3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.956

© ***В.В. Кибирев***

ФОРМУЛА ГРИНА В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В данной работе рассматривается формула Грина и ее приложения. При помощи этой формулы исследуется поведение потенциалов простого и двойного слоев и их производных при переходе некоторой точки через заданную поверхность.

Ключевые слова: формула Грина, гармоническая функция, потенциалы простого и двойного слоев.

© ***V.V. Kibirev***

GREEN'S FORMULA IN THE THEORY OF POTENTIAL

In the article Green's formula and its applications are considered. By means of this formula the behavior of simple and double layers potentials and their derivatives are studied while passing some point through the given surface.

Keywords: Green's formula, harmonic function, simple and double potentials.

Введение

Важным разделом теории уравнений с частными производными является теория краевых задач для эллиптических уравнений и систем уравнений. Среди таких задач набольший интерес представляют так называемые нефредгольмовые краевые задачи, исследование которых, как правило, сводится к изучению сингулярных интегральных уравнений, причем для этих задач нарушается альтернатива Фредгольма. Благодаря разработанности теории одномерных сингулярных интегральных уравнений [5,6] краевые задачи для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными в настоящее время полностью изучены [2,6], что нельзя сказать о краевых задачах для эллиптических уравнений с многими независимыми переменными. Ряд важных вопросов в этой области не решен до сих пор, так как нет достаточно общих методов исследований.

Поэтому важно рассмотреть некоторые вопросы теории линейных эллиптических уравнений в трехмерном случае и сделать некоторые обобщения на многомерный случай.

Постановка задачи

В теории потенциала важную роль играет формула Грина, являющаяся следствием формулы Гаусса-Остроградского [3]. Ее можно написать в двух следующих видах:

$$\int_D (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) d\omega + \int_D v\Delta u d\omega = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \text{, или} \tag{1}$$

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) d\omega = \int_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma \text{ ,}$$

где $d\omega = dxdydz$ – элемент объема, $d\sigma$ – элемент площади поверхности Г, $\frac{\partial}{\partial n}$ – дифференцирование по направлению внешней относительно D нормали. Вторая формула (1) следует из первой. В первой формуле предполагается, что функции u и v непрерывны в $D \bigcup \Gamma$, первые производные v и вторые производные u непрерывны в D, а первые производные u непрерывны в $D \bigcup \Gamma$. Во второй формуле предполагается, что u, v и их первые производные непрерывны в $D \bigcup \Gamma$, а вторые производные непрерывны в D. Считается, что граница Г области D кусочно-гладкая и существуют все интегралы, фигурирующие в выражениях.

Доказательства основных теорем

Если в первой формуле (1) положим $\Delta u = 0$, v = 1, то получим следующее утверждения.

Теорема 1. *Если гармоническая функция регулярна в ограниченной области D и непрерывно дифференцируема в замкнутой области* $D \bigcup \Gamma$, *то интеграл по поверхности Г от ее нормальной производной равен нулю.*

Теорема 2. *Пусть задан кусок поверхности Г, ограничиваемой кривой С, и точка Р, не принадлежащая Г. Тогда потенциал двойного слоя с постоянной плотностью σ =1 поверхности Г в точке Р по абсолютной величине равен телесному углу, под которым кривая С видна из точки Р. В частности, потенциал двойного слоя поверхности, ограничивающей область D, имеет постоянное значение - 4π во всех внутренних точках D, а вне D равен нулю.*

Доказательство. Построим коническую поверхность *Н*, образованную отрезками прямых, соединяющими точку *Р* с точками кривой *С*. Рассмотрим сферу *К(ε*) радиуса *ε* с центром в точке *Р*. Поверхности Г, *Н* и *К*(*ε*) ограничивают некоторую область Ω (*ε*). В этой области функция r^{-1} регулярна, и на поверхности *Н* выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial n}(r^{-1}) = 0$. В силу теоремы 1 имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})dS + \int_{H} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})dS + \int_{K(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})dS = 0 .$$

Так как $\frac{\partial}{\partial n}(r^{-1}) = -\varepsilon^{-1}$ на *К*(*ε*), последний интеграл в этой формуле вычисляется явно и равен углу при вершине построенной конической поверхности Г. Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы, заметим, что знак этого угла однозначно определяется заданием положительной и отрицательной сторон поверхности Г, а затем поверхность Г разобьем на две некоторой кривой *С*. Теперь для внутренних точек *D* углы складываются, а для внешних вычитаются.

Если и первой формуле (l) положим *u* = *v*, $\Delta u = 0$, то получим тождество

$$D(u) \equiv \int_{D} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS , \tag{2}$$

справедливое для любой регулярной в *D* гармонической и непрерывно дифференцируемой в $D \bigcup \Gamma$ функции *и*. Интеграл *D*(*u*) называется интегралом Дирихле. Из тождества (2) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть и - регулярная в области D непрерывно дифференцируемая в замкнутой области* $D \bigcup \Gamma$ *гармоническая функция. Тогда: а) если и обращается в нуль на границе Г области D, то она обращается в нуль тождественно в D; б) если нормальная производная* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *обращается в нуль на границе, то и постоянна в D.*

Пусть во второй формуле (1) область *D* является шаром радиуса *R* с центром в точке *Р*. Рассмотрим концентрический шар В радиуса $R_0 < R$, положим $v = r^{-1}$ и напишем эту формулу для сферического слоя, ограничиваемого границей Г шара *D* и границей Σ шара В. Тогда для любой гармонической регулярной в *D* функции *и* с учетом теоремы 1. Получим

$$\frac{1}{4\pi R_0^2} \int_{\Sigma} u dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Gamma} u dS .$$

Воспользовавшись теоремой о среднем и устремив R_0 к нулю, получим формулу

$$u(P)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\Gamma u(Q)dS\ , \qquad (3)$$

выражающую так называемую теорему о среднем для гармонических функций. Хотя при выводе формулы (3) функция *u* предполагалась дифференцируемой в замкнутом шаре $D\bigcup\Gamma$, нетрудно показать, что для справедливости формулы достаточно непрерывности *u* в $D\bigcup\Gamma$. При помощи формулы (3) можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть гармоническая функция и регулярна в области D и непрерывна в замкнутой области* $D\bigcup\Gamma$. *Тогда она принимает свои максимальное и минимальное значения на границе* Γ *области D; максимум и минимум достигаются внутри области тогда и только тогда, когда u постоянна.*

Утверждение теоремы называются принципом максимума для гармонических функций.

В формулах Грина (1) предполагалось, что функции *v* и *u* имеют в области *D* все производные, фигурирующие в этих формулах. Теперь возьмем функцию

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\underline{r}^{-1}+\omega(\xi,\eta,\zeta)$$

с характеристической особенностью в фиксированной точке *P* = (*x*, *y*, *z*). Функция ω предполагается непрерывной и непрерывно дифференцируемой в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$ и дважды дифференцируемой в *D*. Окружим точку *P* шаром $\Sigma(\varepsilon)$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке *P*. Из области *D* выбросим пересечение $D\bigcap\Sigma(\varepsilon)$, а для оставшейся части $D(\varepsilon)$ области *D* напишем формулы (1) и устремим затем ε к нулю. В том случае, когда точка *P* лежит на Γ, будем предполагать, что Γ имеет непрерывно меняющуюся касательную плоскость в окрестности точки *P*. Совершив предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\int_D (u_\xi v_\xi+u_\eta v_\eta+u_\zeta v_\zeta)d\omega+\int_D u\Delta v d\omega=\lambda u+\int_\Gamma u\frac{du}{\partial n}dS\ , \qquad (4)$$

$$\int_D (u\Delta v-v\Delta u)d\omega=\lambda u+\int_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial v}{\partial n})dS\ ,$$

где $d\omega$ - элемент объема, а

$$\lambda=\begin{cases}4\pi,\ P\in D\\ 2\pi,\ P\in\Gamma\\ 0, P\notin D\bigcup\Gamma\end{cases}.$$

На функции *u* и *w* накладываются те же ограничения, что и на функции *u* и *v* в формулах (l).

Если во второй формуле (4) положим ω = 0, то для любой дважды дифференцируемой в области *D* и непрерывно дифференцируемое и $D\bigcup\Gamma$ функции *u* получим представление

$$u=-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{\Delta u}{r}d\omega+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})dS \qquad (5)$$

в виде суммы трех потенциалов. Для гармонической функции имеем $\Delta u=0$, поэтому формула принимает вид

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})dS\ , \qquad (5a)$$

т.е. гармоническую функцию можно выразить в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев. Если во второй формуле (4) будем считать $\Delta\omega=0$, а в качестве *v* возьмем произвольное фундаментальное решение Ω уравнения Лапласа, то получим формулу

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\Omega\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u\frac{\partial\Omega}{\partial n}(\frac{1}{r})dS\ , \qquad (6)$$

где $\Omega=r^{-1}+\omega$ фундаментальное решение с особенностью и точке *P*.

Обобщения формул (1) на многомерный случая следующие:

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + v\Delta u \right) d\omega = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n},$$
$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) d\omega = \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \qquad (7)$$

а формулы (4) принимают вид

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + u\Delta w \right) d\omega = \lambda u + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} dS,$$
$$\int_D (u\Delta w - v\Delta u) d\omega = \lambda u + \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

$$\lambda = \begin{cases} \omega_n, \ P \in D, \\ \dfrac{\omega_n}{2}, \ P \in \Gamma, \\ 0, \ P \notin D \bigcup \Gamma \end{cases},$$

$$\omega_n \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \ v = \frac{1}{n-2} r^{2-n} + \omega.$$

При помощи формулы Грина исследуем поведение потенциалов простого и двойного слоев и их производных при переходе точки $P = (x, y, z)$ через поверхность Г. Пусть точка P_0 лежит на Г и поверхность Г в этой точке имеет непрерывные главные кривизны. С центром в точке P_0 построим шар $\Sigma(p)$ настолько малого радиуса, чтобы пересечение его с Г было связным куском гладкой поверхности. Обозначим через D ту часть шара $\Sigma(p)$, для которой положительное направление нормали к Г является направлением внешней относительно D нормали. Плотности потенциалов простого и двойного слоя будем считать непрерывными, по Гельдеру.

Теорема 5. *При переходе через поверхность* Г *значение потенциала двойного слоя в точке P_0 имеет скачок, описываемый формулами*

$$u^+(P_0) - u(P_0) = 2\pi\sigma(P_0), \ \ u^-(P_0) - u(P_0) = -2\pi\sigma(P_0),$$

где u^+ - предел потенциала двойного слоя и при стремлении точки P к точке P_0 с положительной стороны поверхности Г, *а u^- - аналогичный предел при стремлении P к P_0 с отрицательной стороны поверхности* Г.

Потенциал простого слоя непрерывен при переходе через точку P_0, а его нормальная производная имеет скачок

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u}{\partial n^+} - \frac{\partial u}{\partial n^-} = 4\pi\rho(P_0),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n^+}$ - дифференцирование по направлению положительной нормали к поверхности Г *в точке P_0,* а $\dfrac{\partial}{\partial u^-}$ *- дифференцирование по направлению отрицательной нормали.*

Доказательство. Утверждение теоремы докажем для того случая, когда плотность σ потенциала двойного слоя дважды дифференцируема и допускает продолжение до дважды дифференцируемой в области D функции $\sigma(x, y, z)$. Положим в первой формуле (4) $u = \sigma$, $w = 0$, Имеем

$$\lambda\sigma + \int_\Gamma \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int_D \left[\sigma_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \sigma_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + \sigma_\xi \frac{\partial}{\xi}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\omega .$$

Правая часть этого равенства непрерывна при переходе точки P через поверхность Г, поэтому должна быть непрерывной и левая часть, а непрерывность выражения

$$\lambda\sigma + \int_{\Gamma} \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

и есть первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично, только функция u выбирается так, что на Г она тождественно равна нулю, а $\frac{\partial u}{\partial n} = \rho$, где ρ - плотность потенциала простого слоя.

Заключение

В данной работе с помощью формулы Грина исследовано поведение гармонической функции в заданной области и на ее границе.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: «Наука», 1981. – 448 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: «Наука», 1977. – 640 с.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – Т.1. – 592 с.
4. Кибирев В.В. К задаче о наклонной производной с линейными коэффициентами для гармонических функций. – Диф. уравнения. – 1980. – Т.16. – №1. – С.80-85.
5. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматиз., 1962. – 254 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512с.
7. Янушаускас А. К задаче о наклонной производной для гармонических функций трех независимых переменных. // Сиб. матем. журнал. – 1967. – Т.8. – №2. – С.447-462.
8. Янушаускас А. Аналитические и гармонические функции многих переменных. – Новосибирск: Наука, 1981. – 184 с.

Кибирев Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел.(8301-2)217573, dekanat_imi@bsu.ru

Kibirev Vladimir Vasilievich, candidate of physical and mathematical sciences, the professor of the applied mathematics department of the Buryat State University.