УДК 004.925.86

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Ю. Н. Косников[1], Д. Р. Абубекеров[2]

[1, 2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

[1] kosnikov@gmail.com
[2] ofjordan@yandex.ru

Аннотация. Предложен интерполянт нового вида для реконструкции кривых, заданных множеством опорных точек. Интерполянт получен адаптацией интерполянта на основе радиальных базисных функций к зависимости от одного параметра. Смешивающие функции интерполянта действуют вдоль оси параметрической системы координат, эта ось совпадает с реконструируемой кривой. Центры смешивающих функций размещаются в опорных точках. Координаты промежуточных точек кривой вычисляются как суммы взвешенных значений смешивающих функций. Качество интерполяции зависит от многих факторов, в частности от вида смешивающих функций, числа опорных точек сегмента, участвующих в вычислениях и визуализации, и расстояний между опорными точками. Провести аналитическое исследование свойств предлагаемого интерполянта затруднительно. Описывается программа, позволяющая в интерактивном режиме определить влияние различных факторов на качество интерполяции. Программа выполнена на языке MatLab.

Ключевые слова: кривая, опорная точка, реконструкция, параметрическая интерполяция, визуализация, смешивающая функция, программа, точность интерполяции, гладкость кривой

Для цитирования: Косников Ю. Н., Абубекеров Д. Р. Экспериментальное исследование параметрической интерполяции и визуализации неаналитических кривых // Вестник Пензенского государственного университета. 2024. № 4. С. 79–83.

Криволинейные геометрические конструкции применяются при решении многих прикладных задач визуализации. С их помощью формируются изображения траекторий движения транспортных средств, отображаются результаты научного эксперимента, представляются границы земельных участков и геологических пластов, проводятся изолинии и границы зон распространения воздействий или физических величин. Один из вариантов задания формы кривых – множество характерных (опорных, контрольных) точек. В этом случае для реконструкции всей кривой требуется интерполяция. Методов интерполяции много, следовательно, при решении конкретной прикладной задачи возникает проблема выбора метода.

Хорошими формообразующими свойствами обладают интерполянты на основе смешивающих функций (СФ). Каждая опорная точка снабжается функцией одного или двух аргументов, которая в опорной точке получает экстремальное значение и плавно изменяется при отходе от опорной точки. Координаты промежуточных точек получаются путем суммирования (смешивания) взвешенных значений СФ. Весовые коэффициенты (коэффициенты влияния опорных точек) зависят от реконструируемой геометрической формы.

Для реконструкции кривых по опорным точкам широко применяются сплайны. Их смешивающими функциями, в частности, являются степенные полиномы различного вида. Аппарат сплайнов применяется десятки лет, но актуален и в настоящее время. Например, в публикации [1] 2022 г. описана интерполяция неаналитического контура с помощью B-сплайнов. Как правило, сплайны описываются в параметрической форме. При изменении параметра в заданном диапазоне в визуальной форме представляется отрезок между двумя опорными точками. Можно предложить интерполянт другого вида, у которого визуально представляемый отрезок соединяет несколько опорных точек – три, четыре и более. Применение такого интерполянта сокращает число отсеков составной кривой, упрощает алгоритм интерполяции и повышает ее производительность.

Предлагаемый интерполянт получается путем модификации интерполянта на основе радиальных базисных функций (РБФ). Такой интерполянт успешно применяется для моделирования гладких поверхностей, точно проходящих через множество опорных точек. Например, в публикации [2] описаны целый ряд РБФ и их применение для интерполяции. При параметрической форме записи РБФ-интерполянт является функцией двух переменных – параметров. Отсеки поверхностей, представляемые визуально при пробегании параметрами заданных интервалов, проходят через несколько опорных точек. Промежуточные точки отсеков становятся вершинами полигональной сетки, подлежащей визуализации средствами графической системы компьютера. Если перевести РБФ-интерполянт из трехмерного пространства на плоскость и ввести зависимость координат промежуточных точек от одного параметра, можно использовать интерполяционные свойства РБФ для реконструкции кривых.

Математическое описание предлагаемого интерполянта получено из РБФ-интерполянта устранением зависимости координат промежуточных точек от второго параметра. В этом случае возникает параметрическая система координат, имеющая криволинейную ось, которая проходит через опорные (и промежуточные) точки, т.е. совпадает с реконструируемой кривой. Опорные точки, кроме декартовых координат x_i, y_i, получают параметрическую координату t_i, где i – номер опорной точки. Для реконструкции кривой нужно найти декартовы координаты промежуточных точек каждого ее отсека. С этой целью организуется перебор параметрических координат в диапазоне от $t_{\min}$ до $t_{\max}$ и определение декартовых координат x, y по интерполяционным выражениям

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{xi} \varphi(r_i), \tag{1}$$

$$y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{yi} \varphi(r_i), \tag{2}$$

$$r_i = |t - t_i|,$$

где N – количество опорных точек, оказывающих влияние на промежуточные точки; r_i – параметрическое расстояние между промежуточной (текущей) точкой и i-й опорной точкой; $\varphi(r_i)$ – значение смешивающей функции i-й опорной точки на удалении r_i от ее центра (ядра); λ_{xi}, λ_{yi} – коэффициенты влияния (весовые коэффициенты) i-й опорной точки на текущую точку.

Следует отметить, что добавление третьего аналогичного (1) и (2) уравнения для координаты z дает описание интерполянта пространственных кривых. Далее для простоты речь будет идти только о плоских кривых.

В вычислениях участвуют коэффициенты влияния опорных точек. Они должны быть найдены предварительно из условия точного прохождения кривой через опорные точки. Условие представляется в виде двух систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{xi} \varphi(r_{ij}) = x_j, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{yi} \varphi(r_{ij}) = y_j\,,\ j = 1\,..\,N, \tag{4}$$

где r_{ij} – параметрическое расстояние между i-й и j-й опорными точками.

СЛАУ разрешаются относительно коэффициентов λ_{xi}, λ_{yi}, которые подставляются в (1), (2).

Количество опорных точек в реконструируемой кривой может быть весьма велико. Чтобы снизить размерность СЛАУ, в этом случае кривую составляют из сопрягающихся отсеков. Тогда выражения (1), (2) описывают точки одного отсека. Сопряжение отсеков достигается за счет двух приемов. Во-первых, при нахождении промежуточных точек каждого отсека в вычислениях участвуют некоторые точки соседних отсеков, т.е. отсеки частично перекрываются. Во-вторых, при формировании каждого отсека в визуальной форме представляются не все его промежуточные точки, а лишь ряд средних точек, образующих визуальный сегмент. Возникает схема расчета-визуализации вида $N \mapsto M$, где N – количество опорных точек, участвующих в вычислениях, а M – количество опорных точек, соединяемых в визуальном сегменте. Эти количества нуждаются в обосновании.

Характеристики качества интерполяции зависят от выбора схемы расчета-визуализации, расстояний между опорными точками и вида СФ. Провести аналитическое исследование свойств предлагаемого интерполянта по выражениям (1), (2) затруднительно. Выходом является экспериментальное исследование этих свойств. Предлагается программа, позволяющая в интерактивном режиме определить влияние различных факторов на качество интерполяции. Программа выполнена на языке MatLab.

Функционал программы включает следующие операции:

– визуализация тестовой функции в виде двумерной кривой, располагаемой в окне вывода. Для статистического подтверждения результатов интерполяции в качестве тестовой функции могут использоваться различные зависимости. Размер окна вывода может масштабироваться;

– выделение опорных точек тестовой кривой путем указания манипулятором «мышь». При этом координаты опорных точек в окне вывода определяются автоматически и заносятся в память. Применяется целочисленная последовательная параметризация;

– выбор вида смешивающей функции. Спектр СФ довольно широк.

В программе для определенности использованы:

1) радиальная базисная функция «инверсный мультиквадрик» [2]:

$$\varphi(r_i) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon(t-t_i)^2}},$$

где ε – коэффициент сглаженности (формы);

2) биквадратная координатно-линейная функция [3]:

$$\varphi(r_i) = (1 - r_i{}^2)^2,$$

где $r_i = \frac{t-t_i}{t_{\max}}$, а $t_{\max}$ – размер половины зоны влияния опорной точки в параметрических координатах;

3) бигармоническая функция Треффца (Trefftz) [4]:

$$\varphi(r_i) = 2r_i^2 \ln(r_i) + \left(1 - r_i^2\right),$$

при вычислении которой должно выполняться условие $\varphi(0) = 1$;

4) обратная функция Менандро (Menandro) третьей степени [5]:

$$\varphi(r_i) = -\frac{4}{1+r_i^3} + \frac{6}{1+r_i{}^2} - 1.$$

Все СФ задаются математическими формулами, в связи с чем в программу могут быть введены и другие разновидности СФ;

– задание схемы расчета-визуализации;

– вычисление коэффициентов влияния опорных точек путем решения СЛАУ вида (3), (4);

– вычисление промежуточных точек интерполянта по выражениям (1), (2);

– отображение результата интерполяции в окне вывода для визуального контроля формы;

– определение погрешности интерполяции по формуле среднеквадратического отклонения и метрике Хаусдорфа.

На рис. 1 показан вид окна вывода программы с тестовой кривой синего цвета, имеющей параметрическое описание вида (t – параметр):

$$x(t) = t - 2\sin(t) - 2,$$

$$y(t) = 1 - 2\cos(t) + 0.1t^2 - 5, \quad t = 1, 2, \dots, 11.$$

Кривая снабжена опорными точками.

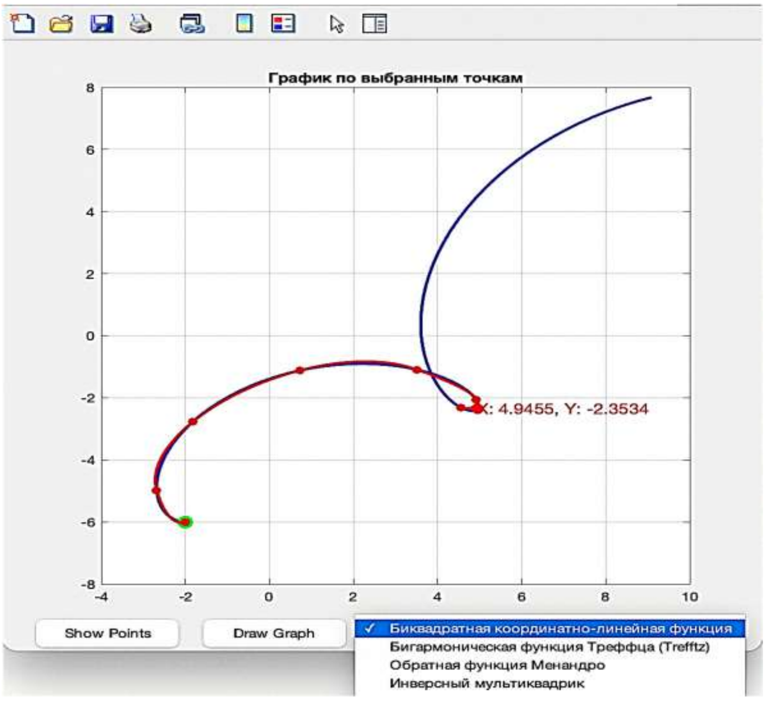

Рис. 1. Визуализация тестовой и интерполированной кривых

На данном рисунке показан сегмент интерполированной кривой красного цвета, построенный с применением биквадратной СФ. Использована схема расчета-визуализации вида 7↦5. Для наглядности изображения опорные точки расставлены настолько редко, чтобы возникло видимое расхождение кривых. На рис. 2 укрупненно показан участок наибольшего расхождения кривых – в области петли.

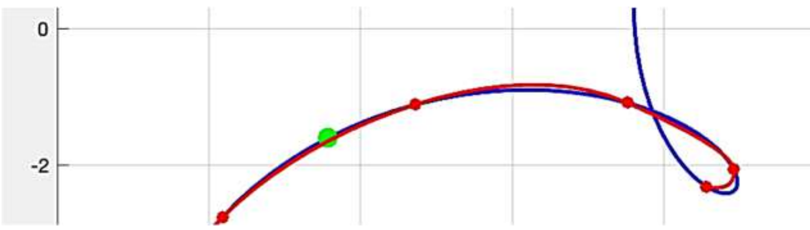

Рис. 2. Область наибольшего расхождения тестовой и интерполированной кривых

В этом случае среднеквадратическая погрешность интерполяции равна 6,78 %, а метрика Хаусдорфа дает значение 0,118.

Создан программный инструмент, который позволяет проводить визуальный и количественный анализ зависимости качества интерполяции от расстановки опорных точек, выбора СФ и ее схемы расчета-визуализации. Использование программы позволит обоснованно выбирать параметры интерполяции для визуального представления плоских геометрических объектов произвольной формы. При возникновении задачи визуализации конкретного геометрического объекта к его фрагментам можно «примерить» различные близкие по форме аналитические кривые и применить различную расстановку опорных точек, различные СФ и различные схемы расчета-визуализации. Оценив варианты по погрешности интерполяции, можно осуществить обоснованный выбор.

Список литературы

1. Wei J., Sun C., Zhang Xj. [et al.]. An efficient and accurate interpolation method for parametric curve machining // Sci. Rep. 12. – 16000 (2022). URL: https://doi.org/10.1038/s41598-022-20018-9

2. Skala V., Mourycova E. Meshfree Interpolation of Multidimensional Time-Varying Scattered Data // Computers. 2023. № 12. P. 243. URL: https://doi.org/10.3390/computers12120243

3. Косников Ю. Н. Целочисленная параметризация геометрических форм на координатной плоскости // Международный научно-исследовательский журнал. 2023. № 12 (138). С. 1–9. URL: https://research-journal.org/archive/12-138-2023-december/10.23670/IRJ.2023.138.15

4. Piltner R. Exploring New Options for Data Interpolation with Radial Basis Functions // Workshop on Environmental Health and Air Pollution. 2018. P. 1–4. doi: 10.4108/eai.21-6-2018.2276666

5. Menandro F. Two new classes of compactly supported radial basis functions for approximation of discrete and continuous data // Engineering Reports. 2019. Vol 1. doi: 10.1002/eng2.12028

Информация об авторах

Косников Юрий Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы», Пензенский государственный университет.

Абубекеров Динар Рашидович, аспирант, Пензенский государственный университет.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.