УДК: 330.1(0.75.8), 519.95, 51-7, 541-49

Соловьёв А.С.
Россия, г. Ростов-на-Дону

ЕДИНСТВО КОЛИЧЕСТВА, КАЧЕСТВА И МЕРЫ

Аннотация: В работе предлагаются методы анализа нейронных сетей в их приложении к анализу сетей социального и экономического назначения на основе единства качества, количества и меры, которые представлены в виде категорий.

Ключевые слова: нейронные сети, внешнесферная и внутрисферная оценки, комплексообразования, качество, количество, мера, сравнение, обучение, цель, категории, расслоения, деформация, кватернионы.

Soloviev A. S.
Russia, Rostov-on-don

UNITY OF QUANTITY, QUALITY AND MEASURE

Abstract: The paper proposes methods for the analysis of neural networks in their application to the analysis of social and economic networks based on the unity of quality, quantity and measure, which are presented in the form of categories.

Keywords: neural networks, external and internal sphere assessment of complex formation, complex formation, quality, quantity, measure, compare, education, purpose, category, delamination, deformation, quaternions.

Когда мы говорим о количестве, то прежде всего к нам приходит мысль об объёме. Об объёме, который заполнен некоторой вещественной субстанцией, массой определённого вида вещества, либо о количестве людей, животных, техники. Не понаслышке знаем о количестве потреблённых электроэнергии, тепла и т.п. Но, трудно воспринимается такое, например, понятие, как количество скорости, хотя знаем, что скорость определяется числом. Число (скаляр) появляется при описании объёмной характеристики любого объекта при его сопоставлении с другим объектом, при этом, характерные признаки объектов должны совпадать. Сравниваем скорости различных движущихся объектов, группы по количеству людей, прайды львов по количеству особей. *Количество* a появляется как абстрактная величина, но всегда присутствует в нём признак определённого объекта, его *качество* $\boldsymbol{R}$. Если описать объект заданного свойства величиной $\boldsymbol{r}$, то

$$\boldsymbol{r} = a^{*}\boldsymbol{R} \tag{1}$$

читается как объект в количестве a качества $\boldsymbol{R}$.

Свойства объекта зависят от того, кто получает о нём информацию. Один и тот же объект может проявляться бесконечным множеством свойств. Будем полагать, что звёздочка (*) в записи отмечает сопряжённую величину, т.е. количественная величина a согласована по смыслу с качественной характеристикой объекта $\boldsymbol{R}$.

Предположим, что некто выделяет объект по свойству $\boldsymbol{R}_1$. Пусть по данному свойству объект характеризуется количеством a^1. Этот факт представим аддитивной формой, обозначая все остальные невыделенные свойства величиной $\overline{\boldsymbol{x}_1}$, а выделенную сторону – величиной $\boldsymbol{x}_1 = a^1\boldsymbol{R}_1$, и это выделение запишем аддитивной формой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 + \overline{\boldsymbol{x}_1}. \quad (2)$$

Продолжая процесс выделения свойств, получаем бесконечный ряд

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n + \cdots = a^1\boldsymbol{R}_1 + a^2\boldsymbol{R}_2 + \cdots + a^n\boldsymbol{R}_n + \cdots = a^i\boldsymbol{R}_i \quad (3)$$

При этом качество $\boldsymbol{R}$ объекта в (1) определяется количественным отношением локальных качеств $\boldsymbol{R}_i$, т.е. количественной пропорцией $a^1 : a^2 : \ldots : a^n : \ldots$. Другой наблюдатель тот же самый объект $\boldsymbol{r}$ может описывать другим спектром свойств, т.е. в другом базисе $\{\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$

$$\boldsymbol{r} = b^*\boldsymbol{e} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b^n\boldsymbol{e}_n + \cdots = b^j\boldsymbol{e}_j.$$

Описания одного и того же состояния $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ и $b = (b^1, b^2, \ldots, b^n, \ldots)$ определены в разных базисах и представляют его с разных качественных сторон: $a^1 : a^2 : \ldots : a^n : \ldots$ и $b^1 : b^2 : \ldots : b^n : \ldots$. Очевидно, данные описания должны быть взаимосвязаны, и эта связь определяться посредством отраженных в описании свойств, т.е. посредством связей базисных признаков.

Предположим, что эти базисы связаны линейной зависимостью

$$\boldsymbol{R} = P^*\boldsymbol{e},$$

или

$$\boldsymbol{R}_i = P_i^j\boldsymbol{e}_j.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r} = b^*\boldsymbol{e} = a^*\boldsymbol{R} = a^*(P^*\boldsymbol{e}) = (a^*P^*)\boldsymbol{e} = (Pa)^*\boldsymbol{e},$$

т.е. качественная связь переносится в описание состояний $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ и $b = (b^1, b^2, \ldots, b^n, \ldots)$ объекта

$$b = Pa.$$

На практике обычно используют не все признаки, а ограничиваются только наиболее существенными.

Пусть число выделенных признаков равно n. Тогда получаем представление в виде

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{R} = a^1\boldsymbol{R}_1 + a^2\boldsymbol{R}_2 + \cdots + a^n\boldsymbol{R}_n = a^i\boldsymbol{R}_i, \quad i \in N = \{1,2,\ldots,n\}. \quad (4)$$

Таким образом, агрегатное качество объекта $\boldsymbol{R}$ разлагается в конечную последовательность основных (базисных) признаков $\boldsymbol{R}_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Полагая в дальнейшем все коэффициенты в (4) положительными, после деления этого выражения на коэффициент левой части приходим к представлению универсального свойства объекта в виде выпуклой линейной комбинации элементарных свойств

$$\boldsymbol{R} = p^1\boldsymbol{R}_1 + p^2\boldsymbol{R}_2 + \cdots + p^n\boldsymbol{R}_n, \quad \textstyle\sum_{i\in N} p^i = 1, \quad (5)$$

в которой коэффициенты $p^i > 0,\ \ i \in N$, служат *вероятностями* присутствия соответствующего элементарного свойства в описании объекта.

Геометрически, каждому признаку качества ставится в соответствие числовая ось, для которой сам признак служит ортом (единичным направляющим вектором). В данном случае никакой таксономии может не происходить, а отражение его состояния происходит с разных качественных позиций его внутренних дифференциальных свойств. Примером применения

(2) при классификации служит представление объекта градуированным пучком в виде многоуровневой дихотомической структуры, где каждый элемент имеет один вход и два исхода.

Рассмотрим построение структурированной схемы на задаче маркетинга, полагая, что целью подразделения некоторой организации является сбыт товара как целевая функция $\boldsymbol{x} = x^0$ нулевого уровня иерархии.

На первом уровне иерархии его представим суммой себестоимости товара x^1 и валовой прибыли x^2. Более детальным описание получается при разбиении валовой прибыли на чистую прибыль без учёта налогов x^3 и составляющие текущих расходов x^4. Ещё детальнее описание получится разбиением на составляющие текущих расходов на более мелкие статьи: заработную плату с дополнительными выплатами x^5, арендную плату x^6, рекламу x^7, поставки x^8, страховки x^9, расходы на выплату процентов x^{10}.

Введем векторы распределения ресурсов в соответствующих узлах системы

$$\boldsymbol{x}_1 = [x^1; x^2], \quad \boldsymbol{x}_2 = [x^1;\ x^3; x^4], \quad \boldsymbol{x}_3 = [x^1;\ x^3;\ x^5; x^6; x^7; x^8; x^9; x^{10}]$$

и матрицы инцидентности, заменяя в них единицы связности морфизмами $\varphi = \varphi_j^i$, $i > j$, и рассматривая последние как доли в формировании соответствующих узлов (в связи узла x^j с узлами x^i, $i \epsilon N_j$):

$$A_1^0 = [\varphi_1^0\ \varphi_2^0], \qquad A_2^1 = [1\ 0\ 0; 0\ \varphi_3^2\ \varphi_4^2],$$

$$A_3^2 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ \varphi_5^4\ \varphi_6^4\ \varphi_7^4\ \varphi_8^4\ \varphi_9^4\ \varphi_{10}^4].$$

В такой интерпретации система $\boldsymbol{x}$ представлена малой категорией

$$\mathcal{K} = (X, \Phi),$$

объектами которой является множество узлов схемы

$$X = \{x^0, x^1, \dots, x^{10}\},$$

а морфизмами служит множество их связей

$$\Phi = \{\varphi_1^0, \dots, \varphi_{10}^0, \varphi_3^2, \dots, \varphi_{10}^2, \varphi_5^4, \dots, \varphi_{10}^4\},$$

графически изображается градуированным пучком

$$0 \to \mathcal{K} \to \boldsymbol{x} \xrightarrow{A_1^0} \boldsymbol{x}_1 \xrightarrow{A_2^1} \boldsymbol{x}_2 \xrightarrow{A_3^2} \boldsymbol{x}_3 \to 0$$

и аналитически записывается выпуклой линейной комбинацией

$$x^0 = \varphi_1^0 x^1 + \varphi_3^0 x^3 + \varphi_5^0 x^5 + \varphi_6^0 x^6 + \varphi_7^0 x^7 + \varphi_8^0 x^8 + \varphi_9^0 x^9 + \varphi_{10}^0 x^{10},$$

коэффициенты которой представлены согласованными по Колмогорову цепями Маркова и удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_1^0 + \varphi_2^0 = 1, \\ \varphi_3^2 + \varphi_4^2 = 1, \\ \varphi_5^3 + \varphi_6^3 + \varphi_7^3 + \varphi_8^3 + \varphi_9^3 + \varphi_{10}^3 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Данная система в стандартном виде представляется двумя граничными множествами и двумя внутренними срезами с множеством вершин S_i, репером P_i и разложением качества объекта по выделенным элементарным качественным признакам соответствующего уровня:

$$S_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\},\ P_1 = \{x^0, x^1, x^2\},\ \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2;$$

$$S_2 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\},\ P_2 = \{x^0, x^1, x^3, x^4\},\ \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4;$$

$S_3 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5, \ldots, \boldsymbol{x}_{10}\}$, $P_3 = \{x^0, x^1, x^3, x^5, \ldots, x^{10}\}$, $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_5 + \ldots + \boldsymbol{e}_{10}$,
с резольвентой пучка

$$0 \to \mathcal{K} \to P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to 0.$$

При задании на категории функтора D получаем гомеоморфный пучок

$$0 \to U = D(\mathcal{K}) \to D(P_0) \to D(P_1) \to D(P_2) \to D(P_3) \to 0,$$

определяющий состояние системы как точку аффинного пространства. Для определения весовых коэффициентов связей приходим к соотношению

$$\omega_j^i = D(\varphi_j^i) = \frac{D(x^i)}{D(x^j)},$$

которое на цепях (x^i, x^j, x^k) пучка в силу гомоморфизма принимает вид

$$\omega_k^i = D(\varphi_k^i) = D(\varphi_j^i \varphi_k^j) = D(\varphi_j^i) D(\varphi_k^j) = \frac{D(x^i)}{D(x^j)} \frac{D(x^j)}{D(x^k)} = \omega_j^i \omega_k^j.$$

Если для внешней оценки поведения системы в аффинном пространстве для определения репера нужно задать три состояния системы, т.е. три функтора D_0, D_1 и D_2, то для оценки внутреннего состояния, поскольку внутреннее состояние системы уже качественно ориентировано, достаточно задать лишь два функтора.

Действительно, фиксируя состояние $U_0 = D_0(\mathcal{K})$ в качестве начала координат в аффинном пространстве состояний A^n и определяя на нём группу $\boldsymbol{R}^n$ параллельных переносов $U_0 \to U_0 + \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^n$, при введении внутренним произведением меры $\mu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} = U_1 - U_0$, $\boldsymbol{v} = U_2 - U_0$, индуцирующей евклидово расстояние между состояниями в аффинном пространстве, составляем кватернион

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \tag{7}$$

необходимый для построения метрических отношений при сравнении состояний $U_1 = D_1(\mathcal{K})$ и $U_2 = D_2(\mathcal{K})$.

По существу, тензор в левой части равенства (7) является аксиоматическим выражением евклидовой и симплектической структуры линейного пространства [2, стр. 70], а его квадрат порождает тождество Пифагора – основное метрическое тождество этого пространства [3], которое является отражением фундаментального свойства материи в любой её форме самоорганизации – *единства качества и количества в мере*.

Предположим, что дана тройка $\{U_0, U_1, U_2\}$ – три возможных состояния некоторого объекта (*репер* пространства A^n), которые рассматриваются как три произвольные точки аффинного пространства A^n, и требуется сравнить состояние U_2 с состоянием U_1. Фиксируя точку U_0 как начало координат в аффинной системе получаем присоединённое к данному аффинному пространству векторное пространство $\boldsymbol{R}^n$. Построим прямую $L = (U_0, U_1)$ с ортом $\boldsymbol{n}$ и плоскость H, ортогональную прямой и содержащую точку U_0. Если p: $A \to A/H$ – каноническая проекция аффинного пространства A на прямую, то $p^{-1}(U_2)$ – гиперплоскость, содержащая точку U_2 и ортогональная L. Поскольку прямая L произвольна, то из множества A можно выделить подпространство $A^{(a)}$ всевозможных прямых. При этом, любая точка пространства имеет проекцию на произвольно выделенную прямую из этого подпространства. Если данную прямую рассматривать как числовую шкалу, то получаем, что каждому состоянию объекта в соответствие ставится количественная скалярная величина. Проекции линейно квантуются на числовой шкале и, как следствие, подпространство $A^{(a)}$ асимметрично.

Но, точка U_2 имеет вторую проекцию – проекцию на ортогональную L плоскость H. Подмножество всех таких плоскостей будет симметричным подпространством $A^{(s)}$ пространства A пространству $A^{(s)}$ и пространство A расслаивается в прямую сумму этих пространств. В аналогичную сумму расщепляется и присоединённое векторное пространство, т.е.

$$A = A^{(s)} + A^{(a)}, \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{(s)} + \boldsymbol{R}^{(a)}. \tag{8}$$

Равенство (7) является следствием второго расслоения. Здесь первое слагаемое определяет скалярную оценку бинарного соответствия состояний объектов. Второе слагаемое появляется при различии их качеств. В случае качественного сходства состояний отвечающие им векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарными ($\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$) и второе слагаемое в (7) обращается в нуль. Следовательно, при бинарном отношении состояний внутреннее произведение векторов показывает количественную оценку их качественного сходства. Внешнее произведение даёт оценку их качественного расхождения. При качественном сходстве внутреннее произведение показывает "объёмную" оценку сходства объектов.

Отсюда находим, что количественная и качественная оценки взаимодополняемы. Их "взаимная дополнительность имеет топологический характер и сводится к тому, что у одной из этих двух характеристик возможные последовательные значения являются линейно квантованными и просто следуют друг за другом, включая особо выделенное общее нулевое собственное значение или начиная с него и симметрично располагаясь на одномерной прямолинейной координатной оси, а у другой возможные последовательные собственные значения оказываются циклически квантованными и замыкаются друг с другом как раз вокруг него …, симметрично располагаясь на ортогональной к одномерной координатной оси двумерной координатной плоскости в трёхмерном основном координатном пространстве" [1, стр. 44]. В бинарных сравнениях расщепления (8) являются фундаментальными как в пространстве, так и во времени. При этом в бинарных отношениях асимметричная часть определяет слабый порядок, а симметричная часть связана с отношением эквивалентности [4]. В монографии [5, стр. 27] эти взаимно дополняющие характеристики, содержащиеся в универсальной характеристике K в качестве латентных его диалектических свойств, определяются как внешнесферная и внутрисферная, которые для аддитивной формы обозначаются как K_o и K_i, т.е. соотношение (7) принимает вид

$$K = K_0 + K_i.$$

При этом, предлагается ввести ещё одну величину

$$K_{i,o} = \frac{K_i}{K_o}$$

и рассматриваемую систему характеризовать либо парой (K_o, K_i), либо парой (K, $K_{i,o}$). Очевидно, именно первая пара отвечает методам решения задач *комплексообразования* физической химии как итеративная процедура Кэли-Диксона и является основой биекции [6, стр. 50]

$$\Theta: A^n \times A^n \to \boldsymbol{R}^n,$$

параметр которой

$$\theta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = arctg \frac{|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}|}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}$$

участвует в мультипликативной форме полярного представления взаимосвязи (1) качества и количества

$$\boldsymbol{uv} = ||\boldsymbol{uv}|| e^{in\theta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}.$$

Вернёмся к приведенной выше сети. Зададим значения функторах в узлах сети в тыс. руб. как плановые показатели:

$$D(x^0) = 1000, \quad D(x^1) = 450, \quad D(x^2) = 550, \quad D(x^3) = 253, \quad D(x^4) = 297,$$
$$D(x^5) = 217.7, \quad D(x^6) = 39.5, \quad D(x^7) = 29.7, \quad D(x^8) = 5.94,$$
$$D(x^9) = 2.386, \quad D(x^{10}) = 1.774.$$

Рассчитаем вероятностные оценки напряженности связей сети по схеме обратного распространения (схема управления)

$$\omega_j^i \downarrow = \frac{D(x^j)}{D(x^i)}.$$

Получаем численные значения напряжённости связей:

$$\omega_1^0 = 0.45, \omega_2^0 = 0.55, \omega_3^2 = 0.46, \omega_4^2 = 0.54, \omega_5^4 = 0.733, \omega_6^4 = 0.133, \omega_7^4 = 0.100, \omega_8^4$$
$$= 0.020, \omega_9^4 = 0.008, \omega_{10}^4 = 0.006,$$

т.е. определённый на сети гомоморфизм D на узлах индуцирует меру на их связях [7, стр. 109]

$$\mu(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_j^i \omega_j^i.$$

Возьмём плановые показатели работы данного подразделения фирмы за измерительный эталон и предположим, что фактическая работа системы отклоняется от плана что характеризуется функтором D' на категории $\mathcal{K}$. Происходит изменение интенсивности работы в узлах с коэффициентами усиления (уменьшения)

$$I_i = \frac{D'(x^i)}{D(x^i)}.$$

Последнее отражается в изменении напряжённости связей

$$\omega_{j'}^{i'} = k_j^i \omega_j^i \delta_j^i, \qquad k_j^i = \frac{I_i}{I_j}.$$

Система деформируется. Изменяется её структура так, что изменяются матрицы связности слоёв A_1^0, A_2^1, A_3^2, которые являются фундаментальными матрицами преобразования связных евклидовых пространств $0 \to E^1 \to E^2 \to E^3 \to E^8 \to 0$ пучка и которые выступают в качестве основных метрических тензоров этих пространств.

Система, приведённая к стандартному виду, на всех узлах имеет значение равное единице. Такая система определяется только напряжённостью связей, только внутренней структурой, качеством. Если системы приводятся к одной и той же стандартной модели, то такие системы качественно подобны. Их внутренние структуры совпадают, и они отличаются только "объёмной" скалярной величиной. Изменение значения даже в одном узле полностью меняет качество системы (ср. с вектором).

Предположим, что в рассматриваемой задаче за счёт работы отдела маркетинга чистый сбыт товара увеличился на один процент и руководство фирмы в знак поощрения его сотрудников на три процента повышает расходы на заработную плату данного отдела. Тогда расходы на заработную плату составят величину (в исходных условных единицах)

$$D'(x^5) = 217.7(1 + 0.03) = 224.231.$$

С учётом этих изменений в новом плане изменится и величина стоимости чистого сбыта товара

$$D'(x^0) = 1000 + (224.231 - 217.7) = 1006.531.$$

Структурные показатели будут иметь вид:

$$\omega_{1'}^{0'} = 0.4471, \quad \omega_{2'}^{0'} = 0.5529; \quad \omega_{3'}^{2'} = 0.4546,$$
$$\omega_{4'}^{2'} = 0.5454; \quad \omega_{5'}^{4'} = 0.7387, \quad \omega_{6'}^{4'} = 0.1301,$$
$$\omega_{7'}^{4'} = 0.0978, \quad \omega_{8'}^{4'} = 0.0196, \quad \omega_{9'}^{4'} = 0.0079,$$
$$\omega_{10'}^{4'} = 0.0058.$$

Получаем две различные категории ω и ω' одной и той же размерности, которые можно рассматривать как структурированные векторы. Всевозможные категории одинаковой размерности и структуры определяют аффинное пространство Ω. Если $\omega, \omega' \in \Omega$, то при различии только объёмных показателей $\omega' = k\omega$, k – действительное число. В таком случае системы качественно подобны и отличаются лишь количественной характеристикой. Естественно, на структурированные пространства перенести всю геометрию [6] вместе с параллельным переносом $\omega' = \omega + \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ принадлежат присоединённому векторному пространству $\mathbf{\Omega}$, определить галилееву структуру и расстояние между элементами, которое связано с мерой $\mu(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') = \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}$, которая определяется как внутреннее произведение, и определить кватернион как пару ($\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{\omega}$) процедуры Кэли-Диксона, что служит посылкой теоремы Пифагора для перехода к основному метрическому тождеству.

Использованные источники:

1. Идлис Г.М. Единство естествознания по Бору и единообразные взаимосвязанные периодические системы физики, химии, биологии и психологии /Исследования по истории физики и механики //М., наука, 1990.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф //М., Наука, 1990.
3. Соловьёв А.С. Основное метрическое тождество //ж. "Экономика и социум", №12(55), 2018. www.iupr.ru
4. Юдин А.Б. Вычислительные методы принятия решений //М., Наука, 1989.

5. Бек М., Надыпал И. Исследование комплексообразования новейшими методами //М., Мир, 1989.
6. Берже М. Геометрия //М., Мир, 1984.
7. Рохлин В.А. Об основных понятиях теории меры /Мат. сборник, т. 25(67) №1 //М., Изд. АН СССР, 1949.