УДК 519.716

С.С. Марченков[1]

FE-КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*

На множестве функций многозначной логики рассматривается оператор замыкания, заданный на основе систем функциональных уравнений (оператор FE-замыкания). Он порождает FE-классификацию функций многозначной логики, ядро которой составляют классы типа S_G, определяемые группами перестановок G. Доказывается ряд утверждений, которые гарантируют в классах типа S_G FE-предполноту классов только этого типа. Утверждения иллюстрируются на примерах функций 2-, 3- и 4-значной логик.

Ключевые слова: функции многозначной логики, FE-классификация.

Важной проблемой теории функций многозначной логики является проблема классификации множества P_k функций k-значной логики. Обычно классификация проводится на основе некоторого оператора замыкания. Чаще всего это оператор суперпозиции либо его различные расширения. При $k \geqslant 3$ оператор суперпозиции приводит к континуальной классификации множества P_k. В связи с этим в последние 30–35 лет был предложен ряд так называемых сильных операторов замыкания, для которых соответствующие классификации множества P_k конечны либо счетны. В качестве примеров укажем на оператор параметрического замыкания [1], серию операторов программистского типа [2, 3], операторы функционально-алгебраического типа [4–9], операторы логико-функционального типа [10] и оператор логико-дедуктивного типа [11].

В работах [12–14] предложено новое отношение выразимости для функций многозначной логики — выразимость на основе систем функциональных уравнений. С использованием этого отношения в [15, 16] определен новый сильный оператор замыкания — оператор FE-замыкания (в [16] — оператор SFE-замыкания). Как оказалось, при любом $k \geqslant 2$ число FE-замкнутых классов в P_k конечно. В частности, при $k = 2$ их два [15], а при $k = 3$ шесть [16].

Цель данной статьи — продолжить исследование FE-классификации, начатое в работах [15, 16], и охарактеризовать как можно большую часть FE-замкнутых классов. В этом исследовании можно выделить два направления: первое — найти достаточно общие условия, которые гарантируют FE-полноту конечных систем функций в произвольных FE-замкнутых классах; второе — для FE-замкнутых классов типа S_G (класс функций, самодвойственных относительно перестановок группы G) получить теоремы, обеспечивающие FE-предполноту в классах S_G классов только этого типа. Согласно результатам из [15], это могло бы привести к тому, что все FE-замкнутые классы окажутся классами типа S_G. Для $k = 2, 3$ это подтверждается работами [15, 16].

Дадим необходимые определения. Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики), $P_k^{(n)}$ — множество всех функций из P_k, зависящих от n переменных. Для любых $n \geqslant 1$ и i, $1 \leqslant i \leqslant n$, на множестве E_k рассматриваем *селекторную* функцию $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. На множестве P_k предполагаем заданной операцию *суперпозиции* [17]. Множества функций из P_k, замкнутые относительно операции суперпозиции, далее называем *замкнутыми классами*.

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [12–14]. Предполагаем, что каждая функция из P_k имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n-местных функций из P_k используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем *функциональными константами*. Наряду с функциональными константами рассматриваем *функциональные переменные*, для которых используем символы $\varphi_i^{(n)}$ с областью значений $P_k^{(n)}$. Кроме функциональных переменных используем обычные индивидные переменные $x_1, x_2, \dots$ с областью значений E_k.

Пусть $Q \subseteq P_k$. Определим понятие *терма над* Q. Всякая индивидная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \dots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции

[1] Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: mathcyb@cs.msu.su

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения $f_i^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$, $\varphi_j^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$ суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q считаем также *функциональными уравнениями над* Q. Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)},\ldots,\varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. *Решением уравнения* $t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)},\ldots,f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_k, которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение индивидных переменных). Если Ξ — конечная система уравнений, то *решением системы уравнений* Ξ называем систему функций из P_k, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Для того чтобы с помощью систем уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы Ξ, которую назовем *главной функциональной переменной* системы Ξ. Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $F \subseteq P_k^{(n)}$. Говорим, что множество функций F *определяется системой уравнений* Ξ, если F является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$.

Пусть $Q \subseteq P_k$. *Замыканием* множества Q относительно систем функциональных уравнений (коротко FE-*замыканием*) называем множество всех функций из P_k, которые определяются (как одноэлементные множества) системами функциональных уравнений над Q. FE-замыкание множества Q обозначаем через FE$[Q]$. Множество Q называем FE-*замкнутым*, если $Q = \mathrm{FE}[Q]$. Понятия FE-*полноты* и FE-*порождающей системы* вполне аналогичны соответствующим понятиям для операции суперпозиции. Нетрудно убедиться в том, что для любого множества Q (в том числе для $Q = \emptyset$) множеству FE$[Q]$ принадлежат все селекторные функции, а множество FE$[Q]$ замкнуто относительно операции суперпозиции [15].

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ и π — перестановка на множестве E_k. Положим

$$f^{\pi}(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))),$$

где π^{-1} — перестановка, обратная к π. Функция f^{π} называется *двойственной* к функции f относительно перестановки π. Если $f^{\pi} = f$, то говорят, что f *самодвойственна* относительно перестановки π. Множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_{π}. Если G — непустое множество перестановок на E_k, то пусть S_G есть пересечение всех множеств S_{π}, где $\pi \in G$. Для любого множества перестановок G множество S_G образует FE-замкнутый класс [15].

Утверждение 1 представляет собой некоторое обобщение утверждения 2 из [15].

Утверждение 1. *Пусть $k \geqslant 2$, $1 \leqslant m \leqslant k$, Q — FE-замкнутый класс функций из P_k, $R \subseteq Q$ и $g_1,\ldots,g_k$ — такие функции из $R^{(m)}$, что для некоторого набора $(a_1,\ldots,a_m) \in E_k^m$ выполняется равенство*

$$\{g_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,g_k(a_1,\ldots,a_m)\} = E_k. \tag{1}$$

Пусть далее для любой функции $h(x_1,\ldots,x_n)$ из Q и любых индексов $i_1,\ldots,i_n$ из $\{1,2,\ldots,k\}$ функция

$$h(g_{i_1}(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_{i_n}(x_1,\ldots,x_m)) \tag{2}$$

принадлежит множеству R. Тогда множество R является FE-*полным в Q.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $h(x_1,\ldots,x_n)$ из класса Q и произвольный набор $(b_1,\ldots,b_n)$ из E_k^n. Согласно равенству (1), можно выбрать такие индексы $i_1,\ldots,i_n$ и такой набор $(a_1,\ldots,a_m)$, что будет выполняться соотношение

$$(g_{i_1}(a_1,\ldots,a_m),\ldots,g_{i_n}(a_1,\ldots,a_m)) = (b_1,\ldots,b_n). \tag{3}$$

Обозначим функцию (2), принадлежащую множеству R, через $g(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда из (3) и определения функции g следует, что

$$h(b_1,\ldots,b_n) = g(a_1,\ldots,a_m).$$

Таким образом, уравнение

$$\varphi^{(n)}(g_{i_1}(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_{i_n}(x_1,\ldots,x_m)) = g(x_1,\ldots,x_m) \tag{4}$$

над множеством функций $\{g_1, \ldots, g_k, g\}$ правильно определяет функцию h на некотором множестве наборов, включающем, в частности, набор $(b_1, \ldots, b_n)$. Поэтому искомую систему уравнений над множеством R, которая определяет функцию h, можно заведомо получить из k^n уравнений вида (4), соответствующих всем наборам $(b_1, \ldots, b_n)$ из E_k^n. Утверждение доказано.

Пусть G — группа перестановок на множестве E_k и $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$. *$G$-орбитой* набора $(a_1, \ldots, a_n)$ назовем множество всех наборов вида $(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$, где π — перестановка группы G. Очевидно, что G-орбиты любых двух наборов из E_k^n либо не пересекаются, либо совпадают. Далее, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из P_k, принадлежащая классу S_G, то для полного задания функции f достаточно определить ее на любом наборе каждой из G-орбит. В дальнейшем этим фактом мы неоднократно пользуемся.

Обозначим через G_4 группу перестановок на E_4, состоящую из единичной перестановки и перестановок, имеющих цикловые разложения

$$(0)(1)(23), \quad (01)(2)(3), \quad (01)(23), \quad (02)(13), \quad (03)(12), \quad (0213), \quad (0312)$$

(полная импримитивная группа перестановок на E_4, сохраняющая разбиение $(\{0,1\}, \{2,3\})$). Известно [18], что группа G_4 максимальна в полной симметрической группе $\mathbf{S}_4$ всех перестановок на множестве E_4.

Используя утверждение 1, покажем, что множество $S_{G_4}^{(2)}$ является FE-полным в классе S_{G_4}. Для этого определим в классе S_{G_4} функцию $g(x_1, x_2)$ соотношениями

$$g(1,2) = g(1,3) = 0, \quad g(0,2) = g(0,3) = 1, \quad g(3,0) = g(3,1) = 2, \quad g(2,0) = g(2,1) = 3$$

(отметим, что данные восемь наборов образуют G_4-орбиту набора $(0,2)$). На всех остальных наборах из E_4^2 функцию g определим равной, например, первой компоненте набора. Имеем теперь $\{0, 2, g(0,2), g(2,0)\} = E_4$, что вместе с принадлежностью классу S_{G_4} селекторных функций e_1^2, e_2^2 приводит к равенству $\mathrm{FE}[S_{G_4}^{(2)}] = S_{G_4}$.

Пусть $E \subseteq E_k$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Говорят, что функция f *сохраняет множество* E, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из E элемент $f(a_1, \ldots, a_n)$ также принадлежит множеству E. Пусть $\rho(x_1, x_2)$ — двуместный предикат на E_k. Говорят, что функция f *сохраняет предикат* ρ, если для любых n наборов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, удовлетворяющих предикату ρ, набор $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n))$ также удовлетворяет предикату ρ.

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 3$, G — группа перестановок на множестве E_k, $1 \leqslant m < k$ и для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из S_G найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что ограничение функции f на любое $(m-1)$-элементное подмножество множества E_k совпадает с переменной x_i. Пусть далее в множество $S_G^{(m)}$ входят такие функции $g_1, \ldots, g_l$, что ограничение каждой из этих функций на любое $(m-1)$-элементное подмножество из E_k совпадает с переменной x_1 и для любого набора $(a_1, \ldots, a_m) \in E_k^m$, содержащего m различных элементов, выполняется равенство*

$$\{g_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, g_l(a_1, \ldots, a_m)\} = E_k. \tag{5}$$

Пусть, наконец, R есть множество всех функций из P_k, которые сохраняют любое подмножество множества E_k и любой предикат вида

$$(x \in E) \,\&\, (\pi(x) = y), \tag{6}$$

где $E \subset E_k$, $2 \leqslant |E| \leqslant k-1$ и π — нетождественная перестановка на E_k. Тогда класс S_G FE-порождается множеством $S_G \cap R$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что среди функций $g_1, \ldots, g_l$ находятся все m-местные функции из S_G, отличные от селекторных функций. Определим функцию $h(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_l)$ следующими условиями:

$h(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2, g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_m)) = y_1$;

ограничение функции h на любое $(m-1)$-элементное подмножество из E_k совпадает с y_1;

$h(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_l) = y_2$ в остальных случаях.

Покажем, что функция h принадлежит множеству $S_G \cap R$. Сначала установим включение $h \in S_G$. В силу соотношения $\{g_1, \ldots, g_l\} \subset S_G$ G-орбита любого набора $(a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2) \in E_k^{m+2}$ задает G-орбиту набора

$$(a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2, c_1, \ldots, c_l), \tag{7}$$

где

$$c_1 = g_1(a_1, \ldots, a_m), \ \ldots, \ c_l = g_l(a_1, \ldots, a_m). \tag{8}$$

Согласно первому пункту определения функции h, значения функции h на этой G-орбите будут совпадать с $(m+1)$-ми компонентами наборов. Если набор (7) содержит не более $m-1$ различных элементов и не выполняется хотя бы одно из равенств (8), то в соответствии со вторым пунктом определения значения функции h на G-орбите набора (7) вновь будут совпадать с $(m+1)$-ми компонентами наборов. Во всех остальных случаях значения функции h на G-орбите набора (7) будут равны $(m+2)$-м компонентам наборов по третьему пункту определения функции h. Таким образом, функция h самодвойственна относительно любых перестановок группы G.

Докажем теперь, что $h \in R$. Поскольку значениями функции h являются значения переменных y_1, y_2, функция h сохраняет любое подмножество множества E_k. Рассмотрим предикат $\rho(x, y)$ вида (6). Пусть $m + l + 2$ наборов

$$(a_{11}, a_{21}), \ldots, (a_{1m}, a_{2m}), (b_{11}, b_{21}), (b_{12}, b_{22}), (c_{11}, c_{21}) \ldots, (c_{1l}, c_{2l})$$

удовлетворяют предикату ρ. Если все элементы набора $(a_{11}, \ldots, a_{1m})$ (а тогда и набора $(a_{21}, \ldots, a_{2m})$) различны, то для вычисления значений

$$h(a_{11}, \ldots, a_{1m}, b_{11}, b_{12}, c_{11}, \ldots, c_{1l}), \quad h(a_{21}, \ldots, a_{2m}, b_{21}, b_{22}, c_{21}, \ldots, c_{2l}) \tag{9}$$

необходимо воспользоваться третьим пунктом определения функции h, поскольку функции $g_1, \ldots, g_l$ удовлетворяют условию (5), а каждый из наборов $(c_{11}, \ldots, c_{1l})$, $(c_{21}, \ldots, c_{2l})$ содержит не более $k-1$ различных значений (см. ограничение $|E| \leqslant k-1$ в определении предиката (6)). Поэтому пара (9) будет совпадать с парой (b_{12}, b_{22}), т. е. удовлетворять предикату ρ.

Пусть не все элементы набора $(a_{11}, \ldots, a_{1m})$ различны. Тогда это верно и для набора $(a_{21}, \ldots, a_{2m})$. Если набор $(c_{11}, \ldots, c_{1l})$ совпадает с набором

$$(g_1(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, g_l(a_{11}, \ldots, a_{1m})), \tag{10}$$

то по определению функций $g_1, \ldots, g_l$ должно быть

$$c_{11} = \ldots = c_{1l} = a_{11}. \tag{11}$$

Следовательно, первое из значений (9) есть b_{11}. Вместе с тем из равенств (11) вытекают равенства

$$c_{21} = \ldots = c_{2l} = a_{21}.$$

Значит, набор $(c_{21}, \ldots, c_{2l})$ совпадает с набором $(g_1(a_{21}, \ldots, a_{2m}), \ldots, g_l(a_{21}, \ldots, a_{2m}))$ и потому вторая из величин (9) есть b_{21}, т. е. пара (9) удовлетворяет предикату ρ.

Пусть набор $(c_{11}, \ldots, c_{1l})$ отличается от набора (10), т. е. от набора $(a_{11}, \ldots, a_{11})$. Тогда ввиду рассмотренного выше случая набор $(c_{21}, \ldots, c_{2l})$ также отличен от набора $(a_{21}, \ldots, a_{21})$ (здесь используется лишь представление (6) предиката ρ). Замечаем, что наборы

$$(a_{11}, \ldots, a_{1m}, b_{11}, b_{12}, c_{11}, \ldots, c_{1l}), \quad (a_{21}, \ldots, a_{2m}, b_{21}, b_{22}, c_{21}, \ldots, c_{2l}) \tag{12}$$

содержат одинаковое число различных элементов. Поэтому в случае, когда каждый из наборов (12) содержит не более $m-1$ различных элементов, по второму пункту определения функции h получаем, что набор (9) совпадает с набором (b_{11}, b_{21}), т. е. удовлетворяет предикату ρ. В противном случае применяется третий пункт определения функции h, согласно которому пара (9) есть (b_{12}, b_{22}). Эта пара также удовлетворяет предикату ρ.

Итак, функция h сохраняет предикат ρ и тем самым принадлежит множеству R.

Теперь нетрудно выписать систему Ξ функциональных уравнений, которая определяет функции $g_1, \ldots, g_l$. Во-первых, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant l$, эта система будет включать все уравнения вида

$$\varphi_i^{(m)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) = x_{j_1}, \tag{13}$$

где $1 = j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_m \leqslant m-1$. Затем добавим к этим уравнениям уравнение

$$h(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2, \varphi_1^{(m)}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_l^{(m)}(x_1, \ldots, x_m)) = y_1. \tag{14}$$

Очевидно, что уравнения (13) обеспечивают совпадение с x_1 ограничений функции g_i на любое $(m-1)$-элементное подмножество множества E_k. Рассмотрим уравнение (14). Ввиду наличия в системе Ξ

уравнений (13) достаточно рассмотреть равенство (14) на наборе $(a_1, \dots, a_m, b_1, b_2)$, где элементы $a_1, \dots, a_m$ попарно различны и $b_1 \neq b_2$. В этом случае, согласно определению функции h, равенство

$$h(a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \varphi_1^{(m)}(a_1, \dots, a_m), \dots, \varphi_l^{(m)}(a_1, \dots, a_m)) = b_1$$

будет выполняться только в том случае, когда

$$\varphi_1^{(m)}(a_1, \dots, a_m) = g_1(a_1, \dots, a_m), \dots, \varphi_l^{(m)}(a_1, \dots, a_m) = g_l(a_1, \dots, a_m).$$

Таким образом, система уравнений Ξ определяет (при различном выборе главной функциональной переменной) любую из функций $g_1, \dots, g_l$. Остается заметить, что множество R замкнуто, и применить утверждение 1. Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы 1 все FE-предполные в S_G классы имеют вид $S_{G'}$, где группа G максимальна в группе G'.

Доказательство. В работе [15] установлено, что $\mathrm{FE}[\emptyset] = H_k$, где H_k — класс однородных функций, содержащий, в частности, тернарный дискриминатор p (по поводу однородных функций см. работу [19]). С другой стороны, в [20] охарактеризованы все замкнутые дискриминаторные (т. е. содержащие дискриминатор p) классы в P_k. Как оказалось, они определяются конечными множествами предикатов, состоящими из одноместных предикатов и предикатов вида (6) (где уже возможно равенство $E = E_k$). Таким образом, любой FE-предполный в S_G класс либо содержится в классе вида $S_{G'}$, где G — собственная подгруппа группы G', либо имеет вид $S_G \cap R$, где множество R определено в условиях теоремы 1. Однако множество $S_G \cap R$ FE-полно в классе S_G. Поэтому остаются классы вида $S_{G'}$. В завершение доказательства следует заметить, что из включения $G' \subset G''$ вытекает включение $S_{G'} \supset S_{G''}$.

Ниже мы рассматриваем четыре частных случая доказанного следствия.

1. *G — единичная группа и, следовательно, $S_G = P_k$.*

В условиях теоремы 1 необходимо положить $m = 1$, а в качестве функций $g_1, \dots, g_l$ взять (при $l = k$) константы $0, \dots, k-1$. При $k = 2$ помимо единичной группы G имеется только одна группа G', которая порождается перестановкой $x + 1 \pmod 2$. Класс $S_{G'}$ есть класс самодвойственных булевых функций, а согласно результатам из [15], всякий FE-замкнутый класс булевых функций содержит класс $S_{G'}$. Таким образом, получаем ровно два FE-замкнутых класса булевых функций [15]. При $k = 3$ имеются 4 группы G', в которых максимальна группа G. Они порождаются перестановками $x+1$, $2x$, $2x+1$, $2x+2$ (арифметические операции выполняются по модулю 3).

Пусть $\mathbf{S}_k$ — группа всех перестановок на множестве E_k. Нетрудно убедиться в том, что любая минимальная подгруппа группы $\mathbf{S}_k$ есть циклическая группа, порождаемая перестановкой, которая разлагается в произведение циклов длины 1 и циклов одной и той же простой длины. В п. 2 мы рассматриваем группы несколько более общего вида.

2. *G — циклическая подгруппа группы $\mathbf{S}_k$, которая порождается перестановкой, разлагающейся в циклы длины 1 и циклы одной и той же длины (не обязательно простой).*

Для упрощения построений предположим, что перестановка π, порождающая группу G, имеет цикловое разложение вида

$$(01 \dots m-1)(m \dots 2m-1) \dots (ml \dots m(l+1)-1)(m(l+1)) \dots (k-1),$$

где $m \geqslant 2$ и $l \geqslant 0$. Легко видеть, что классу S_G принадлежит сама перестановка π, а также все функции-константы $m(l+1), \dots, k-1$. Пусть $l = 0$. Тогда в качестве функций g_i из теоремы 1 можно взять (одноместные) функции $\pi, \pi^2, \dots, \pi^m$ и функции-константы $m, \dots, k-1$. Действительно, для любого $a \in E_m$ имеет место равенство $\{\pi(a), \pi^2(a), \dots, \pi^m(a)\} = E_m$.

Пусть теперь $l \geqslant 1$. Как и выше, в систему функций $\{g_i\}$ будут входить все функции-константы $m(l+1), \dots, k-1$. Покажем, что для любых неравных a, b из $E_{m(l+1)}$ в классе S_G найдется такая функция $f_{ab}(x)$, что $f_{ab}(a) = b$. Тем самым будут выполнены условия теоремы 1.

Рассмотрим две возможности. Предположим сначала, что элементы a, b принадлежат одному циклу $\{mi, \dots, m(i+1)-1\}$. Тогда в качестве функции f_{ab} можно взять подходящую степень перестановки π.

Пусть теперь

$$a \in \{mi, \dots, m(i+1)-1\}, \quad b \in \{mj, \dots, m(j+1)-1\},$$

где $0 \leqslant i,\ j \leqslant l$ и $i \neq j$. Тогда функцию f_{ab} определяем в классе S_G следующим образом:

$$f_{ab}(a) = b, \quad f_{ab}(a+1) = b+1, \quad \ldots, \quad f_{ab}(a+m-1) = b+m-1 \tag{15}$$

и $f_{ab}(x) = x$ при $x \notin \{mi, \ldots, m(i+1)-1\}$. При этом сложение в левых частях равенств (15) рассматривается в цикле $\{mi, \ldots, m(i+1)-1\}$ (так что $(m(i+1)-1)+1 = mi$), а в правых частях равенств (15) — в цикле $\{mj, \ldots, m(j+1)-1\}$.

При $k = 3$ условиям п. 2 удовлетворяют 4 группы, упомянутые в п. 1. Все они максимальны только в группе $\mathbf{S}_3$. Соответствующий класс $S_{\mathbf{S}_3}$ есть класс H_3 однородных функций. Поскольку H_3 содержится в любом FE-замкнутом классе из P_3 [15], получаем ровно 6 FE-замкнутых классов в P_3. Другое доказательство этого факта приведено в [16].

Для любого $k \geqslant 2$ обозначим через $\mathbf{A}_k$ группу всех четных перестановок на E_k (знакопеременная подгруппа группы $\mathbf{S}_k$).

3. G — *группа* $\mathbf{A}_k$.

Группа $\mathbf{A}_2$ является единичной группой и потому класс $S_{\mathbf{A}_2}$ совпадает с классом P_2. В этом случае соответствующее утверждение вытекает, например, из п. 1. Группа $\mathbf{A}_3$ является циклической и порождается перестановкой $x+1 \pmod 3$. В этом случае можно обратиться к п. 2. При $k \geqslant 4$ все функции класса $S_{\mathbf{A}_k}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 при $m = k-2$ (см. [21]). При этом в классе $S_{\mathbf{A}_k}$ существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что для любых неравных элементов $a_1, \ldots, a_{k-2}$ из E_k выполняется соотношение

$$\{g_1(a_1, \ldots, a_{k-2}), \ldots, g_k(a_1, \ldots, a_{k-2})\} = E_k$$

и ограничение каждой из функций $g_1, \ldots, g_k$ на любое $(k-3)$-элементное подмножество множества E_k совпадает с переменной x_1.

Пусть V_4 — группа перестановок на E_4, которая состоит из единичной перестановки и перестановок $(01)(23)$, $(02)(13)$, $(03)(12)$ (четверная группа Клейна).

4. G — *группа* V_4.

В теореме 1 следует взять $m = 1$, а в качестве функций $g_1, \ldots, g_l$ — все перестановки группы V_4 (нетрудно проверить, что они входят в класс S_{V_4}).

Пусть $k \geqslant 3$ и группа D_k состоит из всех перестановок на E_k, которые сохраняют элемент $k-1$ (полная импримитивная группа перестановок на E_k, сохраняющая разбиение $(\{0, 1, \ldots, k-2\}, \{k-1\})$). Известно [18], что группа D_k максимальна в группе $\mathbf{S}_k$.

Теорема 2. *При любом $k \geqslant 3$ класс H_k однородных функций единственный* FE-*предполный в классе* S_{D_k}.

Доказательство. Очевидно, что константа $k-1$ принадлежит классу S_{D_k}.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из множества $S_{D_k} \setminus H_k$. Получим из нее константу $k-1$. Заметим, что уравнению

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(y) \tag{16}$$

удовлетворяют только константы. Как отмечалось в [15], решением уравнения

$$\varphi_2^{k!}(x) = x \tag{17}$$

служат перестановки на E_k и только они. Уравнение

$$f(\varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_2(x_n)) = \varphi_2(f(x_1, \ldots, x_n)) \tag{18}$$

выделяет из всех перестановок только перестановки группы D_k. Рассмотрим далее уравнение

$$d(\varphi_2'(x), \varphi_2''(x), \varphi_1(x)) = \varphi_1(x), \tag{19}$$

где переменные φ_2', φ_2'' удовлетворяют уравнениям (17), (18), а дуальный дискриминатор $d(x,y,z)$ из класса H_k удовлетворяет тождествам $d(x,x,y) = x$ и $d(x,y,z) = z$ при $x \neq y$. Если $\varphi_1 = k-1$, то уравнению (19) удовлетворяют функции φ_2', φ_2'', не совпадающие ни в одной точке из E_{k-1}. Если же $\varphi_1 \neq k-1$, то при любых φ_2', φ_2'' (из D_k) равенство (19) будет опровергаться при $x = k-1$.

Таким образом, системе уравнений (16)–(19) по переменной φ_1 удовлетворяет только константа $k-1$.

Покажем, что для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ из класса S_{D_k} в классе H_k найдется такая функция $h(x_1, \ldots, x_m, y)$, что

$$g(x_1, \ldots, x_m) = h(x_1, \ldots, x_m, k-1).$$

В самом деле, для любого набора $(a_1, \ldots, a_m) \in E_k^m$ присоединение к наборам D_k-орбиты набора $(a_1, \ldots, a_m)$ последней компоненты, равной $k-1$, дает часть $\mathbf{S}_k$-орбиты набора $(a_1, \ldots, a_m, k-1)$. Поэтому для доказательства существования однородной функции h достаточно установить, что для наборов $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m)$, принадлежащих различным D_k-орбитам, наборы $(a_1, \ldots, a_m, k-1)$, $(b_1, \ldots, b_m, k-1)$ принадлежат различным $\mathbf{S}_k$-орбитам. Предположив противное, получим, что один из этих наборов переводится в другой некоторой перестановкой π из группы $\mathbf{S}_k$. Очевидно, что $\pi(k-1) = k-1$, т. е. $\pi \in D_k$. Значит, один из наборов $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m)$ переводится в другой с помощью перестановки группы D_k, что невозможно по предположению. Теорема доказана.

Теорема 3. *Класс H_4 — единственный* FE-*предполный в классе S_{G_4}.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из множества $S_{G_4} \setminus H_4$. Как установлено в [15], существует система функциональных уравнений Ξ без функциональных констант, которой удовлетворяют (по главной функциональной переменной φ) все перестановки на E_4, представляющие собой циклы длины 4, и только такие функции из $P_4^{(1)}$. Добавление к системе уравнений Ξ уравнения

$$f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n))$$

ввиду соотношения $f \in S_{G_4} \setminus H_4$ позволяет "отсеять" из указанных перестановок все перестановки, не входящие в группу G_4. Оставшиеся две перестановки группы G_4 суть (0213) и (0312). Возведение каждой из них в квадрат дает одну и ту же перестановку (01)(23), которая входит в класс S_{G_4}. Таким образом, системой функциональных уравнений над функцией f можно определить функцию (01)(23). В дальнейшем будем обозначать ее через g_1.

Покажем теперь, что для всякой функции $g(x_1, x_2)$ из класса S_{G_4}, удовлетворяющей условию $g(x_1, x_1) = x_1$, в классе H_4 найдется такая функция $h(x_1, x_2, y_1, y_2)$, что справедливо тождество

$$h(x_1, x_2, g_1(x_1), g_1(x_2)) = g(x_1, x_2).$$

На четырех наборах $(x_1, x_1, g_1(x_1), g_1(x_1))$ (а также на остальных 8 наборах из $\mathbf{S}_4$-орбиты набора $(0,0,1,1)$) функцию h полагаем равной x_1. Далее, G_4-орбита набора $(0,1)$ состоит из четырех наборов

$$(0,1), \quad (1,0), \quad (2,3), \quad (3,2). \tag{20}$$

Значение $g(0,1)$ принадлежит множеству $\{0,1\}$. Если $g(0,1)$ совпадает с первой (второй) компонентой набора $(0,1)$, то и на остальных наборах (20) значение функции g также совпадает с той же компонентой набора. Поэтому на четырех наборах

$$(0,1,1,0), \quad (1,0,0,1), \quad (2,3,3,2), \quad (3,2,2,3)$$

(а также на остальных 8 наборах из $\mathbf{S}_4$-орбиты набора $(0,1,1,0)$) значение функции h полагаем равным соответственно первой (второй) компоненте набора.

G_4-орбита набора $(0,2)$ состоит из восьми наборов:

$$(0,2),\ (0,3),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,0),\ (2,1),\ (3,0),\ (3,1). \tag{21}$$

Им отвечают восемь наборов $(x_1, x_2, g_1(x_1), g_1(x_2))$:

$$(0,2,1,3),\ (0,3,1,2),\ (1,2,0,3),\ (1,3,0,2),\ (2,0,3,1),\ (2,1,3,0),\ (3,0,2,1),\ (3,1,2,0). \tag{22}$$

Если $g(0,2)$ совпадает с первой (второй) компонентой набора $(0,2)$, то и на остальных наборах (21) значение функции g совпадает с той же компонентой набора. Поэтому функцию h на наборах (22) (а также на остальных 16 наборах из $\mathbf{S}_4$-орбиты набора $(0,2,1,3)$) определяем равной первой (второй) компоненте набора.

Пусть $g(0,2) \notin \{0,2\}$, например $g(0,2) = 1$. Тогда на остальных наборах (21) значения функции g суть 1, 0, 0, 3, 3, 2, 2. Значит, на наборах (22) (и остальных 16 наборах из $\mathbf{S}_4$-орбиты набора $(0,2,1,3)$) функцию h следует определить равной третьей компоненте набора. На всех остальных наборах значение функции h можно положить равным, например, первой компоненте набора. Остается напомнить, что FE-полную в S_{G_4} систему образует, например, рассмотренная выше функция g, где $g(0,2) = 1$. Теорема доказана.

При $k = 4$ теоремы 1–3 позволяют получить утверждения, аналогичные следствию из теоремы 1, для всех собственных подгрупп группы $\mathbf{S}_4$, за исключением трех попарно сопряженных групп. Одна из этих групп состоит из единичной перестановки и перестановок (0)(1)(23), (01)(2)(3), (01)(23) (данная группа максимальна в группе G_4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов А.В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
2. Голунков Ю.В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23–34.
3. Тайманов В.А. О функциональных системах k-значной логики с операциями программного типа // ДАН СССР. 1983. **268**. № 6. С. 1307–1310.
4. Нгун Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискретная математика. 1992. **4**. № 4. С. 82–95.
5. Нгун Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. **4**. № 4. С. 87–108.
6. Нгун Ван Хоа. О замкнутых классах k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Дискретная математика. 1996. **8**. № 1. С. 129–156.
7. Марченков С.С. Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. 1996. **8**. № 1. С. 99–128.
8. Марченков С.С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. **9**. № 3. С. 125–152.
9. Марченков С.С. S-классификация функций трехзначной логики. М.: Физматлит, 2001.
10. Марченков С.С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. **11**. № 4. С. 110–126.
11. Марченков С.С. Эквациональное замыкание // Дискретная математика. 2005. **17**. № 2. С. 117–126.
12. Марченков С.С., Фёдорова В.С. О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. **15**. № 6. С. 48–57.
13. Марченков С.С., Фёдорова В.С. О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Докл. РАН. 2009. **426**. № 4. С. 448–449.
14. Марченков С.С., Фёдорова В.С. Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. киберн. 2009. № 4. С. 29–33.
15. Марченков С.С. Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. **17**. № 4. С. 18–31.
16. Фёдорова В.С. SFE-замкнутые классы трехзначной логики // Сб. статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. Вып. 7. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2010. С. 22–33.
17. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
18. Байрамов Р.А. К проблеме полноты в симметрической полугруппе конечной степени // Дискретный анализ. Вып. 8. Новосибирск: Наука, 1966. С. 5–26.
19. Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 85–106.
20. Марченков С.С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. 1997. **61**. № 3. С. 359–366.
21. Марченков С.С. Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 100–122.

Поступила в редакцию
15.09.10

FE-CLASSIFICATION OF MANY-VALUED LOGIC FUNCTIONS

Marchenkov S. S.

In the set of many-valued logic functions the closure operator based on functional equations systems is considered (FE-closure operator). It generates the FE-classification of many-valued logic functions. The kernel of this classification form the SG-type classes defined by the permutation groups G. Some statements are proved which guarantee the FE-precompleteness of SG-type classes in other SG-type classes. The statements are illustrated by examples of 2-, 3-, and 4-valued logic functions.

Keywords: many-valued logic function, FE-classification.