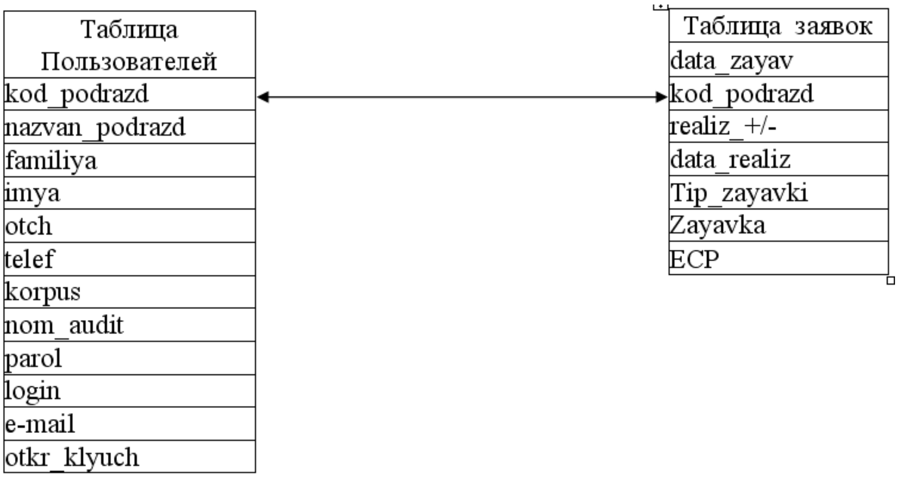

Рис.4 Структура таблиц пользователей и заявок

В работе описана возможность применения электронно-цифровой подписи для организации безбумажного документооборота с обеспечением целостности в рамках одной из подсистем, используемых в КЧГТА. Подходы, изложенные в работе, могут найти разнообразное практическое применение.

УДК 519

А.А. Узденов, А.М. Кочкаров

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ p-ЦЕНТРОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.

1. Р-центры

В данной работе впервые рассматривается известная задача о p-центрах [1] в новой постановке на предфрактальных и фрактальных графах которая является математической моделью задач размещения центров обслуживания, баз, станций и т.д.

Пусть дан взвешенный предфрактальный [2] (n,L)-граф $G_l=(V_l,E_l)$, $l=\overline{1,L}$ с затравкой $H=(W,Q)$, где H – регулярный граф, степень каждой вершины w_i которой равна s, $|W|=n$.

Взвешивание рёбер определяется по принципу, где каждому ребру e_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, $e_{ij}^1\in H_1=(W_1,Q_1)=H=(W,Q)$, первого ранга приписываем вес a_{ij}, $a_{ij}\in[a,b]$, $a,b\in R^+$; ребрам e_{ij}^2, $e_{ij}^2\in H_2^t=(W_2,Q_2)$, $t=\overline{1,n}$, второго ранга, затравок $H_2^t=(W_2,Q_2)$, приписываем веса $a_{ij}^{\;2}$, $a_{ij}^{\;2}\in[ka,kb]$, равные соответствующим весам ребер $e_{ij}^{1} \in H_1 = (W_1, Q_1)$ первого ранга затравок $H_1 = (W_1, Q_1)$, умноженных на коэффициент масштабирования k, $0 < k < 1$, [3]; ребрам e_{ij}^{3}, $e_{ij}^{3} \in H_3^m = (W_3, Q_3)$, $m = \overline{1, n^2}$, третьего ранга, затравок $H_3^m = (W_3, Q_3)$, соответствуют веса $a_{ij}{}^3$, $a_{ij}{}^3 \in [k^2 a, k^2 b]$, т.е. $a_{ij}^3 = k^2 a_{ij}$, равные соответствующим весам ребер $e_{ij}^{2} \in H_2^t = (W_2, Q_2)$ второго ранга затравок $H_2^t = (W_2, Q_2)$, умноженных на k. Ребрам l-го ранга e_{ij}^{l}, $e_{ij}^{l} \in H_l^r = (W_l, Q_l)$, $i, j = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, n^{l-1}}$, затравок $H_l^r = (W_l, Q_l)$, приписываем веса $a_{ij}{}^l$, $a_{ij}^l = k^{l-1} a_{ij}$, равные соответствующим весам ребер $e_{ij}^{l-1} \in H_{l-1}^t = (W_{l-1}, Q_{l-1})$ $(l-1)$-го ранга затравок $H_{l-1}^t = (W_{l-1}, Q_{l-1})$, умноженных на k, где $l = (\overline{1, L})$, $r = \overline{1, n^{l-1}}$, l - номер рангов.

Пусть x - подмножество множества V_l вершин предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$. Через $d(x, v_i)$ будем обозначать наикратчайшее из расстояний между вершинами множества x и вершиной v_i, т.е. $d(x, v_i) = \min\limits_{v_j \in X} [d(v_j, v_i)]$. Пусть $s(x) = \max\limits_{v_j \in X} [d(x, v_j)]$ - число разделения множества x. Множество X, для которого $s(X) = \min\limits_{X \subseteq V_l} [s(x)]$, называется p-центром [1] предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$. На множестве X определим векторно-целевую функцию (ВЦФ):

$$F(X) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))\}, \tag{1}$$

где

$$F_1(x) = [s(X)] \to \min, \tag{2}$$

$$F_2(x) = \sum_{p_i^l \in X} a_{ij}^l \to \min, \tag{3}$$

$$F_3(x) = |x| \to \min, \tag{4}$$

где $F_1(x)$ - p_i^l-центр, $F_2(x)$ - суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центрах, $F_3(x)$ - мощность множества x.

Пусть p_i^l-центр [2, 5] затравки *l*-го ранга – p-центр [1] *l*-го ранга. p_i^1-центр затравки 1-го ранга – p^l-центр [8, 9] предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$. Недостающие определения графов можно найти в [1 – 4], а недостающие определения предфрактальных и фрактальных графов можно найти в [5–9].

Критерии (2) – (4) векторно-целевой функции (1) имеют конкретную содержательную интерпретацию в задаче о p -центре.

Веса, приписанные рёбрам предфрактального графа G_L (критерий (3)), могут отражать конкретные ограничения (время, расстояние), налагаемые на систему служб (аварийные, пожарные депо, милицейские участки, больницы), так и общие затрать, выражаемые в условных единицах.

На практике $s(x)=\max\limits_{v_j \in X}\left\lfloor d(x,v_j)\right\rfloor$ (число разделения) может означать, например, расстояние от самого далёкого потребителя (дома, квартала, организации) до системы служб (аварийные, пожарные депо, милицейские участки, больницы, Единая Служба Спасения). Наша задача состоит в нахождении p -центров предфрактального графа G_L для $p=1,2,3,\ldots$ и т. д. до тех пор, пока число разделения не станет минимальным. На достижение этого оптимума направлен критерий (2).

Полученное значение числа p – критерий (4) – будет наименьшим числом аварийных служб (или других служб), а p -центр — их оптимальным размещением, удовлетворяющим предъявляемым требованиям.

Для решения этой задачи предложен эффективный алгоритм α с оценками.

2. Алгоритм α определения абсолютных p -центров

Рассмотрим по очереди каждую вершину w_i, $w_i \in W$ затравки $H=(W,Q)$ и “углубимся” по всем возможным маршрутам, выходящим из нее, на расстояние $\delta_i = \dfrac{\lambda}{m_i}$, где λ — заданная константа, которую мы будем называть константой “проникновения”.

Пусть $Q_\lambda(w_i)$ — множество всех точек x на затравке H, из которых вершина w_i, достижима в пределах расстояния δ_i при заданном значении λ [1]

$$Q_\lambda(w_i)=\left\{x \middle| m_i d(y,w_i) \le \lambda, x - \textit{точка затравки} \quad H\right\}.$$

Определим множество X как множество таких точек x на затравке H, что из каждой точки x достижимо в пределах расстояния δ_i, (при заданном λ) одно и то же множество вершин затравки H. Область может быть, например, частью ребра или может содержать только одну точку.

2.1. Алгоритм α.

Вначале алгоритм α определяет абсолютный p-центр затравок $H_l=(W_l,Q_l)$ на l-ранге, $l=\overline{1,L}$. Построение абсолютного p-центра затравки $H=(W,Q)$ на l-ранге при заданном p [1] выглядит следующим образом.

Шаг 1. Пронумеруем все затравки $k=\overline{1,m}$.

Шаг 2. Рассмотрим затравку $k=1$.

Шаг 3. Положить $\lambda=0$.

Шаг 4. Увеличить λ на небольшую величину $\Delta\lambda$.

Шаг 5. Построить множества $Q_\lambda^l(w_i^l)$ для всех w_i^l, $w_i^l \in W_n$ и найти множество Χ

$$Q_\lambda^l(w_i^l) = \left\{x^l \middle| m_i^l d(x^l, w_i^l) \le \lambda, x^l \in H\right\}.$$

В общем случае множество Χ можно следующим образом построить из достижимых множеств $Q_\lambda(w_i)$. Области, из которых не достижимы никакие вершины[3], описываются соотношением

$$Χ^l = \{x | x \in H\} - \bigcup_i Q_\lambda^l(w_i^l),$$

где второй член исключает все области затравки *H*, из которых можно достигнуть[1] хотя бы одну вершину w_i^l. Области, из которых можно достигнуть[1] ровно t вершин $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, ..., w_{i_t}^l$ (для любого $t = 1,2,3,...,n$), определяются следующим выражением:

$$Χ^l(w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, w_{i_3}^l, ..., w_{i_t}^l) = \bigcap_{q=(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l) - \left\{\left[\bigcap_{q-(1,t)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right] \bigcap \left[\bigcup_{q-(t+1,s)} Q_\lambda^l(w_i^l)\right]\right\},$$

где второй член исключает такие области, из которых достижимы вершины $w_{i_1}^l, w_{i_2}^l, ..., w_{i_t}^l$ и еще хотя бы одна из оставшихся вершин затравки.

Шаг 6. Образовать двудольную затравку $H^{'} = (W^{'} \bigcup W, Q^{'})$, где $W^{'}$ — множество вершин, каждая из которых соответствует некоторой области P_p и $Q^{'}$ — множество рёбер, такое, что ребро между областью-вершиной и вершиной w_i существует тогда и только тогда, когда w_i может быть достигнута из этой области.

Шаг 7. Найти наименьшее доминирующее множество затравки $H^{'} = (W^{'} \bigcup W, Q^{'})$.

Шаг 8. Если число областей в приведенном выше множестве больше, чем p, то вернуться к шагу 2; в противном случае остановиться. Области этого множества образуют абсолютный p-центр исходной затравки H.

На первой затравке получим оптимальный абсолютный p-центр [1]. На всех остальных затравках $k = \overline{2,m}$ данного ранга поиск абсолютного p-центра аналогичен. Когда найдём абсолютные p-центры на всех затравках, получим абсолютный p-центр *l*-го ранга, т.е. абсолютный p_i^l-центр.

Шаг 9. Стянем затравки *l*-го ранга в вершины [6], т.е. заменим вершины затравки одной вершиной w_i^{l-1} и все рёбра, инцидентные вершинам затравки, будут инцидентны вершине w_i^{l-1}, тогда получим предфрактальный $(n, l-1)$-граф. Переходим к шагу 1.

[3] Достижимость берётся "в пределах заданного расстояния δ_i ".

Поиск абсолютного p-центра для предфрактального $(n, l-1)$-графа аналогичен. Получим абсолютный p-центр $(l-1)$-го ранга, т.е. абсолютный p_i^{l-1}-центр. Продолжим процесс до l=1 и получим предфрактальныий $(n, 1)$-граф с абсолютным p_i^1-центром. Этот p_i^1-центр является абсолютным p-центром для всего фрактального графа.

Обоснованием данного алгоритма являются следующие

Теорема 1. Алгоритм α выделяет абсолютный p_i^l-центр, $i=\overline{1,s}$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$, с затравкой регулярной степени, где $k < \frac{a}{b}$, оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_2(x) \le 2^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot a$, $F_3(x) \le p$. Причём трудоёмкость алгоритма α равна $\tau(\alpha) = O(N \cdot n^2)$, где $N = |V|$.

Доказательство. Алгоритм α потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой затравке. Тогда, $\tau(\alpha) = O(\frac{n^L - 1}{n-1} \cdot n^2) = O(N \cdot n^2)$. В силу коэффициента $k < \frac{a}{b}$ в процессе своей работы алгоритм α просматривает рёбра $e_{ij} \in E_l$ в порядке возрастания их ранга, причём не переходит к следующему рангу до тех пор, пока не будут просмотрены все рёбра текущего ранга. В силу этого правила исключается избыточное присутствие рёбер старшего ранга. Поэтому α выделяет на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$, p-центр оптимальный по критерию $F_1(x)$. Так как в выделении p-центра участвуют 2^{L-1} рёбер, то суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центре не превосходит $2^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot a$, то есть $F_2(x) \le 2^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot a$. Естественно, верхней оценкой критерия $F_3(x)$ будет p.

Следствие 1. Алгоритм α выделяет абсолютный p_i^l-центр, $i=\overline{1,s}$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $l = (\overline{1, L})$, где $k < \frac{a}{b}$, оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_2(x) \le \frac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$, $F_3(x) \le p$, если затравка – полный n-вершинный граф. Причём трудоёмкость алгоритма α равна $\tau(\alpha) = O(N \cdot n^2)$, где $N = |V|$.

Теорема 2. p_i^l-центр предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$ равен $p_i^l=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^l \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^l, v_{i,\eta}^l)\le 2^{L-1}\cdot k^{L-1}\cdot a\right\}$, $l=(\overline{1,L})$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки, если затравка – регулярный граф.

Доказательство. Пусть дан взвешенный предфрактальный (n,L)-граф $G_l=(V_l,E_l)$ с затравкой – полный двудольный граф. Коэффициент масштабирования $k<1$. Причём веса рёбер l-го ранга равны соответствующим весам ребер $(l-1)$-го ранга, умноженных на коэффициент масштабирования k, где $l=1,2,3,\ldots L$.

Пусть старые рёбра не пересекаются, тогда на каждом ранге получим следующие оценки p_i^l-центра.

На первом ранге p_i^1-центром является $p_i^1=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^1 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^1, v_{i,\eta}^1)<2^0\cdot k^0\cdot a\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки. На втором ранге p_i^2-центром является $p_i^2=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^2 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^2, v_{i,\eta}^2)<2^1\cdot k^1\cdot a\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки. На третьем ранге p_i^3-центром является $p_i^3=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^3 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^3, v_{i,\eta}^3)<2^3\cdot k^2\cdot a\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки. На четвёртом ранге p_i^4-центром является $p_i^4=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^4 \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^4, v_{i,\eta}^4)<2^3\cdot k^4\cdot a\right\}$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки.

Предположим, что на ранге $l=L-1$ p_i^{L-1}-центром является:

$p_i^{L-1}=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^{L-1} \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^{L-1}, v_{i,\eta}^{L-1})<2^{L-2}\cdot k^{L-2}\cdot a\right\}$, $l=(\overline{1,L})$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки.

Тогда получим, что на ранге $l=L$ p_i^L - центром является:

$p_i^L=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^L \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^L, v_{i,\eta}^L)<2^{L-1}\cdot k^{L-1}\cdot a\right\}$, $l=(\overline{1,L})$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки. (3)

Формула (3) является верхней оценкой для p_i^L - центра предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$.

Следствие 2. p_i^l-центр предфрактального (n,L)-графа $G_l=(V_l,E_l)$ равен $p_i^l=\left\{\mathrm{v}_{i,\eta}^l \middle| m_i d(\mathrm{v}_{i,\eta}^l, v_{i,\eta}^l)\le 2^{L-1}\cdot k^{L-1}\cdot a\right\}$, $l=(\overline{1,L})$, $i=(\overline{1,n})$, η - номер затравки, если затравка – полный n-вершинный граф.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. Федер Е. - М.: Мир, 1991.
3. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
4. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1962.

5. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз, 1998.
6. Кочкаров А.М., Перепелица В.А. Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа. Сб. РАН САО.-1999.
7. Емеличев В.А., Перепелица В.А. О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989, №2 с. 171 – 183.
8. Узденов А.А. Задача выделения p-центра с гарантированными оценками на предфрактальном графе с затравкой – двудольный граф. Российская конференция “Дискретный анализ и исследование операций”. Новосибирск, 2004, с. 116.
9. Узденов А.А. Задача выделения p-центра с гарантированными оценками. VI Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. Секция 1. Кисловодск, 2004, с. 11.

УДК 519.8 (314)

Д.М. Эдиев, Дж.Б. Тебуев

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, г. Черкесск

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ДОЖИТИЯ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И МАЛОЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ*

Моделирование процесса дожития является одной из основных задач математической демографии. Целью такого моделирования является попытка описать процесс дожития с помощью математической функции или набора функций, связывающих измеримые показатели смертности. Наиболее распространённой формой описания процесса дожития является таблица дожития (таблица смертности), обеспечивающая итоговое описание смертности на когорту рождения. Методы, используемые для построения таблиц дожития, можно разделить на следующие группы: *прямые традиционные методы*, *косвенные методы*, *комбинированный метод*.

Прямые методы [1] построения таблиц дожития позволяют оценивать возрастные показатели дожития непосредственно из эмпирических данных. Эти методы рассчитаны на исследование процесса дожития в больших популяциях, т.к. в силу закона больших чисел частота появления события приближается к его вероятности по мере роста числа испытаний. В рамках прямых традиционных методов для выяснения связи между возрастными коэффициентами смертности (оцениваются из исходных данных) и вероятностями смерти (показатели таблицы дожития) обычно используются линейное и экспоненциальное приближения [1], а также метод множителей Чанга [1].

Экспоненциальное приближение предполагает, что в пределах возрастного интервала сила смертности остаётся неизменной и равняется соответствующему коэффициенту смертности. Линейное приближение предполагает равномерное распределение смертей в рассматриваемом возрастном интервале. Эти предположения являются достаточно точными только для средних возрастов. Для вычисления вероятности смерти в младшем возрасте обычно используют эмпирическую

* Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 05-06-80432 «Разработка математических моделей и методов оценивания показателей воспроизводства малочисленного населения»