УДК 510.21

Мазуров Вл.Д.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Исследование поддержано РФФИ, грант № 16-07-00266.

Математика и информатика рассматривается с точки зрения метафизики. Невозможно дать краткое приемлемое определение математики – она многогранна. В широком смысле слова математика является своеобразной формой человеческого знания о реальном мире.

Ключевые слова: математика, духовность, противоречие, основания, метафизика.

Mazurov Vl.D.

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

We investigate mathematics and informatics through point of view metaphysics. It is impossible to give a concise and readily acceptable definition of mathematics as it is a multyfield subject. Mathematics in broad sense on the word is a peculiar form of human knowledge of real world.

Key words: mathematics, spirituality, contradiction, basis, metaphysics.

Математика – это язык,
на котором написана книга природы.
Галилео Галилей

Математика и истина

В истории математики давно подмечен, на первый взгляд, неожиданный и необъяснимый факт: размышляя над одной проблемой, разные математики начинают строить одни и те же математические конструкции. Более того, иногда разные, казалось бы, задачи из совершенно различных разделов математики приводят к одним и тем же моделям. Как выразился по этому поводу А. Пуанкаре [1], «математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». Единство математических моделей является отражением единства природы, универсальности ее законов; математика же как инструмент познания позволяет обнаружить эту универсальность. Высокую роль математики подчеркивает Гуго Штейнгауз в своей книге «Математика – посредник между духом и материей» [2].

В чем особенности математики как инструмента познания, что дает основания считать ее «царицей наук» (по выражению «короля» математики К.Ф. Гаусса)? Мы попытаемся здесь дать некоторое представление о существующих вариантах ответов на эти и связанные с ними другие вопросы, а также высказать собственные мысли и ощущения по этому поводу.

Одним из первых и главных вопросов любой науки является вопрос критериев истинности ее положений. Математиков всегда волновала проблема истинности математики. Принципиален вопрос: несёт ли математическая истина истинное знание об исходных принципах, о мире и человеке? Различные теории пытаются дать свои ответы на этот ключевойвопрос, но вряд ли возможен окончательный ответ.

Математика – синоним чистой научной истины. Мы рассмотрим сущность математического знания и принципы математических доказательств. Математика существенна в генерировании нашей духовности. Занятие математикой органически присуще человеку. В математическом творчестве всегда проявляется именно человеческая сущность, её фундаментальное начало. Это проявление стремления человека к интеллектуальной области жизни, к культуре. Без математики невозможна наука, как невозможна и культура.

И вместе с тем самый факт, что математика вообще возможна, противоречив. Если математика дедуктивна только по форме, то откуда берётся её совершенная строгость? Если в математике всё формально выводимо, то почему она не сводится к системе тавтологий?

Мы хотим знать последние основания математики – этот вопрос относится к метафизике. Скорее всего, ответить на него однозначно невозможно. Но и отказываться от такой постановки вопроса – значит забывать о бытии математики, о её жизненном смысле. Л. Витгенштейн, правда, говорил, что метафизика – болезнь языка [3]. Но ведь мы не обязаны с ним соглашаться. И, подобно метафизике, существует метаматематика. Но её отличие – построение этой дисциплины как математики: метаматематика также содержит определения, теоремы и их толкование.

Математика – живая развивающаяся наука. Поэтому наблюдается большое многообразие точек зрения на предмет математики и её нормы. Невозможно дать компактное и простое определение математики, так как она состоит из множества разделов. Это особая форма человеческого познания реального мира.

Согласно Декарту, это наука о мере и порядке [4]. Р. Декарт проанализировал аксиомы математики и развил индуктивный метод. При этом, по его мнению, идеи математического исследования должны быть ясными и очевидными. Математика – образцовая наука. Философы должны в ясности изложения следовать геометрии. Однако Р. Декарт и Г. Лейбниц [5] понимали, что философия требует ещё более точного и строгого обсуждения. Они считали, что математика и логика (понимаемая как часть математики) описывают не сущее, а лишь возможно сущее.

Одна из общих точек зрения - истины математики необходимы и независимы от опыта – в силу абсолютной идеальности её объектов. Это вполне резонно, но сказано слишком категорично. Это одна из крайностей, которыми изобилуют работы по основаниям математики. Другая крайность, тоже имеющая право на существование: можно считать, что всё в математике происходит из опыта.

В большой степени справедлив (но, пожалуй, ограничителен) взгляд на математику (высказанный, как известно, одним из классиков марксизма) как науку о количественных отношениях и пространственных формах явлений действительности. Можно улучшить это определение, добавив, что эти отношения и формы надо понимать достаточно широко. Ведь есть в математике и неколичественные, и непространственные отношения и объекты: например, программы для компьютеров, математическая логика и др. При определении математики можно также использовать небесполезную тавтологию: математика – наука о математических структурах.

Но насколько полезна математика? Она прекрасна и в определённом смысле всесильна (непостижимо эффективна, как говорят физики). Чтобы это полностью ощутить, достаточно окончить три курса математического факультета университета. Кроме того, только математика даёт в пользование другим наукам точный формализованный язык (в том числе количественный) для представления и моделирования их объектов и процессов. В этом смысле действительно математика – язык науки. Фактически математика и логика выполняют объединительную функцию, подводя все науки под одну систему.

Если говорить о сути математики, то необходимо сказать о такой существенной её особенности, как аксиоматический подход. В аксиоматических системах основой является малое число аксиом. Из них по некоторым правилам вывода выводятся следствия. Математическая аксиома – абстракция отношений между природными или социальными объектами. Хотя суть идеализаций такова, что никакой опыт не отвечает ей с абсолютной точностью. Например, нельзя на доске начертить математическую прямую линию, прямая в математике – это идеализация.

Для многих исследователей приемлем априорный взгляд на математику, выдвинутый Платоном и развитый Р. Декартом и И. Кантом. Возникновение утверждений математики не связывается с опытом, они опираются на очевидность, природа которой – вне опыта и априорна.

Многие математики полагали, что математическое знание развивается независимо от опыта. И в самом деле: как элегантны доказательства существования от противного! Тем не менее в математике есть и априоризм, и эмпиризм, и конструктивизм. Такие нелинейные эффекты, как фракталы, бифуркации и т.д., были открыты эмпирически – путём реализации итерационных процессов на компьютерах. Еще Аристотель высказал важную мысль, что в математике индукция играет не меньшую роль, чем дедукция [6].

И. Кант задаётся вопросом, как возможна чистая математика [7]. Он связывает это с вопросом, как возможно априорное созерцание. Оно возможно (по Канту) потому, что касается форм чувственности – пространства и времени. Это формы чувственного созерцания, присущие нам самим. Математические априорные суждения – синтетические априорные суждения. Заметим, что в применении к геометрии идеи И. Канта оказались неверны.

Однако и основная проблема для методолога – взаимоотношения математики и реальности – пока не имеет приемлемого решения, хотя, разумеется, есть ряд различных интересных подходов к этой проблеме. В полной мере неясно, каков предмет математики, какова природа математики и каким образом возможно математическое знание. Работающий математик и не задаётся этими вопросами – «душа в её блужданьи смутном сознаньем истины полна». В какой-то мере природу математики можно почувствовать, занимаясь математикой и изучая историю её развития. Однако следует заметить, что всё-таки недостаточно ясны критерии строгости и надёжности математического знания. Вернее сказать, эти критерии всё время уточняются и усложняются. А конечная истина за конечное время недостижима...

Интерес к философии и методологии математики постоянен. Это объясняется не только продолжающимся процессом математизации научного знания, но и самой по себе глубиной математики, вопросом фундаментальной связи математики и реальности, вопросами о критериях истинности математики, источниках её развития и фактически – стремлением постигнуть непостижимое. Основания математики – область, которой занимаются математики и специалисты по математической логике. И, естественно, возникает вопрос о философии математики, так как философия – это поиск фундаментальных основ бытия.

Стремление математиков к разработке твёрдых оснований математики диктуется её естественным развитием, в ходе которого приходится разрешать постоянно возникающие кризисы. Платон понимал мудрость как нахождение последних оснований чего-либо. Но последние основания всегда ускользают от человека, и потому постоянно возникают противоречия. Моменты, когда в математике возникают принципиально новые глубокие проблемы, традиционно называются кризисами.

Первый кризис возник ещё в V веке до н. э. В это время, когда математика только ещё становилась как теоретическая наука, обнаружился феномен несоизмеримости отрезков. В дальнейшем этот кризис был разрешён введением иррациональных чисел. Само название «иррациональные» означало, что мы имеем дело с чем-то как бы выходящим за пределы разума. В это же время у пифагорейцев и в апориях Зенона проявилась пропасть между дискретным и непрерывным. Это явление до сих пор является проблемой для оснований математики.

Второй кризис возник на рубеже XVIII и XIX веков в связи с парадоксами исчисления бесконечно малых. Эти парадоксы были разрешены О. Коши с помощью теории пределов [8]. И опять же обоснование математики с помощью этой теории не завершено – всё из-за той же пропасти между дискретным и непрерывным.

Третий кризис возник из-за обнаружения парадоксов теории множеств. Эти парадоксы породили даже общественный отклик. Ведь почти все математики считали теорию множеств надежным фундаментом математики. И вот в этом фундаменте обнаружились трещины. Математики были изгнаны из теоретико-множественного рая.

В это время – в период возникновения аналитической философии – работали выдающиеся мыслители, искавшие пути преодоления трудностей в науках (не только в математике). В Англии это Дж. Мур, Б. Рассел, Л. Витгенштейн, в Вене – представители Венского кружка М. Шлик, О. Нейрат, Р. Карнап. Возникла Варшавская логическая школа. Стало ясно, что нужна новая логика. В её развитие значительный вклад внесли математики Г. Фреге [9] и Б. Рассел [10]. Появилась математическая логика. Кроме того, была выдвинута идея, что фундаментом научного философствования является логический анализ языка теории.

Возникли четыре программы оснований математики. Первая – уточнение понятия множества, введение аксиоматики, анализ теории категорий. Вторая использовала идею доказательства непротиворечивости систем аксиом в математике. Третья программа – логицизм – предпринимала попытку сведения всей математики к логике. С точки зрения логицистов, противоречия – следствие несовершенной логики.

Аксиомофильство породило, в частности, логицизм и некоторые идеи структурализма. Структурализм Бурбаки рассматривал математику как собрание абстрактных аксиоматических структур с заданными отношениями и операциями над элементами.

Четвёртая программа – интуиционизм и конструктивизм. Исследование этих подходов может быть связано с тезисом арифметизации математики; он гласит, что математика основана на натуральных числах и что другие разделы математики осмысливаются в терминах натуральных чисел.

Но в последнее время (с 1970-х годов) возник ещё один новый кризис – кризис переусложнённости доказательств. Некоторые доказательства настолько длинны и сложны (например, доказательство «великой» теоремы Ферма, данное Э. Уайлсом [11]), что их проверка – целая проблема. Проверкой занимаются коллективы математиков. И трудно дать окончательное заключение: доказан результат или нет. Сверхсложные математические доказательства – это уже не явления индивидуального творчества, это коллективная деятельность. И сама убедительность доказательств становится коллективной. Важный пример такого коллективного творчества и коллективного убеждения – теорема о классификации конечных простых групп. В возможность классификации не верил даже выдающийся современный алгебраист Жан–Пьер Серр. Доказательство теоремы классификации состоит из десятков тысяч страниц в нескольких сотнях статей в журнале, написанных приблизительно 100 авторами, изданными главным образом между 1955 и 2004.

Кроме того, существует ещё проблема и компьютерных доказательств. Компьютеры необходимы, когда доказательство требует перебора громадного числа вариантов. Так было в случае решения знаменитой проблемы четырёх красок [12; 13]. При раскраске географической карты естественно использовать как можно меньшее количество цветов. Еще в XIX в. было замечено, что для правильной раскраски, при которой любые две страны, имеющие общую часть границы, были бы окрашены разными цветами, вполне хватает четырех красок. Точная математическая формулировка гипотезы о четырех красках была впервые опубликована А. Кэли (A. Cayley) в 1878 г. С тех пор многие известные математики прилагали усилия для ее доказательства; по количеству представленных ошибочных доказательств эта гипотеза уступает разве что знаменитой теореме Ферма.

Доказательство этой теоремы, признанное (хотя и не сразу) большинством математиков корректным, было представлено в 1976 году Кеннетом Аппелем и Вольфгангом Хакеном из Иллинойского университета [14]. Дело в том, что при доказательстве авторы существенно использовали специальную компьютерную программу. Первым шагом их доказательства была демонстрация того, что существует определенный набор из 1936 карт, ни одна из которых не может содержать карту меньшего размера, которая опровергала бы теорему. К. Аппель и В. Хакен использовали компьютер, чтобы доказать это свойство для каждой из 1936 карт. Доказательство этого факта заняло сотни страниц. После этого К. - Аппель и В. Хакен пришли к выводу, что не существует наименьшего контрпримера к теореме, потому что иначе он должен бы содержать, хотя не содержит, какую-нибудь из этих 1936 карт. Это противоречие говорит о том, что вообще не существует контрпримера.

Это была первая крупная математическая теорема, доказанная с помощью компьютера. Изначально, как уже упоминалось, доказательство не было принято всеми математиками, поскольку его невозможно было проверить вручную. В дальнейшем оно получило более широкое признание, хотя у некоторых математиков долгое время оставались сомнения в корректности доказательства. Чтобы развеять эти сомнения, в 1997 году Н. Робертсон, Д. Сандерс, П. Сеймур и Р. Томас опубликовали более простое доказательство, использующее аналогичные идеи, но по-прежнему проделанное с помощью компьютера [15]. В 2005 году доказательство было усовершенствовано Джорджсом Гонтиром (Georges Gonthier) с использованием специализированного программного обеспечения [16].

При использовании компьютерных программ естественным образом возникает проблема верификации программы, реализованной в компьютере. Разобраться в чужой программе довольно трудно. Сами программисты считают, что в большой программе обязательно есть ошибки. Как известно, доверять можно только компьютеру, работающему по простой программе.

Н.С. Розов ввёл в статье в журнале «Философия науки» полезное понятие «рабочий платонизм» для обозначения философии работающего математика [17]. Речь идёт не только о профессиональных математиках, но и о людях с элементарным математическим образованием. Натуральные числа и треугольники в сознании обычного человека реальны. Однако когда-то эти понятия были гениальными открытиями.

Имея в виду тайну эффективности математики, развитие математики можно и необходимо рассматривать в контексте человеческой культуры. Математика и привязана к конкретным задачам – сначала к земледелию, потом к физике и т.д., и свободна – она предполагает неограниченное творчество, однако подчинённое самым строгим стандартам доказательности. По мере своего исторического развития математика выработала целую систему понятий, в которой в сжатой и свёрнутой синтезированной форме сосредоточила огромный массив информации о реальности, в том числе виртуальной. По всей видимости, именно язык математики отвечает требованиям естественных наук; математики поддерживают высокие стандарты научной рациональности: требованиям однозначности, доказательности, проверяемости, полезности. Между тем каждой эпохе отвечает свой стиль рассуждений и свои стандарты их фиксации. Нужно, правда, заметить, что абсолютная однозначность и доказательность достижимы только в потенциально бесконечной эволюции науки.

Развитие логики идёт вместе с развитием оснований математики, и сейчас ясно, что при обосновании должны в полной мере участвовать и синтаксис, и семантика, и прагматика. При обсуждении этого раздела прежде всего необходимо опять вернуться к вопросу о том, что собой представляет математика. Однако мы уже видели, что это совсем не просто, если не невозможно: математика так многогранна, что одни из её определений совсем непохожи на другие (пример: с одной стороны – это наука о числах и фигурах, а с другой – как это ни странно звучит, некоторые считают, что это раздел лингвистики, так как математика занимается преобразованием последовательностей символов). Суть математики кардинально не схожа с конкретными науками, у которых есть ясный и определённый объект изучения. Выражаясь поэтическим языком, математика содержит тайну. Н.Н. Лузин говорил, что развитие математики началось с открытия идеи числа [18]. Интересны высказывания академика Ю.И. Манина о сути математики. Он пишет, что никакое разумное правительство не станет кормить людей, переливающих из пустого в порожнее (он имеет в виду математиков): ведь если в результате игры с символами и получается что-то полезное, то оно уже содержалось в исходных посылках. Он также считал возможным взгляд на математику как на лингвистику, преобразование слов в слова [19]. Кстати, Г. Харди гордился тем, что математика якобы бесполезна [20].

Однако история математики – это не только история развития чистых идей самих по себе, но также и часть истории человеческой деятельности; человек выступает здесь как член определённого общества, как представитель определённой культуры. Человек зависит от мира идей той культуры, в которой он находится.

Существуют различные программы обоснования математики. По-видимому, возможность новых программ обоснования обусловлена достигаемой в практике очевидностью. Впрочем, одна очевидность сменяется другой, более глубокой. Очевидное оказывается неочевидным, затем – в результате построения новых конструкций и привыкания к ним – становится очевидным и сменяется новым неочевидным.

Платонистская трактовка математики

Платон впервые представил математические объекты как существующие в трансцендентном мире универсалий – общих понятий. Это положение хорошо объясняет кардинальное отличие абстрактных объектов от эмпирических. Мир идей предшествует материальному миру. Идеи неизменны и совершенны, а материальный мир меняется. Предметы суть несовершенные воплощения идей.

В Средние века исследовался вопрос, каким образом существуют универсалии. В процессе исследований оформились следующие научные школы и философские течения:

- номинализм: универсалии существуют не в действительности, а только в мышлении;

- реализм: универсалии существуют реально и не зависят от сознания;

- концептуализм: общим понятиям не приписывается самостоятельная реальность, просто в вещах есть нечто общее, выражаемое концептами;

- конструктивизм: универсалии обретают существование после их конструирования.

Платонизм – это подход, при котором математические объекты рассматриваются вне какой-либо связи с размышляющим субъектом. Идеи Платона оказали влияние на Георга Кантора, построившего абстрактную теорию множеств. Г. Кантор показал, что можно оперировать актуальными бесконечностями, работать с множествами как с объектами. По Кантору, актуально бесконечное можно уподобить конечному множеству; оно существует сразу же вместе со всеми своими элементами [21].

Но, возможно, именно такой абсолютный платонизм оказался чреват парадоксами наивной теории множеств.

Платонизм связан с таким критерием существования математических объектов как непротиворечивость. Кантор писал, что математика целиком свободна в своём развитии и ограничена только самоочевидным требованием, чтобы её понятия не противоречили самим себе.

Согласно аристотелевской традиции, непротиворечивость предикатов объекта вытекает из непустоты пересечения объёмов этих предикатов. Кантор усилил это положение: он полагал непротиворечивость необходимым и достаточным условием существования математического объекта.

Между тем уже в начале XX в. россиянин Н.А. Васильев построил инконсистентную логику, где с противоречиями можно работать определённым корректным образом [22]. Н.А. Васильев по праву считается одним из создателей неклассической логики наряду с Я. Лукасевичем, К. Льюисом и Л. Брауэром. Эти работы были продолжены латиноамериканскими логиками – в частности бразильцем А. Аррудой [22, с. 187-208; 23] и другими. Заметим, что в наших работах по оптимизации и распознаванию самой логикой рассматриваемых задач мы вынуждены были ввести понятие обобщённого существования. Так, рассматриваемая система ограничений может быть несовместной, и тогда приходится использовать так называемые комитетные конструкции [24; 25].

Важнейшим вопросом оснований математики является вопрос пределов формализации. Интересны взгляды немецкого поэта Гуго фон Гофмансталя, считавшего, что большинство людей существуют не в реальной жизни, а в её имитации, в некоторого рода алгебре. Так, в статье «Поэт и наше время» («Der Dichter und diese Zeit»), написанной в 1907 г., Г. Гофмансталь постарался философски обосновать идеи неоромантизма, их антиреалистичность.

И вместе с тем математики получают конкретные результаты, говорящие о пределах формализации. Так, исследуются вопросы представления функций многих переменных (а такие функции могут служить моделями сложных реальных процессов) в виде суперпозиций более простых функций. А.Н. Колмогоров и В. Арнольд доказали удивительную теорему о том, что непрерывные на компакте функции любого конечного числа переменных представимы в виде суперпозиций функций от одной переменной [26; 27]. В данном случае самое сложное представляется самым простым.

Математика – это поиски всеобщего метода научного мышления. Мы хотим понять, что именно математика исследует в действительности. Доньютоновская математика работала с конечными величинами. И. Ньютон ввел в рассмотрение непрерывные и переменные величины; это был революционный шаг вперед, но он же привёл впоследствии к кризисам в обосновании математики.

В античности и в Средние века математика считалась знанием об основных законах бытия. «Бог всегда является геометром» (Платон). Первые математики – Фалес, Платон, Пифагор и другие – были и первыми философами. Математиками в то время считали даже астрологов и магов. Переход от этого понимания сути математики к предсовременному произошел у Леонардо да Винчи в 1500-х гг. Но что-то подобное магии есть в алгебре, когда некое неизвестное «x» явно вводится в математическую модель и после ряда манипуляций идентифицируется. Это можно сравнить с идентификацией неформализованных факторов и соотношений в современных работах по оптимизации и распознаванию (Ю.И. Журавлёв [28], Вл.Д. Мазуров [29]), особенно явно это проявляется в математической экономике.

Первой философской концепцией математики был пифагореизм. Пифагорейцы считали, что математика опирается не на чувства, а на разум. Они считали также, что математические объекты не только имеют объективное существование, но и являются причинами вещей.

Аристотель считал, что источник математики – эмпирическое. Априористские концепции математики выдвигали Р. Декарт, Г. Лейбниц, И. Кант.

Говоря о связи математики с философией, следует учитывать, что математика издревле занималась изучением упорядоченностей в объектах, в множествах объектов, в процессах. И уже в верхнем палеолите приходилось улавливать природные закономерности, фиксировать инварианты, повторяющиеся процессы, ритмы. Это были первые эмпирические закономерности.

Мир невообразимо сложен, и рационально постичь его мы явно не сможем. Но можно отделить область случайного от того, что нам доступно, от того, что мы умеем делать, а то, что умеем – это наши конструкции.

Корни современной философии математики – в эпохе становления науки Нового времени. Наука Нового времени интеллектуально отразила происходившие социальные, экономические и технологические изменения. Она создавалась поколением по-новому (по сравнению со Средними веками) мыслящих исследователей. В Англии это были Ф. Бэкон, Р. Бойль, И. Ньютон, в Европе – Р. Декарт и картезианцы, Г. Лейбниц. Известен тезис Р. Декарта [2]: всё, что я воспринимаю ясно и отчётливо, по необходимости истинно. Критику критерия самоочевидности дал впоследствии Г. Лейбниц [3].

Естественно возникшие тогда вопросы эмпиризма, доверия к чувственным данным, привели к тому, что в одном направлении пошла философия естествознания, связанная с эмпиризмом, а в другом - философия математики, занявшаяся анализом отношения математики к реальности и структурой математического знания без учёта его истории. Эмпирическое обоснование математики – заманчивая, но вряд ли разрешимая проблема. Методы математики и естествознания сходны, но не идентичны.

Философские проблемы, на которых в 1750-х годах остановился И. Кант, были выдвинуты развитием естествознания. В это время больших успехов достигло ньютоновское естествознание; механика выступала от лица всей науки. Но механику не надо рассматривать только как особый способ отражения механического движения – она обусловила изменение всего стиля научного мышления – через его преобразование однозначной причинности, строгой последовательности построения научной теории и количественно-математического метода изучения природы. Механические построения сложения сил, механическое равновесие использовались и в науках об обществе.

В конце XIX века в Европе начались интенсивные исследования внутреннего обоснования математики, начался поиск общности различных математических теорий при условии их формализации с использованием математической логики. Имела место фундаментальная направленность, нацеленность на изучение структуры математического знания, природы математических объектов, проблем истинности. В XX веке это связано с работами Г. Фреге, Б. Рассела, К. Геделя и др.

В США первым крупным философом математики стал основатель прагматизма Чарльз Сандерс Пирс [30]. Фундаменталистская философия математики в США имеет наиболее глубокие традиции и развивается прежде всего в университетах IVY League (элитных университетах т.н. «Лиги плюща»).

В фундаменталистской философии математики основным является платонистский подход. У Платона математические объекты существуют в особом трансцендентном мире – мире универсалий. Идеи предшествуют предметам. Платонизм не есть некоторое самостоятельное направление, платонисты могут принадлежать разным направлениям обоснования математики. Г. Кантор исследовал бесконечные множества как объекты, подобные идеям Платона. Это согласуется с тем, что Г. Кантор принял допущение актуальной бесконечности. Платонизм в математике защищал К. Гедель, считая его математическим реализмом. Однако эти подходы не надо абсолютизировать. Платонизм на самом деле директивно объявляет абсолютность математических объектов. То же можно сказать о таком критерии истинности, как самоочевидность – эта точка зрения идёт от Р. Декарта. Критерий полезен, но не абсолютен.

Существует и нефундаменталистская философия математики. В ней исследуется функционирование математики, место математики в культуре, изучаются исторические закономерности развития математики. Некоторые нефундаменталисты считают, что развитие и существование математики автономно от развития её оснований. В отличие от этих специалистов мы придерживаемся здесь более широкого, синтетического и свободного взгляда на этот вопрос.

Эмпирические науки нацелены на обобщение опыта и на разработку эффективных методик практического действия. В то же время математика направлена на саму науку, на конструирование символических систем, которые нужны для логического оформления и систематизации математического знания.

Крушение программ обоснования математики, выдвинутых в начале XX века, поначалу привело многих исследователей к мысли о невозможности абсолютно надёжного обоснования математики. Но следует понимать обоснование математики как длительный процесс. Ни один подход к обоснованию математики не абсолютен, каждый справедлив только локально, при некоторых допущениях.

Приведём широкую формулировку теоремы К. Геделя о неполноте [31]: в языке математической теории существует недоказуемое истинное утверждение. Эта теорема дает понимание проблематичности доказательств.

Всякая наука стремится к обоснованности своих положений, ничто не принимается на веру. Но математика в особенности строга, желая, чтобы её положения были не просто истинны, а необходимо истинны.

Математика как система моделей

Эффективность математики во многом основывается на том факте, что она является системой моделей. Именно удачная модель объекта или явления как приближённое математическое описание является ключом к успеху в понимании объекта, и, следовательно, в прогнозировании его динамики, в целесообразном воздействии на него. То, что математика может рассматриваться как система моделей, можно понимать в двух смыслах. Во-первых, математика – это постоянно развивающаяся и перестраивающаяся система моделей реальности. Во-вторых, сама математика как теория может быть представлена в замкнутом виде как система моделей. Но это не вся математика: кроме того, в неё входят и эксперименты, главным образом компьютерные.

В математике имеется понятие модели как системы объектов, отношений между ними и операций над ними. Это довольно общий способ описания широкого класса теорий.

Моделирование – важный эффективный общеметодологический приём. Наиболее перспективный вид моделирования – знаковое математическое моделирование. Научные открытия дают неизвестные ранее свойства действительности. Математические же открытия обнаруживают неизвестные ранее свойства моделей или дают начало новым моделям. Модель – более общая конструкция, чем закономерность. Появление новых моделей часто приводит к принципиальному повороту в развитии математики. Примеры таких моделей – неевклидовы геометрии, теория множеств, теория категорий. В течение всего XX века развивались неклассические логики (в основном в рамках математической логики), которые существенно расширили наше понимание о познавательной деятельности.

Помимо формальных моделей существуют имитационные модели, которые обычно требуют использования компьютеров. Умение строить такие модели – целое искусство, необходимо не только уметь описывать процессы на языке математики, выбирая из адекватных моделей наиболее простые, но и уметь находить информативные характеристики моделируемого объекта и ограничиваться минимально необходимым их числом.

Благодаря идее моделирования постоянно расширяется роль математики в современном мире. Основная причина заключается не столько в конкретных и весьма впечатляющих успехах математики, сколько в осознании её необъятных возможностей в прикладных задачах и в её востребованности в самых разных областях. Математика проникла и в гуманитарные науки. Применение математики в какой-либо науке означает определённую зрелость этой науки и начало нового этапа в её развитии. Известно сильное высказывание И. Канта (и целый ряд схожих по смыслу высказываний других классиков науки) о том, что в каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней математики [32].

Математика даёт весьма общие и достаточно чёткие модели в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Конструируемая реальность настолько усложнилась, что без применения моделей, огрубляющих действительность, не обойтись. Изучение свойств моделей – один из способов корректного изучения реальности, позволяющих ограничить вмешательство человека в моделируемую природную систему.

Часто математическая модель представляет собой особый язык описания некоторых явлений. Чтобы справиться с очередными задачами науки и техники, математику самому приходится искать существенное в явлении, то, что впоследствии он назовёт моделью. Примеры: дифференциальное и интегральное исчисления. Ещё один очень яркий пример: с довольно давних пор механика стала рассматриваться как чисто математическая дисциплина. Аналогично этому наглядная геометрия была преобразована Р. Декартом в алгебру, что существенно повысило возможности вывода геометрических свойств. Во второй половине XX века с появлением компьютеров выяснилось, что постановка многих задач не укладывается в модели и постановки задач теоретической математики, которые связаны с принципом абсолютной точности, лежащим в основе формальной логики Аристотеля. Появились новые модели обработки результатов научных исследований, задачи оптимального планирования, задачи математической диагностики, классификации и прогнозирования. Возникает теория «некорректно поставленных» задач [33]. Подразумевается, что в корректных задачах решение существует, единственно и устойчиво.

С появлением математического эксперимента, диалоговых процедур работы с моделями открылись новые горизонты исследования реальности. Имеет место и некоторая «физикализация» логики и математики. В частности, классические понятия «силы», «импульса», «равновесия» и другие давно получили экономико-математические эквиваленты и аналогии в других областях математики. Развиваются и соответствующие эквиваленты фундаментальных понятий современной физики.

В настоящее время один из наиболее важных областей разделов математики – компьютерные науки. Фактически компьютерные науки являются частью прикладной алгебры.

И даже само понимание бесконечности преломляется сейчас сквозь призму компьютера - можно работать со столь большими множествами чисел, что в какой-то степени отпадет необходимость в идеализации понятия «большое» (и, возможно, «бесконечное»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.

2. Штейнгауз Г. Математика – посредник между духом и материей / Пер. с польского Б.И. Копылова; под ред. А.В. Хачояна. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005.

3. Витгенштейн Л. Культура и ценность. О достоверности. М.: АСТ, Астрель, Мидгард, 2010.

4. Декарт Р. Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках, и другие философские работы / Пер. с лат. М.: Академический проект, 2011.

5. Лейбниц Г.В. Труды по философии науки. М.: Либроком, 2010.

6. Бочаров В.А. Аристотель и традиционная логика: Анализ силлогистических теорий. М.: Изд-во МГУ, 1984.

7. Кант И. Критика чистого разума / Пер. с нем.; предисл. И. Евлампиева. М.: Эксмо; СПб.: Мидгард, 2007.

8. Белхост Б. Огюстен Коши. М.: Наука, 1997.

9. Бирюков Б.В. О работах Г. Фреге по философским основаниям математики // Философские вопросы естествознания. II. Некоторые философско-теоретические вопросы физики, математики и химии. М., 1959.

10. Рассел Б. Введение в математическую философию / Пер. В. Суровцев. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2009.

11. Манин Ю.И., Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел: Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2009.

12. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2000.

13. Проблема четырех красок [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Проблема_четырёх_красок (дата обращения: 05.03.2016).

14. Appel K. I., Haken W. Every Planar Map is Four Colorable. Series Contemporary mathematics. Vol. 98. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1989.

15. Robertson N., Sanders D.P., Seymour P., Thomas R. A new proof of the Four-Colour Theorem // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 2. P. 17-25.

16. Gonthier G. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem [Electronic resource] URL: http://research.microsoft.com/en-us/um/people/ gonthier/4col proof.pdf (дата обращения: 07.03.2016).

17. Розов Н.С. Социологический реляционизм С. Фукса и объяснение «рабочего платонизма» в математике // Философия науки. 2006. №3 (30). С. 39-48.

18. Лузин Н.Н. Собрание сочинений. В 3 т. Т. 3. Работы по различным вопросам математики; АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

19. Манин Ю.И. Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.

20. Харди Г.Г. Апология математика / Пер. с англ. Ю.А. Денисова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

21. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

22. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.

23. Arruda A.I. On the imaginary logic of N.A.Vasilev // Proceedings of Fourth Latin-American Symposium on mathematical Logic. North-Holland, 1979. P. 1-41 (русский перевод: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 187-208).

24. Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю. Комитетные конструкции как обобщение решений противоречивых задач исследования операций // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2003. Сер. 2. № 10:2. С. 56-66.

25. Мазуров Вл.Д., Смирнов А.И. Противоречия и классификация // Вестник УИЭУиП. 2011. №1(14). С. 86-94.

26. Арнольд В.И. О функциях трех переменных. Докл. АН СССР, 1957. Т. 114, № 4. С. 679-681.

27. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. Докл. АН СССР, 1957. Т. 114. № 5. С. 953-956.

28. Журавлёв Ю.И. Избранные научные труды. М.: Магистр, 1998.

29. Мазуров Вл.Д. Математические методы распознавания образов. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1982.

30. Пирс Ч.С. Избранные философские произведения. М.: Логос, 2000.

31. Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. М.: Наука, 1982.

32. Кант И. Метафизические начала естествознания // Кант Иммануил. Сочинения в шести томах. М.: Мысль, 1966. Т. 6. С. 53-175.

33. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

МАЗУРОВ Владимир Данилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической экономики Уральский Федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, ведущий научный сотрудник ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: vladimir.mazurov@usu.ru