ относительно u_1. Из $(\Phi(Y))' = \Phi'(Y) + \Phi(Y')$ получаем соотношение $\mathcal{L}_X\Phi = \Phi'$. Зная, что тензорное поле S типа (1,2) является линейной функцией ковекторного аргумента (1-формы) Φ и двух векторных аргументов (векторных

[9]В координатах это соотношение имеет вид

$$w^\alpha = \lambda^\alpha(u,v), \quad dw^\alpha = \frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial u^i}du^i + \frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial v^\sigma}dv^\sigma, \ldots$$

[10]Если известно, что дифференцирование производится относительно определенного векторного поля X, производную Ли обозначаем просто штрихом.

полей) Y и Z, применяя ту же формулу Лейбница к выражению $S(\Phi, Y, Z)$, получаем производную Ли $S' = \mathcal{L}_X S$. Из равенства $Yf = df(Y)$ выводим соотношение $(df)' = d(f')$, означающее что производная Ли коммутирует с дифференциалом d. Равенство $[Y,Z]' = [Y',Z] + [Y,Z']$, в котором применено правило Лейбница, дает тождество Якоби для векторных полей и т. д.

1.2.2. Деривационные формулы базиса. Если на многообразии[11] M векторные поля R_i образуют поле реперов, а 1-формы ω^j – поле дуальных кореперов, $i, j = 1, 2, \ldots, n = \dim M$, то будем говорить, что на M задан *неголономный базис* (R, ω). Дуальность реперов и кореперов выражается равенством $\omega^j(R_i) = \delta_i^j$ или, короче, $\omega(R) = E$, где E – единичная матрица. Базис (R, ω) обладает объектом неголономности c_{ij}^k:

$$[R_i, R_j\,] = R_k c_{\,ij}^{\,k}, \quad \mathrm{d}\omega^i = -\frac{1}{2}\, c_{jk}^i\, \omega^j \wedge \omega^k. \tag{5}$$

Потоком векторного поля $X = P_i x^i$ базис (R, ω) увлекается. Инфинитезимальное преобразование этого базиса в потоке X определяется *деривационными формулами*[12]

$$R' = -RC, \quad \omega' = C\omega, \tag{6}$$

где штрихом обозначены производные Ли относительно X, и матрица C имеет следующий вид:

$$C = (c_{jk}^i x^k + R_i x^j). \tag{7}$$

Формулы (6) упрощают вычисления. Например, производные Ли векторного поля Y, 1-формы Φ и аффинорного поля $\mathcal{A}$ в потоке X вычисляются по схеме:

$$\begin{aligned} Y = Ry \quad &\rightsquigarrow \quad Y' = R(y' - Cy), \\ \Phi = \varphi\omega \quad &\rightsquigarrow \quad \Phi' = (\varphi' + \varphi C)\omega, \\ \mathcal{A} = RA\,\omega \quad &\rightsquigarrow \quad \mathcal{A}' = R(A' - CA + AC)\omega. \end{aligned}$$

В случае голономного базиса (∂_i, du^j) имеем хорошо известные формулы в координатах, где $C = (\partial_i x^j)$. В случае, когда коэффициенты c_{jk}^i – константы, формулы (6) удобно применять в теории групп Ли.

Эквивалентность формул (6) доказывается посредством применения к равенству $\omega(R) = E$ формулы Лейбница (4): $\omega'(R) + \omega(R') = 0$.

2. Касательные группы

2.1. Группы T^kG. Пусть G – группа Ли с законом умножения[13]

$$\gamma : G \times G \to G : (a, b) \mapsto c = ab.$$

Первый этаж TG становится группой Ли с законом умножения $T\gamma$. Ситуация описывается формулами

$$c = ab, \quad c_1 = a_1 b + a b_1. \tag{8}$$

[11] Предполагается, что многообразия M и все рассматриваемые на M поля являются гладкими.
[12] Эти формулы, как и последующие, записаны в матричном виде.
[13] Точку между перемножаемыми элементами группы не пишем.

Векторы $a_1 \in T_aG$ и $b_1 \in T_bG$ из точек $a \in G$ и $b \in G$ переносятся соответственно правым сдвигом r_b и левым сдвигом l_a (точнее, их дифференциалами) в точку $c \in G$, где сумма их образов $a_1b = Tr_b(a_1)$ и $ab_1 = Tl_a(b_1)$ образует вектор $c_1 \in \in T_cG$. Так перемножаются векторы a_1 и b_1 в группе TG. Правую формулу (8) можно представить в виде $c_1 = a(a^{-1}a_1 + b_1b^{-1})b$, что интерпретируется следующим образом: a_1 и b_1 переносятся в T_eG в векторы $a^{-1}a_1$ и b_1b^{-1}, эти векторы они складываются, а затем их сумма отображением $T(l_a \circ r_b)$ переносится в T_cG.

Единицей группы TG является нулевой вектор в T_eG, где e – единица группы G. Обращение элементов в группе TG происходит по правилу:

$$(a, a_1) \rightsquigarrow (a, a_1)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}a_1a^{-1}). \tag{9}$$

Далее, произвольный вектор $e_1 \in T_eM$ левым и правым сдвигами переносится в T_aG, $a \in G$, в два вектора ae_1 и e_1a, и на группе G в целом определяются два векторных поля: левоинвариантное векторное поле ae_1 и правоинвариантное векторное поле e_1a. При обращении (9) эти поля меняются ролями, левоинвариантное поле становится правоинвариантным, а правоинвариантное, наоборот, левоинвариантным:

$$(ae_1)^{-1} = -e_1a^{-1}, \quad (e_1a)^{-1} = -a^{-1}e_1.$$

На центре $Z \subset G$ эти поля совпадают, $ae_1 = e_1a$, $a \in Z$. Разность $e_1a - ae_1$, как увидим ниже, определяет *оператор присоединенного представления.*

Если a_t – 1-параметрическая подгруппа группы G, то правые сдиги r_{a_t} и левые сдвиги l_{a_t} индуцируют на G соответственно левоинвариантное векторное поле X и правоинвариантное векторное поле $\widetilde{X}$. Это объясняется тем, что левые и правые сдвиги на G взаимно коммутируют[14]. При этом внутренние автоморфизмы $A_{a_t} = = l_{a_t} \circ r_{a_t}^{-1}$ индуцируют разность полей $\widetilde{X} - X$:

$$r_{a_t} = \exp tX, \quad l_{a_t} = \exp t\widetilde{X}, \quad A_{a_t} = \exp t(\widetilde{X} - X). \tag{10}$$

Все сказанное будет верно и для k-го этажа T^kG, который становится группой Ли с законом умножения $T^k\gamma$. К примеру, в группу T^2G формулы (8) и (9) продолжаются следующим образом:

$$\begin{aligned} c = ab, \quad c_1 &= a_1b + ab_1, \\ c_2 &= a_2b + ab_2, \\ c_{12} &= a_{12}b + a_1b_2 + a_2b_1 + ab_{12}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} a \rightsquigarrow a^{-1}, \quad a_1 &\rightsquigarrow -a^{-1}a_1a^{-1}, \\ a_2 &\rightsquigarrow -a^{-1}a_2a^{-1}, \\ a_{12} &\rightsquigarrow -a^{-1}(a_{12} - a_1a^{-1}a_2 - a_2a^{-1}a_1)a^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Произведение элементов (a, a_1, a_2, a_{12}) и (b, b_1, b_2, b_{12}) в T^2G определяется формулами (11). Формулы (12), соответственно, определяют обращение элемента (a, a_1, a_2, a_{12}). Формулами (12), заметим, обобщаются известные формулы из анализа:

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad \left(\frac{1}{u}\right)'' = \frac{-u''u + 2(u')^2}{u^3}.$$

[14] По этой же причине все левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля взаимно коммутируют.

2.1.1. Представления группы. Пусть многообразие M – пространство представления группы G, и пусть теперь отображения λ и $T\lambda$ определяют действие группы G на M и действие касательной группы TG на TM:

$$\begin{aligned} \lambda : M \times G \to M, \quad (u,a) \mapsto v = u \cdot a, \\ T\lambda : \big((u,u_1),(a,a_1)\big) \mapsto (v,v_1), \quad v_1 = u_1 \cdot a + u \cdot a_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Для каждого $a \in G$ отображение $\lambda_a : M \to M$, $u \mapsto v = u \cdot a$ – диффеоморфизм. При этом $a \mapsto \lambda_a$ – гомоморфизм группы G в группу диффеоморфизмов многообразия M, $\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a$. Отображение

$$\lambda_u : G \to M, \quad a \mapsto v = u \cdot a$$

определяет в M *орбиту* $\lambda_u(G) \subset M$ точки $u \in M$, и отображение $T_u\lambda$ переносит все векторы из TG на эту орбиту:

$$T\lambda_u : TG \to TM, \quad (a,a_1) \mapsto (v,v_1), \quad v_1 = v \cdot a^{-1}a_1. \tag{14}$$

Равенство (14), называемое *определяющим соотношением* данного представления[15], выводится непосредственно из (13),

$$u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = u \cdot a_1 = (u \cdot a) \cdot (a^{-1}a_1) = v \cdot a^{-1}a_1.$$

Фиксированный вектор $a^{-1}a_1 \in T_eG$ переносится в TM, образуя на M *оператор группы* G, касательное к орбитам векторное поле $v_1 = v \cdot a^{-1}a_1$, $v \in M$. Векторный базис (репер) из T_eG переносится на многообразие M в систему операторов. Их линейная оболочка представляет собой интегрируемое распределение с интегральными поверхностями – орбитами группы.

2.1.2. Присоединенное представление. Пусть группа Ли G действует на себя внутренними автоморфизмами (*присоединенное представление*),

$$A_a = l_a \circ r_a^{-1} : G \ \to \ G, \quad b \ \mapsto \ \widetilde{b} = aba^{-1}.$$

Определяющее соотношение (14) выводится из (13) при $u_1 = 0$ с учетом $u = v \cdot a^{-1}$. Здесь правило Лейбница применяется к $\widetilde{b} = aba^{-1}$ (см. также (9)):

$$\widetilde{b}_1 = a_1ba^{-1} + ab_1a^{-1} + ab(-a^{-1}a_1a^{-1}).$$

Это равенство – эквивалент формулы (13). Полагая $b_1 = 0$ и учитывая, что $b = a^{-1}\widetilde{b}a$, получаем определяющее соотношение:

$$\widetilde{b}_1 = (a_1a^{-1})\widetilde{b} - \widetilde{b}(a_1a^{-1}), \quad a_1a^{-1} \in T_eG, \quad \widetilde{b} \in G.$$

Переходя к прежним обозначениям $\widetilde{b} \rightsquigarrow a$ и $a_1a^{-1} \rightsquigarrow e_1$, заключаем, что оператор присоединенного представления определяется как разность левоинвариантного и правоинвариантного векторных полей $e_1a - ae_1$. Это вполне согласуется и с выводом (10).

По принципу (10) на группе G определяются левоинвариантный базис (R,ω) и правоинвариантный базис $(\widetilde{R},\widetilde{\omega})$. В обоих случаях структурные константы $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$,

[15] В координатах оно записывается в виде системы $dv^{\alpha} = \xi^{\alpha}_i\omega^i$, где ξ^{α}_i – компоненты групповых операторов на орбите, ω^i – левоинвариантные формы на группе G.

$\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,2,\ldots,r=\dim G$, с точностью до знака[16] определяют объекты неголономности этих базисов:

$$[R_\alpha, R_\beta\,] = R_\gamma c^{\ \gamma}_{\alpha\beta}, \qquad \mathrm{d}\omega^\alpha = -\frac{1}{2}\, c^\alpha_{\beta\gamma}\, \omega^\beta\wedge\omega^\gamma, \tag{15}$$

$$[\widetilde{R}_\alpha, \widetilde{R}_\beta\,] = -\widetilde{R}_\gamma c^{\ \gamma}_{\alpha\beta}, \quad \mathrm{d}\widetilde{\omega}^\alpha = \frac{1}{2}\, c^\alpha_{\beta\gamma}\, \widetilde{\omega}^\beta\wedge\widetilde{\omega}^\gamma. \tag{16}$$

Впрочем, из (15) и (16) следует, что операторы присоединенного представления $Y_\alpha=\widetilde{R_\alpha}-R_\alpha$ имеют такую же таблицу коммутаторов, что и операторы $\widetilde{R}_\alpha$:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = [\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] = -\widetilde{Y}_\gamma c^{\ \gamma}_{\alpha\beta}.$$

Переход от базиса (R,ω) к базису $(\widetilde{R},\widetilde{\omega})$ осуществляется некоторой матрицей $A= =A(a)$, $a\in G$:

$$\widetilde{R} = RA^{-1}, \quad \widetilde{\omega} = A\omega. \tag{17}$$

Тем самым определяется гомоморфизм ξ группы G в линейную группу $GL(r,\mathbb{R})$ с центром $Z\subset G$ в качестве ядра:

$$\xi : G \ \to\ GL(r,\mathbb{R}), \quad a\ \mapsto\ A(a). \tag{18}$$

Подгруппа $\mathrm{Ad}\,(G)=\xi(G)\subset GL(r,\mathbb{R})$, изоморфная фактор-группе G/Z, называется *присоединенной группой* группы G.

2.2. Группы $T^k\big(GL(2,\mathbb{R})\big)$.

2.2.1. Присоединенная группа группы $GL(2,\mathbb{R})$. Все вышесказанное переносится на линейную группу $GL(2,\mathbb{R})$ и ее касательную группу $T\big(GL(2,\mathbb{R})\big)$. Элементом группы $GL(2,\mathbb{R})$ является регулярная матрица A. Пусть вектор, касательный к $GL(2,\mathbb{R})$ в точке A, определяется матрицей C, так что

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}, \quad (A,C)\in T\big(GL(2,\mathbb{R})\big).$$

Координаты a_i на группе $GL(2,\mathbb{R})$ определяют натуральный базис (∂_i, da_j), где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial a_i}$, $i,\,j = 1,2,3,4$. Базис в единице $E\in GL(2,\mathbb{R})$ разносится на всю группу, порождая два базиса[17] – левоинвариантный (X_i,ω^j) и правоинвариантный $(\widetilde{X}_i,\widetilde{\omega}^j)$:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2\\ \partial_3 & \partial_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2\\ \omega^3 & \omega^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} da_1 & da_2\\ da_3 & da_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2\\ \widetilde{X}_3 & \widetilde{X}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2\\ \partial_3 & \partial_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 & \widetilde{\omega}^2\\ \widetilde{\omega}^3 & \widetilde{\omega}^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 & da_2\\ da_3 & da_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}^{-1}.$$

[16] Так как $\kappa : a\to a^{-1}$, то $T\kappa X=-\widetilde{X}$, $T\kappa\widetilde{X}=-X$, и отображение $T\kappa$ переводит формулы (15) в формулы (16) и наоборот.

[17] Левоинвариантный корепер определяется формулой $\omega=A^{-1}dA$, а правоинвариантный – формулой $\omega=(dA)A^{-1}$. Дуальные реперы задаются соответственно обратными матрицами.

Присоединенное представление задается формулой

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_3 & \widetilde{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

а точнее, отображением ξ (18) и матрицами вида

$$\mathcal{A} = \frac{1}{a_1a_4 - a_2a_3} \begin{pmatrix} a_1a_4 & a_3a_4 & -a_1a_2 & -a_2a_3 \\ a_2a_4 & a_4^2 & -a_2^2 & -a_2a_4 \\ -a_1a_3 & -a_3^2 & a_1^2 & a_1a_3 \\ a_2a_3 & -a_3a_4 & a_1a_2 & a_1a_4 \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}).$$

Если матрицу $\mathcal{A}$ дифференцировать по принципу $\mathcal{A}' = (d\mathcal{A}/dt)|_{t=0} = \mathcal{C}$ в единице группы $GL(2, \mathbb{R})$, получим элемент присоединенной алгебры Ли:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 & 0 \\ c_2 & c_4 - c_1 & 0 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 - c_4 & c_3 \\ 0 & -c_3 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \in gl(4, \mathbb{R}). \tag{19}$$

Операторы присоединенного представления $Y_i = \widetilde{X}_i - X_i$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix}$$

и задаются матрицами вида

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_4 - a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 - a_4 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}).$$

Матрица $\mathcal{B}$ по указанному выше принципу $\mathcal{B}' = \mathcal{C}$ дает ту же матрицу $\mathcal{C}$ (19).

Общее левоинвариантное векторное поле X имеет в левоинвариантном репере постоянные коэффициенты C и такое же представление в правоинвариантном репере имеет общее правоинвариантное векторное поле $\widetilde{X}$:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4,$$
$$\widetilde{X} = c_1\widetilde{X}_1 + c_2\widetilde{X}_2 + c_3\widetilde{X}_3 + c_4\widetilde{X}_4.$$

Потоки $a_t = \exp tX$ и $\widetilde{a}_t = \exp t\widetilde{X}$ определяются одной и той же однопараметрической подгруппой e^{Ct} группы $GL(2, R)$. Ее левые классы смежности являются траекториями поля X, а правые классы смежности – траекториями поля $\widetilde{X}$:

$$a_t \rightsquigarrow A' = A\,C \quad \Rightarrow \quad A_t = A\,e^{Ct},$$
$$\widetilde{a}_t \rightsquigarrow A' = CA \quad \Rightarrow \quad A_t = e^{Ct}A.$$

Деривационные формулы (6) для левоинвариантного базиса (X_i, ω^j) в потоке поля X записываются в виде:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\\ \omega^3 & \omega^4\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\\ \omega^3 & \omega^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\\ \omega^3 & \omega^4\end{pmatrix}.$$

Роль, которую играет матрица C в формулах (6), в настоящих рассуждениях играет матрица $\mathcal{C}$ (19). Таблица коммутаторов $[X_i, X_j]$ отсюда может быть получена следующим образом. Производная $X'_j = [X, X_j]$ определяет j-ю строку таблицы, а именно: при коэффициенте c_i расположен i-й элемент j-й строки :

$$\begin{array}{c|cccc}
\Lsh & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\
\hline
X_1 & 0 & -X_2 & X_3 & 0 \\
X_2 & X_2 & 0 & X_4 - X_1 & -X_2 \\
X_3 & -X_3 & X_1 - X_4 & 0 & X_3 \\
X_4 & 0 & X_2 & -X_3 & 0
\end{array} \tag{20}$$

Операторы присоединенного представления $Y_i = \widetilde{X}_i - X_i$ линейно зависимы. Действительно, из строения столбцов матрицы $\mathcal{B}$ следует, что

$$Y_1 + Y_4 = 0, \quad a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 + a_4Y_4 = 0.$$

Их линейная оболочка $\langle Y_i \rangle$ определяет на $GL(2, R)$ (вне центра Z) двумерное интегрируемое распределение. Интегралами распределения $\langle Y_i \rangle$ являются след и определитель матрицы A:

$$\operatorname{tr} A = a_1 + a_4, \quad \det A = a_1a_4 - a_2a_3,$$

что вытекает из равенств $d(\operatorname{tr} A) = \theta^1$ и $d(\det A) = (\det A)\theta^2$, где

$$\begin{aligned}
&\theta^1 = a_1\omega^1 + a_3\omega^2 + a_2\omega^3 + a_4\omega^4 = a_1\widetilde{\omega}^1 + a_3\widetilde{\omega}^2 + a_2\widetilde{\omega}^3 + a_4\widetilde{\omega}^4,\\
&\theta^2 = \omega^1 + \omega^4 = \widetilde{\omega}^1 + \widetilde{\omega}^4.
\end{aligned}$$

Формы θ^1 и θ^2 аннулируются распределением $\langle Y_i \rangle$.

Общий оператор присоединенного представления является линейной комбинацией операторов Y_i с коэффициентами c_i:

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3 + c_4Y_4.$$

Поток оператора Y определяется 1-параметрической подгруппой группы внутренних автоморфизмов:

$$A' = CA - AC \quad \Rightarrow \quad A_t = e^{Ct}Ae^{-Ct}.$$

Операторы Y_i допускают инфинитезимальную симметрию P, указанную ниже. Интегралы распределения $\langle Y_i \rangle$, то есть $\operatorname{tr} A$ и $\det A$, в потоке поля P преобразуются, но остаются интегралами этого распределения. Возникает вопрос о наличии общего инварианта операторов Y_i и поля P. Таковым является дискриминант Δ. Имеем:

$$\begin{aligned}
P = \partial_1 + \partial_4, \qquad & \exp tP : A \rightsquigarrow A_t = A + tE,\\
& (\mathrm{tr} A)_t = \mathrm{tr} A + 2t,\\
& (\det A)_t = \det A + \mathrm{tr} A \cdot t + t^2,\\
\Delta = \mathrm{tr}^2 A - 4\det A, \qquad & \Delta_t = \Delta.
\end{aligned}$$

Инвариант Δ определяет *сизигию* – связь между инвариантами $\operatorname{tr} A$, $\det A$ операторов Y_i и инвариантами $a_1 - a_4$, a_2, a_3 поля P:

$$\Delta = (a_1 + a_2)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3) = (a_1 - a_4)^2 + 4a_2 a_3.$$

Для прояснения геометрического смысла этой сизигии введем отображения χ и ζ, проектирующие четырехмерное многообразие $GL(2,\mathbb{R})$ соответственно на некоторые пространство переменных x, y, z и плоскость переменных u, u':

$$\chi : A \ \rightsquigarrow\ (x,y,z), \qquad \begin{cases} x \circ \chi = a_1 - a_4, \\ y \circ \chi = a_2, \\ z \circ \chi = a_3, \end{cases}$$

$$\zeta : A \ \rightsquigarrow\ (u,u'), \qquad \begin{cases} u \circ \zeta = \det A, \\ u' \circ \zeta = \operatorname{tr} A. \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} Y_1 &\ \rightsquigarrow\ T\chi Y_1 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ Y_2 &\ \rightsquigarrow\ T\chi Y_2 = 2z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \qquad \begin{cases} \widetilde{x} = x + 2zte^{-s}, \\ \widetilde{y} = ye^{s} - xt - zt^2 e^{-s}, \\ \widetilde{z} = ze^{-s}, \end{cases}$$

$$P \ \rightsquigarrow\ T\zeta P = u'\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial u'} \qquad \begin{cases} u_t = u + u't + t^2, \\ u'_t = u' + 2t. \end{cases}$$

Проекция χ осуществляется вдоль траекторий поля P. На гиперквадрике $\det A = d = \mathrm{const}$ определяется характеристика $P(\det A) = \operatorname{tr} A = 0$, проектирующаяся на пространство переменных x, y, z в гиперболоид $\overline{\Delta} = -4d$, где

$$\overline{\Delta} = x^2 + 4yz \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = \overline{\Delta} \circ \chi.$$

Огибающая семейства $\det A_t = d$ определяется уравнением $\Delta = -4d$. Двумерное распределение $\langle Y_i \rangle = \langle Y_1, Y_2 \rangle$ проектируется в двумерное распределение $\langle T\chi Y_1, T\chi Y_2 \rangle$, для которого функция $\overline{\Delta}$ является интегралом. Гиперболоиды – поверхности уровня функции $\overline{\Delta}$ – являются орбитами двумерного потока $a_s \circ b_t$, где $a_s = \exp s(T\chi Y_1)$ и $b_t = \exp t(T\chi Y_2)$.

При проекции ζ цилиндр $\Delta = -4d$ отображается в параболу $\widetilde{\Delta} = -4d$, где

$$\widetilde{\Delta} = (u')^2 - 4u \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = \widetilde{\Delta} \circ \zeta.$$

Оператор P при отображении $T\zeta$ переходит в векторное поле $T\zeta P$. Дискриминант $\widetilde{\Delta}$ квадратичной функции u_t является инвариантом поля $T\zeta P$. Линии уровня $\widetilde{\Delta} = \mathrm{const}$ представляют собой семейство парабол на плоскости uu'. Сизигия порождает коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[d, dash] \arrow[dr, "\zeta"] & \\ (x,y,z) \arrow[dr, "\overline{\Delta}"'] & \Delta \arrow[d] & (u,u') \arrow[dl, "\widetilde{\Delta}"] \\ \Delta = \overline{\Delta} \circ \chi & \mathbb{R} & \Delta = \widetilde{\Delta} \circ \zeta \end{tikzcd}$$

Обозначим символом $\{\Delta\}$ цилиндр с уравнением $\Delta = -4d$, а символами $\{\overline{\Delta}\}$ и $\{\widetilde{\Delta}\}$ – гиперболоид с уравнением $\overline{\Delta} = -4d$ и параболу с уравнением $\widetilde{\Delta} = -4d$ (d – произвольная константа). Тогда

$$\{\Delta\} = \{\overline{\Delta}\} \times \{\widetilde{\Delta}\}. \tag{21}$$

Формула (21) означает, что цилиндр $\Delta = -4d$ есть прямое произведение гиперболоида $\overline{\Delta} = -4d$ и параболы $\widetilde{\Delta} = -4d$[18]. В групповых терминах имеем фактор-группы

$$\{\overline{\Delta}\} \approx \{\Delta\}/\{\widetilde{\Delta}\}, \quad \{\widetilde{\Delta}\} \approx \{\Delta\}/\{\overline{\Delta}\}.$$

2.2.2. Калибровочные группы. Касательная группа линейной группы $GL(n,\mathbb{R})$ вкладывается мономорфно в линейную группу $GL(2n,\mathbb{R})$:

$$T\big(GL(n,\mathbb{R})\big) \hookrightarrow GL(2n,\mathbb{R}), \quad (A, A_1) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ A_1 & A \end{pmatrix} \tag{22}$$

При этом соотношения (8) и (9) выполняются: произведению элементов (A, A_1) и (B, B_1) соответствует произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A_1 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ B_1 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ A_1B + AB_1 & AB \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ A^{-1}A_1 + B_1B^{-1} & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

а обратному элементу $(A, A_1)^{-1}$ – обратная матрица:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A_1 & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}A_1A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таков первый шаг итеративного процесса

$$T^k\big(GL(n,\mathbb{R})\big) \hookrightarrow GL(2^k n,\mathbb{R}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Вторая касательная группа $T^2\big(GL(n,\mathbb{R})\big)$ вкладывается в группу $GL(4n,\mathbb{R})$:

$$(A, A_1, A_2, A_{12}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & A & 0 \\ A_{12} & A_2 & A_1 & A \end{pmatrix} \tag{24}$$

Здесь выполняются соотношения (11) и (12):

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & A & 0 \\ A_{12} & A_2 & A_1 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & B & 0 \\ B_{12} & B_2 & B_1 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & C & 0 \\ C_{12} & C_2 & C_1 & C \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} C &= AB, \\ C_1 &= A_1B + AB_1, \\ C_2 &= A_2B + AB_2, \\ C_{12} &= A_{12}B + A_2B_1 + A_1B_2 + AB_{12}. \end{aligned}$$

[18]Цилиндр – прямое произведение направляющей и прямолинейной образующей.

Полагая, что в результате умножения получилась единичная матрица, находим формулы для вычисления обратного элемента:

$$\begin{aligned}
B &= A^{-1},\\
B_1 &= -A^{-1}A_1A^{-1},\\
B_2 &= -A^{-1}A_2A^{-1},\\
B_{12} &= -A^{-1}(A_{12} - A_1A^{-1}A_2 - A_2A^{-1}A_1)A^{-1},
\end{aligned}$$

В ходе последовательных вложений получаем *калибровочные группы.*

В калибровочной теории центральным вопросом является нахождение для точки пространства представления подгруппы ее стационарности в группе преобразований. На этажах T^kM группа диффеоморфизмов $\mathcal{G}$ многообразия M действует поструйно. Это следует из вида матриц Якоби диффеоморфизмов a, Ta, $T^2a, \ldots$:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & 0\\ A_1 & A\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0\\ A_1 & A & 0 & 0\\ A_2 & 0 & A & 0\\ A_{12} & A_2 & A_1 & A\end{pmatrix} \rightsquigarrow \ldots,$$

где $A = (a^i_j)$, $A_1 = (a^i_{jk}u^i_1)$, $A_2 = (a^i_{jk}u^i_2)$, $A_{12} = (a^i_{jkl}u^k_1u^l_2 + a^i_{jk}u^k_{12}), \ldots$ Группа обратимых струй порядка k отображается в группу $GL(2^kn, \mathbb{R})$ гомоморфно. При этом ядром гомоморфизма является стационарная подгруппа элемента этажа T^kM, и этаж T^kM становится однородным пространством с действием на нем группы $\mathcal{G}$.

3. Проблема устойчивости инвариантов

Если векторное поле увлекается потоком другого векторного поля, то его инварианты подвергаются воздействию и возникает проблема их устойчивости. Операторы линейной группы обладают алгебраическими инвариантами, и проблема сводится к отысканию соответствующих сизигий. Продемонстрируем сказанное на примере группы $GL(3, \mathbb{R})$.

3.1. Группа $GL(3, \mathbb{R})$. Линейная группа $GL(3, \mathbb{R})$ является 9-мерным многообразием, а ее алгебра Ли $gl(3, \mathbb{R})$ – 9-мерным векторным пространством, касательным к $GL(3, \mathbb{R})$ в точке $E \in GL(3, \mathbb{R})$. Элементами группы $GL(3, \mathbb{R})$ являются регулярные матрицы A, а элементами алгебры Ли $gl(3, \mathbb{R})$ – произвольные матрицы C :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ c_4 & c_5 & c_6\\ c_7 & c_8 & c_9\end{pmatrix}.$$

Так же, как и в случае группы $GL(2, \mathbb{R})$, на группе $GL(3, \mathbb{R})$ определяются левоинвариантный репер

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3\\ X_4 & X_5 & X_6\\ X_7 & X_8 & X_9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7\\ a_2 & a_5 & a_8\\ a_3 & a_6 & a_9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ \partial_4 & \partial_5 & \partial_6\\ \partial_7 & \partial_8 & \partial_9\end{pmatrix}$$

и правоинвариантный репер

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & \widetilde{X}_3\\ \widetilde{X}_4 & \widetilde{X}_5 & \widetilde{X}_6\\ \widetilde{X}_7 & \widetilde{X}_8 & \widetilde{X}_9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ \partial_4 & \partial_5 & \partial_6\\ \partial_7 & \partial_8 & \partial_9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7\\ a_2 & a_5 & a_8\\ a_3 & a_6 & a_9\end{pmatrix}.$$

3.1.1. Инварианты $(\sigma, \sigma', \sigma')$**.** Определяются операторы присоединенного представления $Y_i = \widetilde{X}_i - X_i$:

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = a_2\,\partial_2 + a_3\,\partial_3 - a_4\,\partial_4 - a_7\,\partial_7,\\
&Y_2 = a_4\,(\partial_1 - \partial_5) - (a_1 - a_5)\,\partial_2 + a_6\,\partial_3 - a_7\,\partial_8,\\
&Y_3 = a_7\,(\partial_1 - \partial_9) + a_8\,\partial_2 - (a_1 - a_9)\,\partial_3 - a_4\,\partial_6,\\
&Y_4 = -a_2\,(\partial_1 - \partial_5) + (a_1 - a_5)\,\partial_4 + a_3\,\partial_6 - a_8\,\partial_7,\\
&Y_5 = -a_2\,\partial_2 + a_4\,\partial_4 + a_6\,\partial_6 - a_8\,\partial_8,\\
&Y_6 = -a_2\,\partial_3 + a_7\,\partial_4 + a_8\,(\partial_5 - \partial_9) - (a_5 - a_9)\,\partial_6,\\
&Y_7 = -a_3\,\partial_1 - a_6\,\partial_4 + (a_1 - a_9)\,\partial_7 + a_2\,\partial_8 + a_3\,\partial_9,\\
&Y_8 = -a_3\,\partial_2 - a_6\,(\partial_5 - \partial_9) + a_4\,\partial_7 + (a_5 - a_9)\,\partial_8.\\
&Y_9 = -a_3\,\partial_3 - a_6\,\partial_6 + a_7\,\partial_7 + a_8\,\partial_8,
\end{aligned}
$$

связанные линейными соотношениями

$$
\begin{gathered}
Y_1 + Y_5 + Y_9 = 0,\\
a_1\,Y_1 + a_2\,Y_2 + a_3\,Y_3 + a_4\,Y_4 + a_5\,Y_5 + a_6\,Y_6 + a_7\,Y_7 + a_8\,Y_8 + a_9\,Y_9 = 0,\\
\overline{a}_1\,Y_1 + \overline{a}_2\,Y_2 + \overline{a}_3\,Y_3 + \overline{a}_4\,Y_4 + \overline{a}_5\,Y_5 + \overline{a}_6\,Y_6 + \overline{a}_7\,Y_7 + \overline{a}_8\,Y_8 + \overline{a}_9\,Y_9 = 0,
\end{gathered}
$$

где $\overline{a}_i$ – элементы матрицы A^{-1}. Линейная оболочка операторов Y_i имеет размерность не выше шести[19]:

$$\dim\langle Y_i\rangle \le 6.$$

Операторы Y_i допускают общие инварианты:

$$
\sigma = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix},
$$

$$
\sigma' = \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_5 & a_6\\ a_8 & a_9 \end{vmatrix}\right),
$$

$$
\sigma'' = \frac{1}{3}\,(a_1 + a_5 + a_9).
$$

Таблица коммутаторов для операторов Y_i имеет вид:

$\Rsh$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9
Y_1	0	$-Y_2$	$-Y_3$	Y_4	0	0	Y_7	0	0
Y_2	Y_2	0	0	Y_9	$-Y_2$	$-Y_3$	Y_8	0	0
Y_3	Y_3	0	0	Y_6	0	0	$-Y_5$	$-Y_2$	$-Y_3$
Y_4	$-Y_4$	$-Y_9$	$-Y_6$	0	Y_4	0	0	Y_7	0
Y_5	0	Y_2	0	$-Y_4$	0	$-Y_6$	0	Y_8	0
Y_6	0	Y_3	0	0	Y_6	0	$-Y_4$	Y_1	$-Y_6$
Y_7	$-Y_7$	$-Y_8$	Y_5	0	0	Y_0	0	0	Y_7
Y_8	0	0	Y_2	$-Y_7$	$-Y_8$	$-Y_1$	0	0	Y_8
Y_9	0	0	Y_3	0	0	Y_6	$-Y_7$	$-Y_8$	0

[19]Так, равенства $Y_3 = 0$ и $\dim\langle Y_i\rangle = 5$ имеют место на пятимерной подгруппе матриц

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & a_5 & a_6\\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 a_5 \ne 0,
$$

а на центре Z, то есть на 1-параметрической подгруппе матриц tE, вся оболочка состоит из нуля, и $\dim\langle Y_i\rangle = 0$.

Три оператора Y_1, Y_5 и Y_9 играют особую роль. Они коммутируют между собой и, кроме того, являются инфинитезимальными симметриями для каждого оператора Y_i. Линейная оболочка $\langle Y_1, Y_5, Y_9\rangle$ – интегрируемое распределение размерности ≤ 2. На его интегральных поверхностях определяется действие аддитивной группы $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}_{(s,t,u)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 e^{s-t} & a_3 e^{s-u} \\ a_4 e^{t-s} & a_5 & a_6 e^{t-u} \\ a_7 e^{u-s} & a_8 e^{u-t} & a_9 \end{pmatrix},$$

где s, t и u – параметры операторов Y_1, Y_5 и Y_9 соответственно. По сути, речь идет о внутренних автоморфизмах $A \rightsquigarrow UAU^{-1}$ под действием группы диагональных матриц

$$U = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^u \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Более устойчивые инварианты (i_0, i_1)**.** Рассмотрим оператор[20]

$$P = \partial_1 + \partial_5 + \partial_9.$$

Штрихи у величин σ, σ' и σ'' трактуются как производные:

$$\sigma' = P\sigma, \quad \sigma'' = P^2\sigma, \quad \sigma''' = P^3\sigma = 1.$$

Это значит, что оператор P отображением $\zeta : A \mapsto (\sigma, \sigma', \sigma'')$ переводится в векторное поле $\widetilde{P} = T\zeta P$:

$$\widetilde{P} = \sigma' \frac{\partial}{\partial \sigma} + \sigma'' \frac{\partial}{\partial \sigma'} + \frac{\partial}{\partial \sigma''}, \tag{25}$$

а поток $a_t = \exp tP : A \mapsto A_t = A + tE$ преобразуется в поток:

$$\widetilde{a}_t = \exp t\widetilde{P} : \ (\sigma, \sigma', \sigma'') \quad \mapsto \quad \begin{cases} \sigma_t = \sigma + \sigma' t + \sigma'' \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6}, \\ \sigma'_t = \sigma' + \sigma'' t + \dfrac{t^2}{2}, \\ \sigma''_t = \sigma'' + t. \end{cases}$$

Соответствие

$$a_t = \exp tP \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{a}_t = \exp t(T\zeta P)$$

выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^9 & \xrightarrow{a_t} & \mathbb{R}^9 \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \zeta \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\widetilde{a}_t} & \mathbb{R}^3 \end{array} \tag{26}$$

Каноническим параметром для оператора P и для поля $\widetilde{P}$ является величина

$$s = \frac{1}{3} \operatorname{tr} C = \sigma''.$$

[20] И здесь удобно пользоваться параметрами (s, t), но теперь в другом значении.

Следовательно, подстановка $t = -s$ в матрицу A_t дает нам инварианты[21] оператора P:

$$A_{-s} = A - sE = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{1}{3}\operatorname{tr} A & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 - \frac{1}{3}\operatorname{tr} A & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 - \frac{1}{3}\operatorname{tr} A \end{pmatrix},$$

и та же подстановка в величины σ_t, σ_t' и σ_t'' дает нам два общих для операторов P и Y_i инварианта[22] (третий, равный нулю, опускаем):

$$t \rightsquigarrow -s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i_0 \doteq \sigma_{-s} = \sigma - \sigma'\sigma'' + \dfrac{1}{3}(\sigma'')^3, \\ i_1 \doteq \sigma'_{-s} = \sigma' - \dfrac{1}{2}(\sigma'')^2. \end{cases} \tag{27}$$

Инварианты i_0 и i_1, естественно, выразятся через базисные инварианты A_{-s}. Получаем две сизигии.

3.1.3. Наиболее устойчивый инвариант I. С помощью инвариантов i_0 и i_1 составляется известный *дискриминант* кубической функции, в данном случае для функции σ_t :

$$I = (3i_0)^2 + (2i_1)^3\,, \tag{28}$$

Дискриминант I обладает свойством:

$$\sigma = \sigma' = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 0.$$

Это означает, что равенство $I = 0$ является алгебраическим следствием равенств $\sigma = 0$ и $\sigma' = 0$.

Пусть A_0 – поверхность $\sigma = 0$, то есть множество матриц с нулевым определителем. В потоке a_t на поверхности A_0 определяется *стратификация*[23]

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2\,, \tag{29}$$

где A_1 – характеристика, высекаемая на A_0 уравнением $\sigma' = 0$, а A_2 – характеристика, высекаемая на A_1 уравнением $\sigma'' = 0$. Уравнение $I = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с прямолинейными образующими – траекториями поля P. Этот цилиндр содержит характеристики A_1 и A_2, причем в точках A_1 цилиндр касается поверхности A_0, а в точках A_2 – характеристики A_1.

При отображении $\zeta : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^3$ страты (29) отображаются в страты *плоскость – прямая – точка*

$$\zeta(A_0) \supset \zeta(A_1) \supset \zeta(A_2), \tag{30}$$

причем страты (29) и (30) увлекаются одновременно потоками $a_t = \exp tX$ и $\widetilde{a}_t = \exp t\widetilde{X}$ (см. (26)):

$$\zeta: \ a_t(A_0) \supset a_t(A_1) \supset a_t(A_2) \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{a}_t\big(\zeta(A_0)\big) \supset \widetilde{a}_t\big(\zeta(A_1)\big) \supset \widetilde{a}_t\big(\zeta(A_2)\big).$$

[21] У матрицы A_{-s} девять элементов, но $\operatorname{tr} A_{-s} = 0$, отсюда следует, что имеется восемь инвариантов.

[22] Знак $\doteq$ употребляем, когда вводятся новые обозначения.

[23] При освещении поверхности A_0 вдоль траекторий поля P появляются особенности: *складка* A_1 и *сборка* A_2 (см. [15]).

Уравнением $I = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется развертывающаяся поверхность (*торс*) – огибающая семейства плоскостей $\widetilde{a}_t\bigl(\zeta(A_0)\bigr)$. Ребром возврата торса является (*дискриминантная*) кривая $\widetilde{a}_t\bigl(\zeta(A_2)\bigr)$. Страты (30) при изменении параметра t приходят в движение: точка $\widetilde{a}_t\bigl(\zeta(A_2)\bigr)$ перемещается по дискриминантной кривой, а вместе с ней перемещаются касательная $\widetilde{a}_t\bigl(\zeta(A_1)\bigr)$ и соприкасающаяся плоскости $\widetilde{a}_t\bigl(\zeta(A_0)\bigr)$ к дискриминантной кривой.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^3$, где заданы координаты $(\sigma, \sigma', \sigma'')$, плоскость $\sigma = 0$, увлекаясь потоком $\widetilde{a}_t$, образует семейство плоскостей, которое огибается торсом $I = 0$. Дискриминантная кривая, или ребро возврата торса, – это кубическая парабола

$$\left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}, t\right).$$

Торс разбивает пространство $\mathbb{R}^3$ на две области: область между створками торса $I > 0$, куда при отображении $A \mapsto \zeta(A)$ попадают матрицы A с тремя действительными различными собственными значениями, и область вне створок $I > 0$, куда попадают матрицы A только с одним действительным собственным значением. На поверхность торса $I = 0$ попадают матрицы A, у которых не все собственные значения различны, то есть такие, у которых хотя бы два из них совпадают, а на ребро возврата попадают матрицы A с трехкратным собственным значением.

Точка $(\sigma_t, \sigma'_t, \sigma''_t)$, перемещаясь по своей траектории, доходит до плоскости $\sigma'' = 0$, где становится точкой $(\sigma_{-\sigma''}, \sigma'_{-\sigma''}, 0)$. Торс $I = 0$ в пересечении с плоскостью $\sigma'' = 0$ определяет *полукубическую параболу*

$$(3\sigma)^2 + (2\sigma')^3 = 0. \tag{31}$$

Между точками дискриминантной кривой в $\mathbb{R}^3$ и точками полукубической параболы (31) устанавливается биективное соответствие

$$M_1 \longleftrightarrow M_2,$$

а именно: касательная к дискриминантной кривой в точке M_1 пересекается с плоскостью $\sigma'' = 0$ в точке полукубической параболы M_2. При этом соприкасающаяся плоскость к дискриминантной кривой в точке M_1 пересекается с плоскостью $\sigma'' = 0$ по касательной к полукубической параболе в точке M_2.

Таким образом, смысл *подстановки Чирнгауза* и известной номограммы для определения действительных корней приведенного кубического уравнения состоит в следующем. Подстановка Чирнгауза $t = \tau - s$, где $s = \sigma''$, приводит кубическое уравнение $\sigma_t = 0$ к виду $\sigma_{\tau - s} = 0$, где отсутствует член с τ^2:

$$\begin{aligned} t = \tau - u'' \quad &\Rightarrow \quad u + u't + u''\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} = 0 \quad (\sigma_t = 0),\\ &\Leftrightarrow \quad u_{-s} + u'_{-s}\tau + \frac{\tau^3}{6} = 0 \qquad (\sigma_{\tau-s} = 0). \end{aligned}$$

При этом если t – корень кубического уравнения $\sigma_t = 0$, то τ – корень приведенного уравнения, и наоборот. Нахождение действительного корня уравнения $\sigma_t = 0$ сводится к проведению из точки $(\sigma, \sigma', \sigma'')$ соприкасающейся плоскости к дискриминантной кривой и определению на ней точки соприкосновения M_1, что на плоскости $\sigma\sigma'$ равносильно проведению из точки $(\sigma_{-s}, \sigma'_{-s})$ касательной к полукубической параболе и определению на ней точки касания M_2.

Спроектируем пространство $\mathbb{R}^3$ на плоскость инвариантов (i_0, i_1) оператора $\widetilde{P}$ (см. (25) и (27)):

$$\vartheta: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (\sigma, \sigma', \sigma'') \mapsto (i_0, i_1),$$
$$T\vartheta \ \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sigma'' & (\sigma'')^2 - \sigma' \\ 0 & 1 & -\sigma'' \end{pmatrix}.$$

Оператор $\widetilde{P}$ при отображении $T\vartheta$ аннулируется, так как проектирование осуществляется вдоль траекторий этого оператора, а два векторных поля, являющиеся инфинитезимальными симметриями оператора $\widetilde{P}$, проектируются в естественный репер на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$T\vartheta \, : \, \Big(\frac{\partial}{\partial\sigma}, \ \sigma''\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\sigma'}\Big) \ \mapsto \ \Big(\frac{\partial}{\partial i_0}, \ \frac{\partial}{\partial i_1}\Big). \tag{32}$$

Общая инфинитезимальная симметрия оператора $\widetilde{P}$ имеет вид

$$\mathcal{P} = \mu\frac{\partial}{\partial\sigma} + \mu'\frac{\partial}{\partial\sigma'} + \mu''\frac{\partial}{\partial\sigma''},$$

где μ – не выше, чем вторая первообразная некоторого инварианта оператора $\widetilde{P}$, то есть либо μ, либо μ', либо μ'' – инвариант $\widetilde{P}$. При этом $\mu' = \widetilde{P}\mu$ и $\mu'' = \widetilde{P}^2\mu$. Коэффициент μ называется *производящей функцией* инфинитезимальной симметрии $\mathcal{P}$. Между инфинитезимальными симметриями и их производящими функциями устанавливается биективное соответствие $\mu \leftrightarrow \mathcal{P}$. Действительно, если μ – коэффициент с указанными свойствами, то инфинитезимальная симметрия $\mathcal{P}$ этим определена, и, наоборот, если $\mathcal{P}$ – инфинитезимальная симметрия, то ее производящая функция определяется однозначно как производная $\mu = \mathcal{P}\sigma$. В частности, для инфинитезимальных симметрий из левой части соотношения (32) производящими функциями являются 1 и σ'' соответственно . Легко проверить, что общая инфинитезимальная симметрия $\mathcal{P}$ в проекции на плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет в репере из правой части соотношения (32) инвариантные коэффициенты.

Инварианты σ_0 и σ_1 допускают первообразные q и h 3-го и 2-го порядков соответственно:

$$q = \sigma\sigma'\sigma'' - \sigma^2 - \frac{4}{9}\,(\sigma')^3,$$

$$q' = -\frac{1}{3}\,(\sigma')^2\sigma'' + \sigma(\sigma'')^2 - \sigma\sigma',$$

$$q'' = \frac{1}{3}\,\sigma'(\sigma'')^2 + \sigma\sigma'' - \frac{4}{3}\,(\sigma')^2,$$

$$q''' = \sigma - \sigma'\sigma'' + \frac{1}{3}(\sigma'')^3 = i_0,$$

$$h = \frac{3}{2}\,\sigma\sigma'' - (\sigma')^2,$$

$$h' = \frac{3}{2}\,\sigma - \frac{1}{2}\sigma'\sigma'',$$

$$h'' = \sigma' - \frac{1}{2}\,(\sigma'')^2 = i_1,$$

то есть $q''' = i_0$ и $h'' = i_1$. Следовательно, функциям h', h и q'', q' соответствуют нетривиальные инфинитезимальные симметрии[24], которые обозначим $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ соответственно. В матричной записи эти инфинитезимальные симметрии имеют следующий вид:

$$(\mathcal{Q}\ \mathcal{S}\ \mathcal{T}\ \mathcal{U}) = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\ \frac{\partial}{\partial\sigma'}\ \frac{\partial}{\partial\sigma''}\right)\cdot\begin{pmatrix} h' & h & q'' & q' \\ i_1 & h' & i_0 & q'' \\ 0 & i_1 & 0 & i_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial i_0}\ \frac{\partial}{\partial i_1}\ \widetilde{P}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2}i_0 & -2i_1^2 & -\frac{4}{3}i_1^2 & -2i_0 i_1 \\ i_1 & \frac{3}{2}i_0 & i_0 & -\frac{4}{3}i_1^2 \\ 0 & i_1 & 0 & i_0 \end{pmatrix}.$$

При выводе этого соотношения использовалась следующая формула, связывающая два репера в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial i_0}\ \frac{\partial}{\partial i_1}\ \widetilde{P}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\ \frac{\partial}{\partial\sigma'}\ \frac{\partial}{\partial\sigma''}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sigma'' & \sigma' \\ 0 & 1 & \sigma'' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существенными являются симметрии $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{T}$, так как при проекции $T\vartheta$ оператор $\widetilde{P}$ аннулируется и симметрии $\mathcal{U}$ и $\mathcal{S}$, по существу, совпадают с симметриями $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{T}$, то есть на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеем:

$$\mathcal{Q} = -\frac{4}{3}\, i_1\mathcal{U}, \quad \mathcal{T} = \frac{2}{3}\,\mathcal{S}.$$

Операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{T}$ не коммутируют, но $\mathcal{Q}$ является инфинитезимальной симметрией для $\mathcal{T}$:

$$[\,\mathcal{Q}, \mathcal{T}\,] = \frac{1}{2}\,\mathcal{T}.$$

Дискриминант I в потоке $\mathcal{T}$ инвариантен, $\mathcal{T}I = 0$, а в потоке $\mathcal{Q}$ он увлекается по закону

$$\mathcal{Q}I = I \quad \Rightarrow \quad I_t = Ie^t. \tag{33}$$

Инвариантом векторного поля $\mathcal{Q}$ является величина $i_0^2 : i_1^3$. Общий инвариант операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{T}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ отсутствует.

Заключение

Общая ситуация такова. В сплошной среде некоторая система подвергается возмущениям. Сначала система увлекается некоторым потоком. Поток линеаризуется якобиевой матрицей A подобно касательному вектору к траектории движущейся точки. При одном возмущении преобразуется матрица $A \rightsquigarrow UAU^{-1}$ (действуют операторы Y_i), при другом – изменяется ее диагональ $A \rightsquigarrow A+tE$ (действует оператор P). При каждом возмущении выявляются инварианты. Операции коммутируют: $U(A+tE)U^{-1} = UAU^{-1}+tE$ (P – симметрия операторов Y_i), что говорит о существовании общих инвариантов (i_0, i_1). Каждый из них определяет сизигию – связь между теми и другими инвариантами. Общий инвариант более устойчив, чем инварианты, которые сизигией связываются. Однако и общие инварианты можно

[24]Функциям h'' и q''' соответствуют операторы $i_1\dfrac{\partial}{\partial i_0}$ и $i_0\dfrac{\partial}{\partial i_0}$.

«расшевелить» (действуют операторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{Q}$). Процедура завершается нахождением наиболее устойчивого инварианта[25] (дискриминанта I),

$$\rightsquigarrow\ A\ \rightsquigarrow\ (\sigma, \sigma', \sigma'')\ \rightsquigarrow\ (i_0, i_1)\ \rightsquigarrow\ I.$$

Последний инвариант I можно возмутить (в потоке $\mathcal{Q}$), но на плоскости $\mathbb{R}^2$ это не приводит к новому, еще более устойчивому инварианту.

То самое же происходит с общей матрицей порядка n. При этом можно сравнить коэффициенты полиномов и соответствующие дискриминанты с начальными и центральными моментами в теории вероятностей, с которыми они в точности совпадают (см. [16]). Таким образом, при отыскании инвариантов и установлением сизигий на самом деле исследуется устойчивость данной системы при соответствующем возмущении.

Summary

M. Rahula. The Great Heritage of Sophus Lie.

In the paper, we describe the floors T^kM, sector-bundles, and the theory of sector forms according to J.T. White. Using iterations of the tangent functor T, we construct tangent groups T^kG. Using the Lie – Cartan calculus, we study invariants of the group operators, their transformations under symmetries and stability.

Key words: jets, tangent functor, floor, tangent group, stability of invariants.

Литература

1. *Poincaré H.* Dernières pensées. – Paris: Ernest Flammarion, 1913.
2. *Ivey T.A., Landsberg J.M.* Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2003. – 378 p.
3. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
4. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen: 3 Bd. – Leipzig: Teubner, 1888–1893.
5. *Weyl H.* The Classical Groups. Their Invariants and Representations. – Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1939. – 314 p.
6. *Abraham R., Marsden J.E.* Foundations of Mechanics. – Reading, MA: Benjamin/Cummings Publ. Comp., 1978. – 806 p.
7. *Атанасиу Г., Балан В., Брынзей Н., Рахула М.* Касательные структуры, векторные поля и движения. – М.: Из-во ЛКИ, 2009. – 592 с.
8. *Bertram W.* Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2008. – 211 p.
9. *Godbillon C.* Géométrie Différentielle et Mécanique Analitique. – Paris: Hermann Publ., 1969. – 184 p.
10. *Rahula M.* New Problems in Differential Geometry. – WSP, 1993. – 172 p.
11. *White J.E.* The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry. – Boston, Mass.-London: Pitman Publ., 1982. – 272 p.
12. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and Cotangent Bundles. – N. Y.: Marcel Dekker Inc., 1973. – 423 p.

[25] В п. 2.2.1 эта процедура заканчивалась нахождением дискриминанта Δ.

13. *Вагнер В.В.* Теория дифференциальных объектов и основы дифференциальной геометрии // Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии. – М.: Иностр. лит., 1949. – С. 135–223.

14. *Атанасиу Г., Рахула М.* Новые аспекты дифференциальной геометрии второго порядка. К теории связностей. – Тарту: Tartu Univ. Press, 2007. – 211 с.

15. *Bröcker Th., Lander L.* Differentiable Germs and Catastrophes. – Cambridge: Cambridge. Univ. Press, 1975. – 179 p. = *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. – М.: Мир, 1977. – 208 с.

16. *Rahula M.* Les invariants des mouvements // Balkan Society of Geometry Proc. – 2007. V. 14. – P. 145–153.

Поступила в редакцию
27.05.09

Рахула Майдо – доктор физико-математических наук, профессор-эмеритус Тартуского университета, Эстония.

E-mail: *rahula@ut.ee*