КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ФРАКТАЛЬНЫЕ ЛАБИРИНТЫ

Грачев В.И., Потапов А.А., Потапов В.А.

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова, Российская академия наук, http://www.cplire.ru
125009 Москва, Российская Федерация

Поступила в редакцию 04.11.2011

Приведены основные сведения о фрактальных лабиринтах, процессах аномальной диффузии и полетах Леви. Показано, что математика дробных операторов является необходимым аппаратом описания сложных технических и природных систем с фрактальной структурой.

Ключевые слова: **фракталы, фрактальные лабиринты, полеты Леви, аномальная диффузия, дробные операторы.**

УДК 537.86:519.22

Содержание

1. **Введение (103).**
2. **Фрактальный лабиринт: основные положения (104).**
3. **Дробное уравнение диффузии и оператор Римана-Лиувилля (105).**
4. **Обобщенное уравнение диффузии и оператор Вейля (106).**
5. **Заключение (107).**

Литература (108).

1. ВВЕДЕНИЕ

Сложные системы и исследование их структурных и динамических свойств играют доминирующую роль в точных и естественных науках. Такие «структуры с вариациями» [1] характеризуются большим разнообразием элементарных частиц, сильным взаимодействием между частицами и непредсказуемой или аномальной эволюцией. Их описание не укладывается в жесткие рамки евклидовых линий и поверхностей. С появлением фракталов их описание стало реальностью, при этом физика происходящих в фрактальной среде процессов, описывается необычными разделами математики. Приведем лишь один пример [2]. Средний квадрат расстояния, на которое удаляется от исходной точки случайно блуждающая частица (с равной вероятностью в любую сторону), пропорционален времени, если речь идет об обычной, сплошной среде. В фрактальной среде это не так. Здесь очевидно, что случайно блуждающая частица будет удаляться от места старта медленнее, так как далеко не все направления для нее здесь доступны. Средний квадрат расстояния для фрактальной среды оказывается пропорциональным некоторой дробной степени времени, показатель которой связан с фрактальной размерностью среды. Это, в частности, означает, что диффузия во фрактальной среде происходит не так, как в обычной, сплошной среде. Множество препятствий (узких мест, крутых поворотов и тупиков) затрудняют продвижение частиц и замедляют диффузию. Отсюда и дробные показатели в различных зависимостях.

Замедление диффузии во фракталах столь существенно, что она перестает удовлетворять классическому закону Фика и — как следствие — уравнению диффузии. Не спасает положения и попытка ввести переменный коэффициент диффузии, зависящий от концентрации частиц. Возникает новое, интегро-дифференциальное уравнение, содержащее новый необычный объект — производную (по времени) дробного порядка, связанного с фрактальной размерностью среды. Другой пример – из области телекоммуникаций, а именно, Интернет – лабиринт фрактальной структуры с порталами.

Цель статьи – дать элементарные сведения о фрактальных лабиринтах с привлечением теории дробного исчисления.

В последние годы интенсивно развиваются методы синтеза фрактальных искусственных композитов и метаматериалов, таких, например, как сверхминиатюрные фрактальные антенны, фрактальные структуры в фотонных и магнонных кристаллах, моделирование фрактальных импедансов и дробных операторов, перколяционный синтез, фрактальные лабиринты, канторовские блоки и т.д. [3-8]. Фрактальные

лабиринты довольно часто встречаются в природе и технике. К ним следует отнести: транспортные и коммуникационные сети, системы сбора и распределения ресурсов и информации, речные системы, системы кровоснабжения, молниевые разряды и т.д. Фрактальный характер геометрии этих систем предопределяет особенности их динамического поведения и транспортных свойств.

2. ФРАКТАЛЬНЫЙ ЛАБИРИНТ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Определение: **фрактальный лабиринт** ≡ **лабиринтные фракталы** – *топологическая связная структура с фрактальной размерностью* $d_f > 1$ *и скейлинговым характером проводящих путей.* В качестве примеров для исследования таких структур используют обычно модельные построения П.Морана [9, 10, 11], Л.Кристи [12] и др. Будем следовать далее построению Л.Кристи, пример которого – на **рис. 1**.

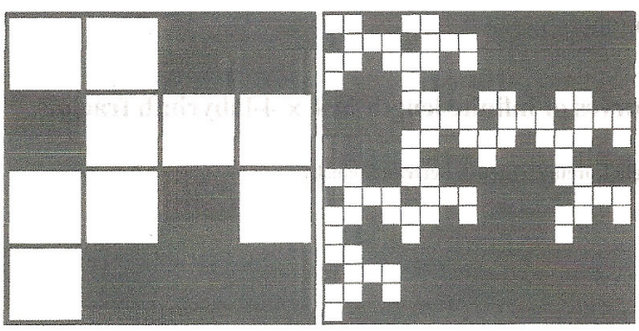
Пусть x, y, q – точки единичного отрезка $x, y, q \in [0, 1]$ и квадрат $Q = [x, x + q] \times [y, y + q]$ есть подмножество единичного квадрата $Q \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$. Тогда для любой точки этого квадрата $(z_x, z_y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ определяем функцию $P_Q(z_x, z_y) = (qz_x + x, qz_y + y)$.

Получим подмножества точек единичного квадрата, используя следующую итерационную процедуру. При $m \geq 1$ такое множество точек имеет вид

$$S_{i,j,m} = \left\{(x,y) \mid \frac{i}{m} \leq x \leq \frac{i+1}{m} \; and \; \frac{j}{m} \leq y \leq \frac{j+1}{m}\right\}$$

$$S_m = \left\{S_{i,j,m} \mid 0 \leq i \leq m-1 and 0 \leq j \leq m-1\right\}$$

Т.е. при $m = 1$ имеем весь единичный квадрат $S_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$; при $m = 2$ - его половину $S_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1/2\} +$



а) б)

Рис. 1. *4x4-лабиринтные фракталы, а)* L_1, *б)* L_2 [12].

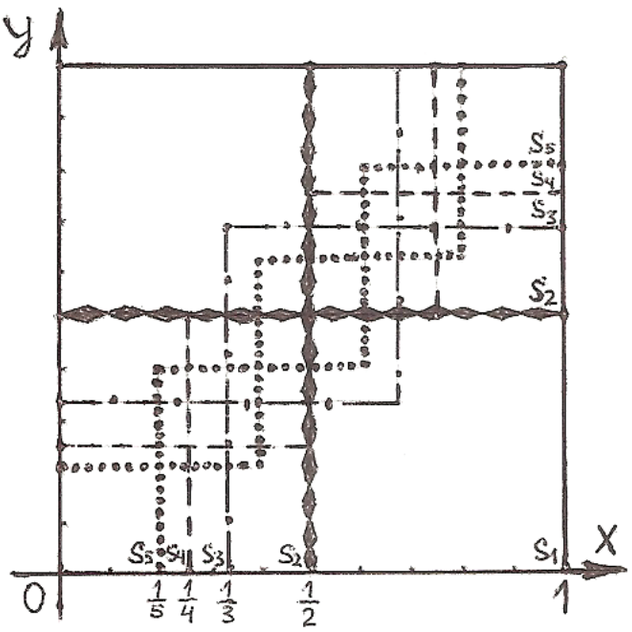


Рис. 2. *Множества* S_m *на единичном квадрате при* $1 \leq m \leq 5$.

$\{(x,y) \mid 1/2 \leq x \leq 1, 1/2 \leq y \leq 1\} = S_{21} + S_{22}$; при $m = 3$ - его треть $S_3 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1/3, 0 \leq y \leq 1/3\} + \{(x,y) \mid 1/3 \leq x \leq 2/3, 1/3 \leq y \leq 2/3\} + \{(x,y) \mid 2/3 \leq x \leq 1, 2/3 \leq y \leq 1\} = S_{31} + S_{32} + S_{33}$, и т.д. Эти множества компактны, их монотонно убывающая последовательность для $1 \leq m \leq 5$ приведена на **рис. 2.**

Положим $W_1 \subset S_m$ и назовем его *множеством белых квадратов первого порядка* на квадрате 4x4 единичных квадратов (рис. 1а). Тогда *множество черных квадратов первого порядка* определим как $B_1 = S_m \setminus W_1$.

Для n ≥ 2 имеем

$$S_{m^n} = \left\{S_{i,j,m^n} \mid 0 \leq i \leq m^n - 1, 0 \leq j \leq m^n - 1\right\}$$

Его подмножество

$$W_n = \bigcup_{W_1 \in W_1, W_{n-1} \in W_{n-1}} \left\{P_{W_{n-1}}(W_1)\right\}$$

есть *множество белых квадратов порядка n.* М*ножество черных квадратов порядка n* определим через $B_n = S_{m^n} \setminus W_n$.

Определим на множестве W_n ассоциированный граф $G(W_n)$, конечное множество вершин которого есть белые квадраты W_n, а ребер (дуг) – общие стороны неупорядоченных пар белых квадратов. Т.е. между любыми двумя точками графа есть дуга. Последовательность вершин есть *путь* в графе множества и если между любыми двумя его вершинами компонентой связности является только один путь и если путь по всему графу

не является замкнутым (циклом), то такой граф есть локально связное ациклическое множество – дерево, дендрит (гр. dendron – дерево). При этом верхний ряд множества W_n по границе дендрита есть множество всех белых квадратов в $\{S_{i,m^n-1,m^n} \mid 0 \le i \le m^n - 1\}$. Нижний ряд, левый и правый граничные столбцы определяются аналогично. И тогда *верхний выход* T_n из множества W_n есть один и только один верхний квадрат в верхнем ряду такой, что в том же столбце имеется белый квадрат в нижнем ряду. *Нижний выход* определяется аналогично. *Левый выход* в W_n есть также один и только один белый квадрат в левом столбце порядка n такой, что имеется белый квадрат в том же ряду в правом столбце порядка n. *Правый выход* определяется аналогично. Т.е. каждое ребро (дуга) графа имеет только один выход. Наконец, если имеется белый квадрат в углу множества W_n, то в противоположном по диагонали углу белого квадрата нет. Такое дендритное множество с выходами называют лабиринтным множеством. При $m \ge 3$, $W_1 \subset S_m$ и $n \ge 1$ это – $m \times m$-лабиринтное множество.

Выделим на множестве W_n ($n \ge 1$) последовательность компактных множеств $L_n = \bigcup_{\mathrm{W} \in W_n} \mathrm{W}$. Тогда $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть монотонно убывающая последовательность компактных множеств, *предел* которой есть $L_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$, т.е. *предел множества* W_1. Предельное множество L_∞ лабиринтного множества W_1 называется *лабиринтным фракталом*. Его верхний выход есть предел $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$. Другой выход определен аналогично. И $(x,1)$, $(x,0) \in L_\infty$ если и только если $(x,1)$ – точка верхнего выхода L_∞ и $(x,0)$ – нижнего выхода L_∞. Для левого и правого выходов справедливо аналогичное утверждение.

В связных множествах пересечение разложений любых двух подмножеств есть дуга между их элементами [13], единственная дуга между любой парой точек в ограниченном лабиринтном множестве, длина которой бесконечна, а множество всех ее точек, в которых не существует касательной к дуге, является плотным. Хаусдорфова или фрактальная размерность $d_H(L_\infty) = \log|W|/\log m$ лабиринтного фрактала, как для любого самоподобного множества W такого, чей $|W| > m$, есть $d_H > 1$. Для шести возможных пар выходов (рис. 1) – сверху вниз, слева направо, сверху направо, справа вниз, снизу налево, слева вверх – существует неотрицательная *матрица пути лабиринтного множества*, элемент которой в ряду x и столбце y есть число y-квадратов в x-пути. Матричное умножение отражает замену путей.

3. ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ И ОПЕРАТОР РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Описание фрактальных систем не укладывается в традиционные рамки дифференциальных уравнений целого порядка. Более точно эти процессы и объекты количественно описываются операторами дробного интегро-дифференцирования $D^{\alpha}[f(t)]$, где $-1 < \alpha < 1$ [3, 14-19]. Физически операторы дробного интегрирования играют роль своеобразных “фильтров”, выделяющих только те составляющие, которые локализованы на фрактальных (дробных) множествах исследуемого процесса. Наличие в уравнениях дробной производной принято трактовать как отражение особого свойства процесса/системы – память или немарковость (эредитарность). Отметим, что в последнее время интенсивно обсуждаются фрактальные объекты и процессы, имеющие отрицательные и комплексные дробные степени [19].

Фрактальные лабиринты и процессы в них можно описать операторами с вещественным показателем степени. При этом диффузия – аномальная диффузия описывается дробным уравнением диффузии FDE (Fractional Diffusion Equation) [3, 14-20]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t), \qquad (1)$$

где $W(x, t)$ – функция плотности вероятности, зависящая, в общем, от особенностей геометрии взаимодействия; K_α – обобщенный коэффициент диффузии и оператор ${}_0D_t^{1-\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} {}_0D_t^{-\alpha}$ для $0 < \alpha < 1$ – оператор Римана-Лиувилля, который определяется интегральным соотношением [3, 14-20]:

$${}_0D_t^{1-\alpha} W(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \frac{W(x,t')}{(t-t')^{1-\alpha}} \qquad (2)$$

– прямое продолжение кратного интеграла Коши для произвольной комплексной α с $Re(\alpha) > 0$. Дробная производная устанавливается с помощью дробного интегрирования и далее – обычного

дифференцирования в соответствии с формулой

$$ {}_{t_0}D_t^{\beta} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\, {}_{t_0}D_t^{\beta-n} f(t) $$

с $Re(\beta) > 0$, натуральное число n удовлетворяет неравенству $n \geq Re(\beta) > n-1$.

Таким образом, интегро-дифференциальная природа дробного оператора Римана-Лиувилля ${}_0D_t^{1-\alpha}$ в соответствии с (2), и с интегральным ядром вида $M(t) \propto t^{\alpha-1}$ обеспечивает немарковскую природу субдиффузионного процесса, определяемого FDE (1).

Действительно, расчет среднего квадрата смещения может быть выведен из FDE (1) за счет интегрирования $\int d(x)x^2$, и приводится к виду

$$ (d/dt)\left\langle x^2(t)\right\rangle = {}_0D_t^{1-\alpha} 2K_\alpha = 2K_\alpha t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) $$

Переписывая FDE (1) в эквивалентной форме

$$ {}_0D_t^{\alpha} W - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} W_0(x) = K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \qquad (3) $$

получим исходное значение $W_0(x)$ с формой обратного степенного закона $(t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha))W_0(x)$, а не экспоненциального, как для стандартной диффузии [3, 14, 17]. При этом в пределе $\alpha \to 1$, FDE (1) сводится ко второму закону Фика, как это и должно быть.

Константа обобщённой диффузии K_α, которая появляется в FDE (1), определяется как $K_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^\alpha$ и в терминах шкалы σ и τ приводит к размерности $[K_\alpha] = см^2\, с^{-\alpha}$.

Использование дробных операторов дает также относительно простой способ вычисления моментов. Будучи очень простым для подхода непрерывного во времени случайного блуждания в свободно-силовой диффузии, преимущество дробного подхода очевидно в тех случаях, когда нелинейная внешняя сила действует на пробную частицу. Таким образом, интегрирование основного дробного уравнения приводит к обычному дробному дифференциальному уравнению, в котором моменты могут быть случайными.

4. ОБОБЩЕННОЕ ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ОПЕРАТОР ВЕЙЛЯ

Обобщенное диффузионное уравнение дробного порядка строится с использованием модели непрерывного по времени случайного блуждания, когда события переноса подчиняются широкой статистике [17]. При этом функция плотности вероятности длины скачка есть $\lambda(x) = \int_0^\infty dt\psi(x,t)$ и время ожидания $w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x,t)$, т.е. $\lambda(x)dx$ представляет вероятность длины скачка в интервале $(x, x+dx)$, а $w(t)dt$ – вероятность времени ожидания в интервале $(t, t+dt)$. Тогда процессы в модели определяются характерным временем ожидания $T = \int_0^\infty dtw(t)t$ и дисперсией длины скачка $\Sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\lambda(x)x^2$. Процесс непрерывного по времени случайного блуждания может быть описан соответствующим обобщением основного уравнения.

Функция плотности вероятности $W(x,t)$ быть в точке x в момент времени t подчиняется алгебраическому соотношению в пространстве Фурье-Лапласа

$$ W(k,u) = \frac{1-w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1-\psi(k,u)} \qquad (4) $$

где $W_0(k)$ – Фурье-преобразование начального условия $W_0(x)$.

Случай конечного характеристического времени ожидания T и расходящейся дисперсии длины скачка Σ^2 может быть смоделирован распределением Леви для длины скачка, т.е.

$$ \lambda(k) = exp(-\sigma^\mu |k|^\mu) \approx 1 - \sigma^\mu |k|^\mu \qquad (5) $$

при $1<\mu<2$, соответствующее асимптотическое поведение имеет вид

$$ \lambda(x) \approx A_\mu \sigma^\mu |x|^{-1-\mu} \qquad (6) $$

для $|x| >> \sigma$.

Из-за конечности T этот процесс – марковский. Подставляя асимптотическое разложение (5) в соотношение (4), получаем $W(k,u) = \frac{1}{u + K^\mu |k|^\mu}$ из которого после преобразования Фурье и Лапласа выводится FDE:

$$ \frac{\partial W}{\partial t} = K^\mu\, {}_{-\infty}D_x^\mu W(x,t) \qquad (7) $$

Здесь ${}_{-\infty}D^\mu{}_x$, – дробный оператор Вейля [3, 14-19]. Константа общей диффузии есть $K^\mu \equiv \sigma^\mu/\tau$ и имеет размерность $[K^\mu] = см^\mu с^{-1}$. Фурье-преобразование пропагатора может быть легко вычислено:

$W(k,t) = exp(-K^\mu t|k|^\mu)$.

Оно есть характеристическая функция центрального и симметричного распределения

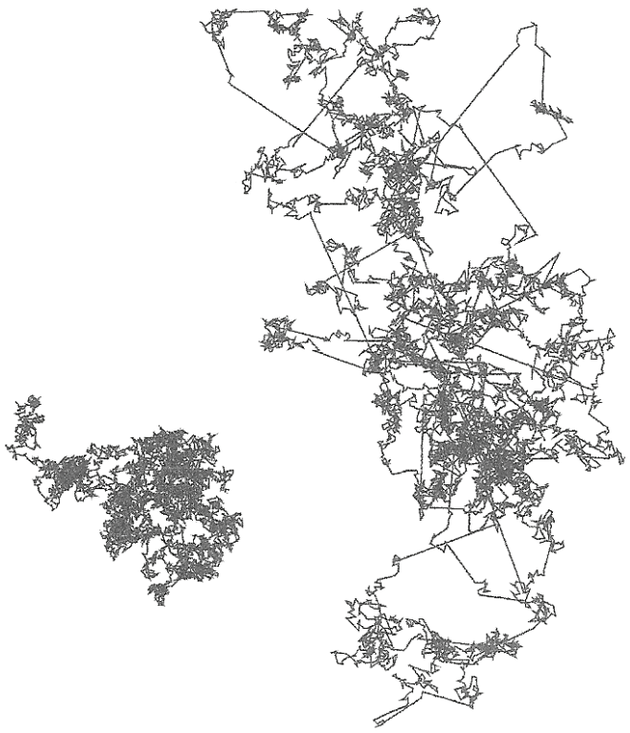


Рис. 3. *Сравнение траекторий броуновского субдиффузного случайного блуждания (слева) и блуждания Леви с индексом μ = 1.5 (справа). Обе траектории имеют одинаковое число шагов (около 7000).*

Леви, и как таковое используется для генерации полётов Леви [3, 17].

На **рис. 3** компьютерное моделирование [17] полёта Леви показано справа в сравнении с траекторией блуждания с конечной дисперсией Σ^2 длины прыжка, на том же числе шагов.

Из рис. 3 видно, что хотя обе траектории статистически самоподобны, траектория Леви-блуждания обладает фрактальной размерностью, характеризующей островную структуру кластеров малых шагов, связанных с большим шагом.

В связи с асимптотическим характером функции плотности вероятности длины скачка (6), очень длинные скачки возникают со значительно более высокой вероятностью, чем для экспоненциально убывающей функции плотности вероятности длины скачка, гауссовой по классике. Природа масштабирования функции плотности вероятности длины скачка, выраженная формулой (6), приводит к кластерной природе полётов Леви; локальное движение иногда прерывается длинным скачком с максимальным масштабом. То есть можно найти кластеры локального движения внутри кластеров. В самом деле, траектория полёта Леви имеет фрактальную размерность $d_f = \mu$. Наоборот, левая на рис. 1 траектория с $\Sigma^2 < \infty$ заполняет полностью двумерное пространство неразличимыми кластерами, так как все прыжки примерно одной длины.

Таким образом, для динамики частиц во фрактальных лабиринтах определяющее значение имеют оператор Римана-Лиувиля ${}_0D_t^\alpha$ для $t_0 = 0$ и оператор Вейля ${}_{-\infty}D_x^\mu$ для $t_0 = -\infty$. Математически выражение ${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t)$ есть свертка Лапласа, в то время как ${}_{-\infty}D_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} * f(x)$ представляет свертку Фурье. Таким образом, преобразования Лапласа и Фурье являются неотъемлемым инструментом в решении дробных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модели динамики переноса в физических системах на основе стохастических блужданий и фрактальных лабиринтов могут быть использованы в качестве связующего звена среди математиков, физиков, химиков, инженеров, биофизиков экономистов, логистиков и т.д. Случайные блуждания являются очень удобным инструментом при разработке физической картины процессов, лежащих в основе динамики систем, которые имеют вероятностную природу. Вместе с тем для решения проблем, включающих граничные значения и внешние поля, подход дифференциального уравнения более удобен. В работе [17] показана универсальность дробных уравнений диффузии, диффузии-переноса и описания уравнением Фокера-Планка, обобщающего стандартные их эквиваленты. Фрактальное кинетическое уравнение объясняется сингулярными зонами в фазовом пространстве, которые создают области залипания, а также фрактальной структурой (во времени и геометрии) этого усеченного пространства.

Топология фрактальных лабиринтов явилась в последние несколько лет предметом быстро растущего интереса. Расширение теории случайного блуждания до включения обобщенной статистики, которая принципиально не следует центральной предельной теореме, и эффектов эредитарности, нарушающих марковскую природу

первых этапов изучения случайных блужданий [3, 14-21], создает функциональный мощный инструмент, достаточный для описания всех особенностей сложных природных и технических систем фрактальной структуры.

В итоге заметим, что в настоящее время открываются широкие перспективы для приложений фрактальных лабиринтов в различных областях естествознания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golgenfeld N, Kadanoff LP. *Science*, 1999, 284:87.
2. Данилов ЮА. *Прекрасный мир науки*. Сб. Сост. АГ Шадтина. Под общ. ред. ВИ Санюка, ДИ Трубецкого. М., Прогресс-Традиция, 2008, 384 с.
3. Потапов АА. *Фракталы в радиофизике и радиолокации*. М., Логос, 2002, 664 с.; Потапов АА. *Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки*. Изд. 2, перераб. и доп. М., Университетская книга, 2005, 848 с.
4. Потапов АА. Фрактальные антенны, импедансы и радиопоглощающие покрытия – "умные" материалы. Труды 1-й межд. конф. «*Наноструктурные материалы-2008: Беларусь–Россия–Украина* (НАНО-2008)». Минск, Белорус. наука, 2008, с. 532.
5. Потапов АА. Фракталы, скейлинг, дробные операторы – применение в нанотехнологиях? Труды 1-й конф. Нанотехнологич. общества России "*Развитие нанотехн. проекта в России: состояние и перспективы*" (Москва, 9.10.2009). М., НИЯУ-МИФИ, 2009, 5 с. (http://nstr.info/nor/bulletin/seminars/index. php?ID=1601).
6. Иудин ДИ, Трахтенгерц ВЮ. Фрактальные лабиринты: структурная динамика. Сб. *Нелинейные волны*, Н. Новгород, ИПФ РАН, 2007, 360-377 с.
7. Федер Е. *Фракталы*. М., Мир, 1991, 254 с.
8. Hunt AG, Ewing R. *Percolation Theory for Flow in Porous Media*. Berlin-Heidelberg, Springer, 2009, 319 p.
9. Moran PAP. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc.Cambridge Philis.Soc.*, 1946, 42:15-23.
10. Pesin YaB, Weiss H. On the dimension of deterministic and random Cantor-like sets, symbolic dynamics, and the Echmann-Ruelle conjecture. *Comm.Math.Phys.*, 1996, 182(1):105-153.
11. Pesin YaB, Weiss H. A multifractal analysis of equilibrium measures for confor-mal expanding maps and Markov Moran geometric constructions. *J.Stat.Phys.*, 1997, 86:233-275.
12. Cristea LL, Steinsky B. Curves of infinite lenght in 4x4-labyrinth fractals. *Geom Dedicata,* 2009, 141:1-17.
13. Куратовский К. *Топология,* т.2. М., Мир, 1969, 624 с.
14. Oldham KB, Spanier J. *The Fractional Calculus*. NY, Academic Press, 1974, 234 p.
15. Hilfer R. (Ed.). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore, World Scientific, 1999, 472 p.
16. Учайкин ВВ. *Метод дробных производных*. Ульяновск, Артишок, 2008, 512 с.
17. Metzler R, Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Phys.Rep.*, 2000, 339, 1-77 pp.
18. Потапов А.А., Черных В.А. *Дробное исчисление А.В. Летникова в физике фракталов*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012, 688 с.
19. Потапов А.А. О фрактальных радиосистемах, дробных операторах, скейлинге и не только… Глава V в кн. *Фракталы и дробные операторы*. С предисл. акад. Ю.В. Гуляева и чл.-корр. РАН С.А. Никитова. Под ред. А.Х. Гильмутдинова. Казань, «Фэн» Академии наук РТ, 2010, с. 417-472.
20. Заславский ГМ. *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика*. М.-Ижевск, НИЦ "РХД", Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2010, 472 с.
21. Гнеденко БВ, Колмогоров АН. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. М.-Л., Гостехиздат, 1949, 264 с.

Грачев Владимир Иванович
член-корреспондент РАЕН,
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, д.11, стр.7,
тел.: +7 495 629-3368, grachev@cplire.ru.

Потапов Александр Алексеевич
д.ф.-м.н., действительный член РАЕН,
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, д.11, стр.7,
тел.: +7 495 629 3406, potapov@cplire.ru, http://www.potapov-fractal.com.

Потапов Виктор Александрович
инженер,
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, д.11, стр.7,
тел.: +7 495 629 3406.

FRACTAL LABYRINTHS

Grachev V.I., Potapov A.A., Potapov V.A.

Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, http://www.cplire.ru
11/7, Mokhovaya str., 125009 Moscow, Russian Federation
grachev@cplire.ru.

Is basic information about fractal labyrinths, the processes of anomalous diffusion and Levy flights. It is shown, that the mathematics of fractional operators is a necessary machine description of complex technical and natural systems with fractal structure.

Keywords: **fractals, fractal labyrinths, Levy flights, anomalous diffusion, fractional operators**

UDC 537.86:519.22

Bibliography – 21 references *Received 04.11.2011*

RENSIT, 2011, 3(2):103-109

REFERENCES

1. Golgenfeld N, Kadanoff LP. Science, 1999, 284:87.
2. Danilov YuA. *Prekrasny mir nauki* [The wonderful world of science]. Collection. Compiled by AG Shadtina. Sanyuk VI & Trubetskoy D (Eds.). Moscow, Progress-Traditsiya Publ., 2008, 384 p.
3. Potapov AA. *Fractaly v radiofizike i radiolokatsii.* [Fractals in Radiophysics and Radiolocation]. Moscow, Logos Publ., 2002, 664 p. Potapov AA. *Fractaly v radiofizike i radiolokatsii: topologiya vyborki* [Fractals in Radiophysics and Radiolocation: topology of sample]. Moscow, Universitetskaya kniga Publ., 2005, 848 p.
4. Potapov AA. *Proc. 1th Intern. Conf. "Nanostrukturnye materialy-2008"* [Nanostructured materials-2008: Belarus-Russia-Ukraina]. Minsk, Belorus. Nauka Publ., 2008, 532 p.
5. Potapov AA. *Proc. 1th Conf. Nanotechnological Society of Russia* (NtSR). Moscow, NIYaU-MIFI Publ., 2009. 5 pp.(http://nstr.info/nor/bulletin/seminars/index.php?ID=1601).
6. Iudin DI, Trakhtengerts VYu. *Fraktalnye labirinty: strukturnaya dinamika* [Fractal labyrinths: a structural dynamics]. In: *Nelineynye volny* [Nonlinear Waves]. N.Novgorod, IPF RAS, 2007, 360-377 pp. (in Russ.).
7. Feder E. *Fractals*. Moscow, Mir Publ., 1991, 254 p.
8. Hunt AG, Ewing R. *Percolation Theory for Flow in Porous Media.* Berlin-Heidelberg: Springer, 2009. 319 p.
9. Moran PAP. *Proc.Cambridge Phylos. Soc.*,1946,42:15-23.
10. Pesin Y, Weiss H. Comm.Math.Phys., 1996, 182:105-153.
11. Pesin Y, Weiss H. J.Stat.Phys., 1997, 86:233-275.
12. Cristea LL, Steinsky B. Geom Dedicata, 2009, 141:1-17.
13. Kuratovsky K. Topologiya [Topology], v.2. Moscow, Mir Publ., 1969.
14. Oldham KB, Spanier J. *The Fractional Calculus*. NY, Academic Press, 1974, 234 p.
15. Hilfer R. (Ed.). *Applications of Fractional Calculus in Physics.* Singapore, World Scientific, 1999, 472 p.
16. Uchaykin VV. *Metod drobnykh proizvodnykh* [The method of fractional derivatives]. Ul'yanovsk, Artishok Publ., 2008, 512 p.
17. Metzler R, Klafter J. *Phys.Rep.*, 2000, 339, 1-77 pp.
18. Potapov AA, Chernykh VA. Drobnoe ischislenie AV Letnikova v fizike fraktalov [Letnikov Fractional Calculus in the physics of fractals]. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012, 688 p.
19. Potapov AA. Chapter V In: Fractals and fractional operators. With a foreword. Acad. Gulyaev Yu. and Corr. Memb. RAS SA Nikitov. Ed. Gil'mutdinov AH. Kazan, «Feng,» the Academy of Sciences, 2010, p. 417-472.
20. Zaslavsky GM. *Gamiltonov khaos i fraktal'naya dinamika* [Hamiltonian chaos and fractal dynamics]. Moscow-Izhevsk, NIZ "RKhD", Izhevsky institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010, 472 p.
21. Gnedenko BV, Kolmogorov AN. *Predel'nye raspredeleniya dlya sum nezavisimykh sluchaynykh velichin* [Limit distributions for sums of independent random variables]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949, 264 p.