

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛИ

Ш. Х. Солтаханов

С.-Петербургский государственный университет,
докторант, канд. физ.-мат. наук, Soltakhanov@yandex.ru

1. Введение. В монографии [1] изучалась проблема гашения колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы. Для решения поставленных задач применялся метод, основанный на применении принципа максимума Понтрягина. В книге [2] установлена связь данного подхода со смешанной задачей механики. Анализ этой связи показал [2], что для определения ускорения, с которым должна перемещаться упругая система таким образом, чтобы, находясь в начальный момент в состоянии покоя, она, пройдя за заданный промежуток времени заданное расстояние, опять оказалась в состоянии покоя, целесообразно использовать обобщенный принцип Гаусса [3]. Искомое ускорение, обеспечивающее гашение колебаний в конце пути, представится при этом в виде ряда по степеням времени t . Число членов этого ряда равно $2s + 2$, где s — число частот упругой системы. Эти частоты предполагаются различными. Частоты располагаются в порядке возрастания, и частоте ω_σ , $\sigma = \overline{1, s}$, соответствуют члены ряда $a_{2\sigma}t^{2\sigma} + a_{2\sigma+1}t^{2\sigma+1}$, где $a_{2\sigma}$ и $a_{2\sigma+1}$ — искомые постоянные. Перемещение упругой системы как абсолютно твердого тела учитывается при этом членами $a_0 + a_1t$.

Упругое тело, например консоль, имеет бесконечное число частот. Естественно, возникает вопрос, целесообразно ли в этом случае при перемещении основания консоли обеспечивать гашение колебаний в конце пути для всего спектра частот. Дело в том, что вклад высших форм колебаний консоли в ее полную энергию в момент остановки мал. Конструктивное решение данного вопроса предложено в работе [4]. В ней искомое ускорение, также представленное в виде ряда по степеням t , предлагается определять, исходя из минимизации полной энергии консоли в момент остановки ее основания. Кривая прогиба, входящая в выражение для этой энергии, определяется в [4] по методу интегриродифференциальных соотношений. В предлагаемой работе данная энергия вычисляется на основе применения к решению рассматриваемой задачи уравнений Лагранжа второго рода. Скачки ускорения консоли как абсолютно твердого тела в начале и в конце пути устраняются тем, что разложение ускорения в ряд по степеням времени t начинается с t^2 . Энергия колебаний рассматривается не только в конце пути, но и в процессе перемещения консоли. Этот расширенный энергетический подход позволяет подойти к данной задаче с новой точки зрения.

2. Применение уравнений Лагранжа второго рода к задаче гашения колебаний консоли. Пусть для простоты, как и в работе [4], консоль является однородной и имеет постоянное поперечное сечение. Эффективность применения уравнений Лагранжа к рассматриваемой задаче определяется тем, что при представлении прогиба консоли в виде ряда по собственным функциям

$$y_r(x, t) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_\sigma(t) X_\sigma(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

при времени перемещения, близком к периоду первой формы колебаний или его превосходящем, кинетическая и потенциальная энергии консоли найдутся в виде быстро сходящихся рядов

$$K_r = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_{\sigma} \dot{q}_{\sigma}^2}{2}, \quad \Pi = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_{\sigma} \omega_{\sigma}^2 q_{\sigma}^2}{2},$$

$$M_{\sigma} = \frac{m}{l} \int_0^l X_{\sigma}^2(x) dx, \quad \omega_{\sigma}^2 = \frac{EJ}{ml^3} \lambda_{\sigma}^4, \quad \sigma = \overline{1, \infty}.$$
(2.1)

Здесь l — длина консоли, m — ее масса, E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения, λ_{σ} — корни уравнения

$$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = -1.$$

Собственные формы и приведенные массы M_{σ} , $\sigma = \overline{1, \infty}$, таковы [2]:

$$X_{\sigma}(x) = \sin \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} + A_{\sigma} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} - \cos \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} \right),$$

$$A_{\sigma} = \frac{\operatorname{sh} \lambda_{\sigma} + \sin \lambda_{\sigma}}{\operatorname{ch} \lambda_{\sigma} + \cos \lambda_{\sigma}}, \quad M_{\sigma} = mA_{\sigma}^2.$$
(2.2)

Пусть функцией $\xi(t)$ задается перемещение основания консоли по направлению, перпендикулярному оси стержня. Тогда абсолютное перемещение сечения x консоли представится в виде

$$y_a(x, t) = \xi(t) + y_r(x, t).$$

Вычислив кинетическую энергию системы

$$K = \frac{m}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y_a}{\partial t} \right)^2 dx$$

и подставив ее в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial K}{\partial q_{\sigma}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_{\sigma}}, \quad \sigma = \overline{1, \infty},$$

придем к уравнениям

$$\ddot{q}_{\sigma} + \omega_{\sigma}^2 q_{\sigma} = - \frac{a_{\sigma}}{A_{\sigma}^2} \ddot{\xi}, \quad \sigma = \overline{1, \infty}.$$

Здесь

$$a_{\sigma} = \frac{1}{l} \int_0^l X_{\sigma}(x) dx, \quad \sigma = \overline{1, \infty}.$$

Перейдем к безразмерным переменным и к безразмерному времени τ по формулам

$$x_0 = \frac{\xi}{l}, \quad x_{\sigma} = - \frac{A_{\sigma}^2 q_{\sigma}}{a_{\sigma} l}, \quad \sigma = \overline{1, \infty}, \quad \tau = \omega_1 t,$$
(2.3)

и для простоты обозначим точкой производную по безразмерному времени. Тогда получим уравнения

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_\sigma + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \bar{\omega}_\sigma = \frac{\omega_\sigma}{\omega_1} = \left(\frac{\lambda_\sigma}{\lambda_1} \right)^2, \quad \sigma = \overline{1, s}. \quad (2.4)$$

Здесь u — искомое безразмерное ускорение основания консоли, а s — число учитываемых собственных форм колебаний.

При соударении шаров, как показал Рэлей, упругие колебания в них почти не возбуждаются по той причине, что и само ускорение центра масс каждого из шаров, и производная от него по времени в начале и в конце соударения равны нулю [5]. Учитывая это обстоятельство, перемещение x_0 подчиним следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} x_0(0) = \dot{x}_0(0) = \ddot{x}_0(0) = u(0) = \dot{x}_0(0) = \ddot{x}_0(0) = \dot{u}(0) = 0, \\ x_0(T) = a, \quad \dot{x}_0(T) = \ddot{x}_0(T) = u(T) = \dot{x}_0(T) = \ddot{x}_0(T) = \dot{u}(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь T — время перемещения, а a — его величина.

Энергия колебаний консоли, как следует из выражений (2.1)–(2.3), такова:

$$K_r + \Pi = \frac{ml^2\omega_1^2}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2). \quad (2.6)$$

Пусть стержень является абсолютно твердым телом. Тогда ускорение u^* , отыскиваемое в виде

$$u^* = C_1\tau^2 + C_2\tau^3 + C_3\tau^4 + C_4\tau^5,$$

однозначно определится из граничных условий (2.5). Перемещение, соответствующее этому ускорению, обозначим через x_0^* .

Отметим, что функция $u^*(\tau)$ обладает следующим свойством [2]:

$$u^*(\tau) = -u^*(T - \tau).$$

Отсюда следует, что $u^*(T/2) = 0$. Учитывая это, а также то, что $u^*(\tau) > 0$ при $0 < \tau < T/2$, находим максимальную скорость основания:

$$v_{\max} = l\omega_1 v_m, \quad v_m = \dot{x}_0^* \left(\frac{T}{2} \right).$$

Принимая за меру энергии величину

$$K_* = \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

в соответствии с выражением (2.6) получаем

$$En(\tau) = \frac{K_r + \Pi}{K_*} = \frac{1}{v_m^2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2). \quad (2.7)$$

Введем в рассмотрение максимальное ускорение консоли как абсолютно твердого тела:

$$\ddot{\xi}_{\max}^* = l\omega_1^2 u_m, \quad u_m = u^*(\tau_*).$$

Здесь τ_* — тот момент времени, когда функция $u^*(\tau)$ максимальна.

Искомое ускорение $\ddot{\xi}$ гибкой консоли, вычисленное в долях найденного выше ускорения, таково:

$$\bar{u} = \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\xi}_{\max}^*} = \frac{u}{u_m}.$$

Функция $u(\tau)$, являющаяся решением рассматриваемой задачи, зависит непосредственно и от a , и от T . Новая же безразмерная величина \bar{u} , рассматриваемая как функция аргумента τ/T , от величины a не зависит. Параметром ее является только отношение времени перемещения к периоду первой формы колебаний. Учитывая независимость искомого решения от величины a , при расчетах полагаем $a = 1$.

3. Гашение колебаний консоли как краевая задача и как задача минимизации величины $En(T)$. Первоначально задачу о гашении колебаний консоли в момент времени T рассмотрим как краевую задачу, т. е. дополним условия (2.5) условиями

$$x_\sigma(0) = \dot{x}_\sigma(0) = x_\sigma(T) = \dot{x}_\sigma(T) = 0, \quad \sigma = \overline{1, s}. \quad (3.1)$$

Краевая задача (2.4), (2.5), (3.1) может быть решена при представлении искомой функции $u(\tau)$ в виде суммы любых линейно независимых функций, число которых равно $2s+6$. В книге [2] установлена связь наложения краевых условий на движение, описываемое уравнениями (2.4), со смешанной задачей механики [6]. Из этого следует, что если при решении рассматриваемой краевой задачи выбрана система линейно независимых функций, то каждой такой системе функций будет соответствовать наложение связи порядка $2s+8$. В соответствии с обобщенным принципом Гаусса [3] порядка $2s+6$ в рассматриваемой задаче наименьшее «принуждение» при связях порядка $2s+8$ будем иметь в том случае, когда искомая функция $u(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$u^{(2s+6)} = 0.$$

Отсюда при учете того, что $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, вытекает, что согласно обобщенному принципу Гаусса ускорение следует искать в виде

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{2s+4} C_k \tau^{k+1}, \quad (3.2)$$

где C_k — искомые постоянные, алгоритм определения которых описан в книге [2].

Отметим, что функции $u(\tau)$, $x_0(\tau)$, $x_\sigma(\tau)$, $\sigma = \overline{1, s}$, являющиеся решением данной задачи, обладают следующими свойствами [2]:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= -u(T - \tau), \\ x_0(\tau) &= a - x_0(T - \tau), \\ x_\sigma(\tau) &= -x_\sigma(T - \tau), \\ \sigma &= \overline{1, s}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь метод минимизации величины $En(T)$. Как и в работе [4], ограничимся случаем, когда функция $u(\tau)$, удовлетворяющая условиям (2.5), имеет или два, или четыре свободных параметра. Итак, пусть

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^4 C_k \tau^{k+1} + \alpha \tau^6 + \beta \tau^7 + \gamma \tau^8 + \delta \tau^9. \quad (3.3)$$

Для простоты описания метода ограничимся двумя параметрами, т. е. положим $\gamma = \delta = 0$. Определив из уравнения $\ddot{x}_0 = u$ и из условий (2.5) постоянные C_k , $k = \overline{1, 4}$, как линейные функции параметров α и β , получим

$$u = u(\tau, \alpha, \beta),$$

$$En(T, \alpha, \beta) = \frac{1}{v_m^2} \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{A_k^2} (\dot{x}_k^2(T, \alpha, \beta) + \bar{\omega}_k^2 x_k^2(T, \alpha, \beta)).$$

Здесь

$$\dot{x}_k(T, \alpha, \beta) = \int_0^T u(\tau, \alpha, \beta) \cos \bar{\omega}_k(T - \tau) d\tau,$$

$$x_k(T, \alpha, \beta) = \frac{1}{\bar{\omega}_k} \int_0^T u(\tau, \alpha, \beta) \sin \bar{\omega}_k(T - \tau) d\tau,$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Число N выбиралось из условия, чтобы погрешность вычисления полной энергии консоли не превосходила 0.01 %. Расчеты показали, что для этого при $T/T_1 \geq 0.6$ достаточно положить $N = 8$. Искомые параметры α и β определялись из системы линейных уравнений

$$a_{11} \alpha + a_{12} \beta = -f_1(0, 0),$$

$$a_{21} \alpha + a_{22} \beta = -f_2(0, 0),$$

где

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{\partial En(T, \alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad f_2(\alpha, \beta) = \frac{\partial En(T, \alpha, \beta)}{\partial \beta},$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial f_1}{\partial \beta}, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \beta}.$$

Аналогично строится решение и при четырех свободных параметрах.

4. Анализ результатов расчетов. Из выражений (3.2) и (3.3) следует, что решение по методу минимизации при двух свободных параметрах следует сравнивать с решением, соответствующим гашению одной формы ($s = 1$), а при четырех — гашению двух форм ($s = 2$).

Полная энергия колебаний консоли, оставшаяся после гашения s форм, такова:

$$En^{(s)}(T) = \frac{1}{v_m^2} \sum_{k=s+1}^N \frac{a_k^2}{A_k^2} (\dot{x}_k^{(s)}(T) + \bar{\omega}_k^2 (x_k^{(s)}(T))^2),$$

где

$$\dot{x}_k^{(s)}(T) = \int_0^T u^{(s)}(\tau) \cos \bar{\omega}_k(T - \tau) d\tau,$$

$$x_k^{(s)}(T) = \frac{1}{\bar{\omega}_k} \int_0^T u^{(s)}(\tau) \sin \bar{\omega}_k(T - \tau) d\tau,$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Здесь $u^{(s)}(\tau)$ — решение краевой задачи при гашении s форм. Число N при вычислении энергии полагалось таким же, как и в методе минимизации.

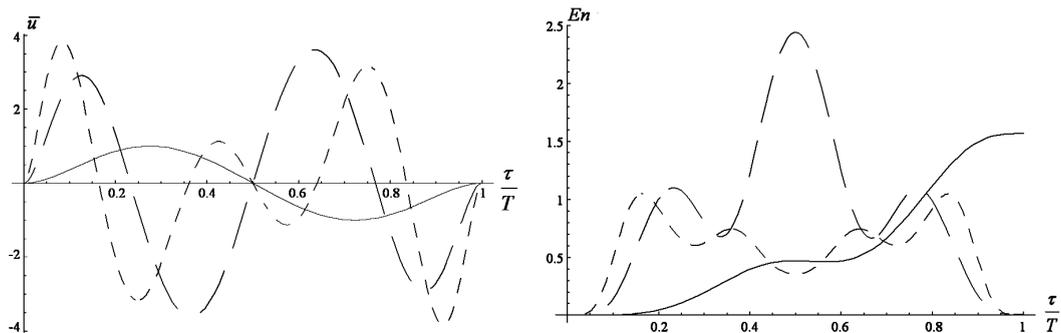


Рис. 1. Результаты расчетов при $T/T_1 = 0.8$.

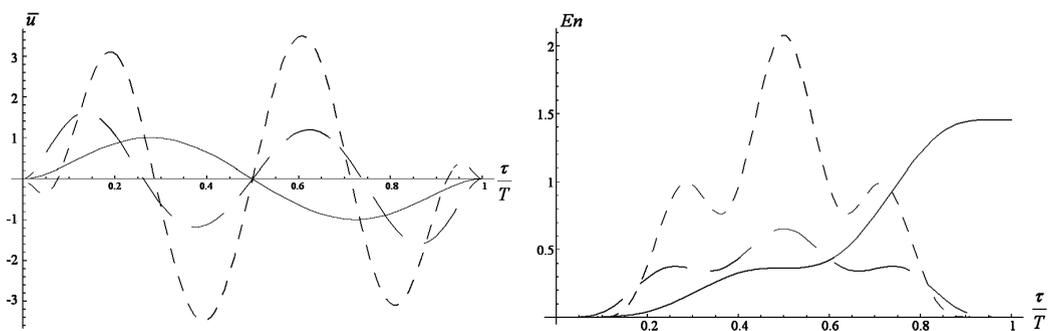


Рис. 2. Результаты расчетов при $T/T_1 = 1.12$.

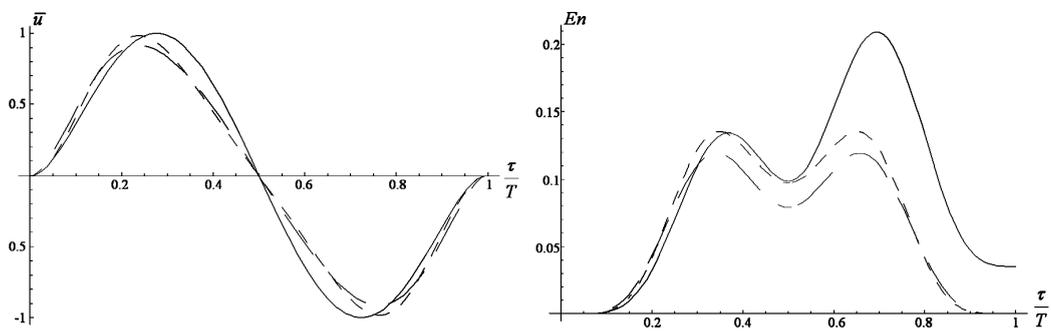


Рис. 3. Результаты расчетов при $T/T_1 = 2$.

Величины $En^{(s)}(T)$ быстро убывают с ростом отношения T/T_1 . Их значения приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения $En^{(s)}(T)$

$s \backslash T/T_1$	0.6	0.8	1	2
1	0.3954	0.008575	$8.205 \cdot 10^{-7}$	$1.331 \cdot 10^{-7}$
2	0.01593	$0.1146 \cdot 10^{-3}$	$3.059 \cdot 10^{-7}$	$2.059 \cdot 10^{-10}$

Степень гашения характеризуется величиной $En^{(s)}(T)/En^*(T)$, где $En^*(T)$ — энергия колебаний в конце пути при рассмотрении консоли как абсолютно твердого тела. Данные значения приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения $En^{(s)}(T)/En^*(T)$

$s \backslash T/T_1$	0.6	0.8	1	2
1	0.3245	0.005475	$5.167 \cdot 10^{-7}$	$3.771 \cdot 10^{-6}$
2	0.01308	$0.7320 \cdot 10^{-4}$	$1.926 \cdot 10^{-7}$	$5.831 \cdot 10^{-9}$

Величины $En(T, \alpha, \beta)$ и $En(T, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ будут соответственно меньше величин $En^{(1)}(T)$ и $En^{(2)}(T)$. Эти разности, выраженные в процентах

$$\frac{En^{(1)}(T) - En(T, \alpha, \beta)}{En(T, \alpha, \beta)} 100\%, \quad \frac{En^{(2)}(T) - En(T, \alpha, \beta, \gamma, \delta)}{En(T, \alpha, \beta, \gamma, \delta)} 100\%,$$

приведены в таблице 3.

Таблица 3. Различие в процентах между краевой задачей и задачей минимизации

$s \backslash T/T_1$	0.6	0.8	1
1	29.9	0.437	$0.576 \cdot 10^{-4}$
2	4.66	0.555	0.0633

Расчеты показали, что величинами, приведенными в таблице 3, достаточно точно характеризуется зависимость от параметра T/T_1 разности между ускорениями, вычисленными этими двумя методами.

Результаты вычислений, приведенные в таблице 3, говорят о том, что отношение $T/T_1 = 0.8$ может быть выделено как особое в том смысле, что при его уменьшении различие между данными двумя методами гашения колебаний консоли резко возрастает и, наоборот, при его возрастании быстро убывает. Проблема гашения колебаний консоли при $T/T_1 < 0.8$ требует особого подхода. Дело в том, что при малом отношении T/T_1 гашение первой формы осуществляется при очень больших значениях модуля функции $\bar{u}(\tau/T)$ и, как следствие, при очень большой энергии колебаний в процессе перемещения. Поэтому случай, когда $T/T_1 < 0.8$, далее не рассматривается.

Результаты расчетов для трех характерных значений T/T_1 приведены на рис. 1–3. На них сплошные линии соответствуют стержню как абсолютно твердому телу, кривые, изображенные длинными штрихами, соответствуют гашению первой формы, а кривые с короткими штрихами — гашению двух форм.

Характерное значение $T/T_1 = 0.8$ обсуждалось выше. При значении $T/T_1 = \lambda_1^2/\pi = 1.12$ расчеты были проведены в работе [4]. Отметим, что в этой статье ускорение консоли как абсолютно твердого тела задавалось полиномом первой степени, а минимизация

полной энергии в момент T при двух и четырех параметрах проводилась соответственно при полиномах третьей и пятой степеней. Третье значение $T/T_1 = 2$ выбрано потому, что при этом, как видно из таблиц 1 и 2, колебания консоли в момент T настолько малы, что нет необходимости их гасить.

Из приведенных графиков функций $\bar{u}(\tau/T)$ и $En(\tau/T)$ можно сделать следующий вывод: при $0.8 \leq T/T_1 < 1$ целесообразно гашение первых двух форм, при $1 \leq T/T_1 \leq 2$ достаточным является гашение первой формы, а при $T/T_1 > 2$ вообще нет необходимости гасить колебания.

Литература

1. Черноуцько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, 2009. 344 с.
3. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.
4. Костин Г. В., Саурин В. В. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Докл. РАН. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.
5. Зегжда С. А. Соударение упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1997. 316 с.
6. Зегжда С. А., Юшков М. П. Смешанная задача динамики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5 С. 628–630.

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2009 г.