УДК 517.935.4

ДЖЕТЫ ПЛОСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

В.Н. ЧЕТВЕРИКОВ¹

Плоские системы образуют наиболее широкий класс систем, для которых разработаны методы управления. Любую плоскую систему можно представить как образ гладкого отображения пространства джетов. В статье выведено уравнение на такие отображения, а каждому джету решения этого уравнения поставлен в соответствие джет функции, определяющей плоскую систему. Каждая функция, равная нулю на этом множестве джетов, задает необходимое условие плоскостности.

Ключевые слова: плоские системы с управлением, многообразия джетов, продолжения отображений дифференциальных уравнений.

1. Введение. Плоские системы с управлением

Мы рассматриваем системы с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, u \in R^m, \quad (1)$$

где t - независимая переменная, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ - состояние, вектор $u = (u_1, \dots, u_m)$ - управление, $f = (f_1, \dots, f_n)$ - гладкая векторная функция, а $\dot{x} \equiv dx/dt$. Под гладкостью здесь и далее мы понимаем бесконечную дифференцируемость.

Пусть l - некоторое неотрицательное целое. Считая переменные

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m, \ddot{u}_1, \dots, u_m^{(l)} \quad (2)$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. Через $U^{(l)}$ будем обозначать какую-либо область этого пространства.

Систему (1) называют *плоской* [1] в области $U^{(l)}$, если на $U^{(l)}$ определены такие функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad \dots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad (3)$$

что переменные x и u выражаются через t , функции (3) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор функций (3), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (3) называется *плоским* (или *линеаризующим*) выходом системы (1).

Систему (1) называют *регулярной*, если ранг матрицы $(\partial f_i / \partial u_j)$ равен m в каждой точке области определения системы. Можно показать [1], что в случае регулярной системы плоский выход (3) состоит из m функций, т.е. $r = m$.

По теореме о неявной функции в окрестности каждой точки регулярной системы переменные управления $u_1, \dots, u_m$ выражаются через переменные состояния $x_1, \dots, x_n$ и их производные $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$. Заменяя $u_1, \dots, u_m$ на эти выражения и, по необходимости, переобозначая переменные состояния, преобразуем систему (1) к виду

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (4)$$

Для плоских систем разработаны методы управления и показано, что многие технические системы описываются плоскими системами [1]. Задача проверки плоскостности систем является актуальной и в данный момент ее полное решение неизвестно. Особенную трудность вызывает доказательство неплоскостности систем. Единственному известному необходимому условию, полученному П. Рушоном [2], удовлетворяет очень широкий класс систем. Поэтому, используя только это условие, доказать, что данная система не является плоской, как правило, не удается.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант 3659.2012.1) и грантов РФФИ 12-07-00267 и 13-07-00736.

В этой работе предлагается способ вычисления серии необходимых условий плоскостности. В п. 2 мы получаем первое такое условие для систем наименьшей нетривиальной размерности ($n=3, m=2$). Этот результат достигнут теми же методами, которые использовал П. Рушон в [2], а ранее применил Д. Гильберт [3] для доказательства непараметризуемости уравнения $\dot{x} = (\ddot{y})^2$. Однако найти таким способом другие необходимые условия плоскостности не представляется возможным ввиду громоздкости получающихся формул. Мы ставим перед собой задачу описания условий плоскостности на языке геометрии пространств джетов [4]. В п. 3 на основе результатов из [5] строится геометрический образ системы дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют правые части плоских систем вида (4). Серия уравнений, определяющих эту систему, и есть упомянутая серия необходимых условий плоскостности.

2. Первое необходимое условие плоскостности

В случае $n=3, m=2$ система (4) состоит из одного уравнения вида

$$\dot{x}_3 = f(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \tag{5}$$

Если исходная система была плоской, то плоской является и система (5). Из определения плоскостности, в частности, следует, что переменные x_1, x_2, x_3 выражаются через t , функции плоского выхода вида (3) и их производные в силу системы (5) до какого-то конечного порядка. Обозначим этот порядок через l . Тогда

$$x_i = X_i(t, y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}), \quad i=1, 2, 3, \tag{6}$$

причем, по крайней мере, одна из функций X_1, X_2 или X_3 зависит, по крайней мере, от одной из старших производных $y_1^{(l)}$ или $y_2^{(l)}$. Для определенности будем считать, что одна из этих функций зависит от $y_1^{(l)}$. Имеем

$$EX_3 = f(t, X_1, X_2, X_3, EX_1, EX_2), \tag{7}$$

где EX_i обозначает полную производную функции X_i по t , т.е.

$$EX_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_{j=1,2} \sum_{s=0}^l y_j^{(s+1)} \frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}}.$$

Отметим, что в выражении (7) от $y_1^{(l+1)}$ могут зависеть только функции EX_1, EX_2, EX_3 , причем зависеть линейно. Дифференцируя выражение (7) по $y_1^{(l+1)}$ три раза и используя стандартные обозначения для производных функции f по пятому (u_1) и шестому (u_2) аргументам: $f_5 = f'_{u_1}, f_{56} = f''_{u_1 u_2}$ и т.д., получаем

$$\frac{\partial X_3}{\partial y_1^{(l)}} = f_5 \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} + f_6 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}; \tag{8}$$

$$0 = f_{55} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 + 2f_{56} \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} + f_{66} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2; \tag{9}$$

$$0 = f_{555} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 + 3f_{556} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} + 3f_{566} \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 + f_{666} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3. \tag{10}$$

Умножая уравнение (9) на $\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2$, на $\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}$ и на $\left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2$, а уравнение (10) на $\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}}$ и на $\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}$, получим 5 уравнений, которые можно представить в матричном виде $AX = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} f_{55} & 2f_{56} & f_{66} & 0 & 0 \\ 0 & f_{55} & 2f_{56} & f_{66} & 0 \\ 0 & 0 & f_{55} & 2f_{56} & f_{66} \\ f_{555} & 3f_{556} & 3f_{566} & f_{666} & 0 \\ 0 & f_{555} & 3f_{556} & 3f_{566} & f_{666} \end{pmatrix};$$

$$X = \left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^4 \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^4 \right)^T.$$

По выбору l столбец X не может быть нулевым. Поэтому определитель матрицы A равен нулю. Вычисляя его, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & f_{555}^2 f_{66}^3 - 6f_{555} f_{556} f_{56} f_{66}^2 + 6f_{555} f_{566} (2f_{56}^2 - f_{55} f_{66}) f_{66} + 9f_{556}^2 f_{55} f_{66}^2 + \\ & + 2f_{555} f_{666} (3f_{55} f_{66} - 4f_{56}^2) f_{56} - 18f_{556} f_{566} f_{55} f_{56} f_{66} + 9f_{566}^2 f_{55} f_{66} + \\ & + 6f_{556} f_{666} (2f_{56}^2 - f_{55} f_{66}) f_{55} - 6f_{566} f_{666} f_{55}^2 f_{56} + f_{666}^2 f_{55}^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, если система (5) плоская, то функция $f(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (11).

Используя аналогичные рассуждения, из соотношений (7), (8) можно получить и другие дифференциальные уравнения на функцию f в случае плоской системы (5). Более того, такого типа рассуждения применимы и к общему случаю, когда m и n произвольны. Однако получить таким способом другие необходимые условия плоскостности не удастся ввиду сложности уравнений.

3. Система уравнений на функции, задающие плоскую систему

Для описания всего множества уравнений вида (11) мы используем теорию, изложенную в [5].

Для простоты изложения ограничимся случаем $n = 3$, $m = 2$. Как отмечалось в п. 2, если система (5) плоская, то существуют функции (6), удовлетворяющие уравнению (7). Функции (6) задают отображение из $J^1\pi$ в $J^0\bar{\pi}$, где расслоения π и $\bar{\pi}$ определяются соотношениями $\pi: (t, y_1, y_2) \mapsto t$ и $\bar{\pi}: (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto t$. Бесконечное продолжение этого отображения есть накрытие из пространства $J^\infty\pi$ бесконечных джетов в диффеотоп системы (5) [5]. В [6] доказано, что если такое накрытие существует, то система (5) плоская. Таким образом, условие существования функций (6), удовлетворяющих уравнению (7), является не только необходимым, но и достаточным условием плоскостности.

Назовём l -плоской систему вида (5), для которой существуют функции (6), удовлетворяющие уравнению (7).

Заменяя y_1, y_2 на $\dot{y}_1, \dot{y}_2$, получим из условия l -плоской системы условие $(l+1)$ -плоской системы. Поэтому любая l -плоская система является $(l+1)$ -плоской.

Фиксируем $l \in \mathbb{N}$ и поставим задачу поиска всех l -плоских систем. Увеличивая l , в пределе $l \rightarrow \infty$ получим описание всех плоских систем вида (5).

Рассмотрим случай, когда от t не зависят ни функция f в (5), ни функции (6). Из соотношения (7) следует равенство

$$dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2) \wedge dE(X_3) = 0. \quad (12)$$

Обратно, если функции X_1, X_2, X_3 таковы, что

$$dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2) \neq 0, \quad (13)$$

то из равенства (12) следует существование функции f , удовлетворяющей условию (7).

Условие (12) представляет собой систему уравнений в частных производных на функции X_1, X_2, X_3 , зависящих от $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}$, причем

$$E = \sum_{j=1,2} \sum_{s=0}^l y_j^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial y_j^{(s)}}$$

есть векторное поле на пространстве аргументов этих функций и переменных $y_2^{(l+1)}, y_2^{(l+1)}$. Поэтому будем считать, что система (12) имеет независимые переменные

$$y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}, y_2^{(l+1)}, y_2^{(l+1)}$$

и зависимые переменные X_1, X_2, X_3 , при этом

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(l+1)}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Условие (12) представляется в виде системы уравнений в частных производных следующим образом. Из частных производных $\frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}}$ и $\frac{\partial (EX_i)}{\partial y_j^{(s)}}$, где $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, s = 0, 1, \dots, l+1$, со-

ставим матрицу M из 6 строк и $2l+2$ столбцов. Тогда условие (12) означает, что ранг этой матрицы меньше 6. Записывая равенство нулю всех миноров порядка 6 матрицы M , получаем систему уравнений в частных производных, которая эквивалентна условию (12).

Отметим, что полученная система имеет много лишних уравнений. Как известно, для вычисления ранга матрицы достаточно рассматривать только последовательность окаймляющих миноров. Поэтому выберем какой-либо ненулевой минор порядка 5 матрицы M и рассмотрим только окаймляющие его миноры порядка 6. Равенство нулю только этих миноров порядка 6 определяет указанную систему. Учтем, что нас интересуют только те решения уравнения (12), которые удовлетворяют условию (13), а это условие означает, что строки матрицы M , соответствующие $X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2)$, линейно независимы. Поэтому в качестве ненулевого минора порядка 5 возьмем минор в этих строчках. Пусть

$$M_0 = \det \frac{\partial (X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2))}{\partial (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)} \neq 0. \quad (15)$$

Тогда неравенство (13) выполняется, а условие (12) переписывается в виде системы уравнений

$$\det \frac{\partial (X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, z)} = 0, \quad \text{где } z = \ddot{y}_1, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \dots, y_2^{(l+1)}. \quad (16)$$

Приведем пример накрытия, для которого неравенство (15) выполняется.

Пример. Функции

$$X_1 = y_2 - \frac{\dot{y}_1 \dot{y}_2}{\ddot{y}_1} \ln \dot{y}_1; \quad X_2 = -\frac{\dot{y}_1 \dot{y}_2}{\ddot{y}_1}; \quad X_3 = y_1$$

определяют накрытие из пространства джетов в уравнение

$$\dot{x}_3 = e^{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Итак, мы получили систему уравнений (14), (16) и неравенства (15), которой удовлетворяют все накрытия рассматриваемого нами вида. Эту систему обозначим через Y и назовем *системой на определяющие накрытия*.

Система Y состоит из уравнений первого и второго порядков. Действительно, выражение для $E(X_i)$ содержит только производные функции X_i первого порядка, и поэтому элемент

$\frac{\partial(EX_i)}{\partial y_j^{(s)}}$ матрицы M содержит производные функции X_i второго порядка, но не содержит производные третьего порядка.

Всякое решение (X_1, X_2, X_3) системы Y определяет плоскую систему вида (5), где функция f находится из соотношения (7). Задачу поиска всех плоских систем вида (5) переформулируем в задачу поиска всех q -джетов, соответствующих функциям f . Для этого необходимо выразить производные функции f через производные функций X_1, X_2, X_3 . Найдем сначала выражения для первых производных. Раскладывая определители (16) по последнему столбцу, соответствующему переменной z , получаем

$$M_1 dX_1 + M_2 dX_2 + M_3 dX_3 + M_4 dE(X_1) + M_5 dE(X_2) - M_0 dE(X_3) = 0, \quad (17)$$

где

$$M_1 = \det \frac{\partial(X_2, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}; M_4 = -\det \frac{\partial(X_1, X_2, X_3, E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)};$$

$$M_2 = -\det \frac{\partial(X_1, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}; M_5 = \det \frac{\partial(X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}.$$

$$M_3 = \det \frac{\partial(X_1, X_2, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)};$$

Учитывая (7), получаем

$$f'_{\xi_i} = \frac{M_i}{M_0}, \quad \text{где } \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = \dot{x}_1, \quad \xi_5 = \dot{x}_2.$$

Рассмотрим теперь многообразие $J^q \pi$ q -джетов с одной зависимой переменной u и пятью независимыми переменными $\xi_1, \dots, \xi_5$ [5]. Рассмотрим отображение $F: Y \rightarrow J^1 \pi$, заданное соотношениями

$$\xi_1 = X_1; \quad \xi_2 = X_2; \quad \xi_3 = X_3; \quad \xi_4 = EX_1; \quad \xi_5 = EX_2; \quad u = EX_3; \quad u_i = \frac{M_i}{M_0}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Отображение F сохраняет распределение Картана [5]. Действительно, распределение Картана на $J^1 \pi$ задается одной 1-формой $\omega = du - \sum_{i=1}^5 u_i d\xi_i$ и F отображает ее в форму Картана $F^*(\omega)$ на Y , так как ограничение $F^*(\omega)$ на любом решении системы Y равно нулю (17).

Подмногообразие E_1 , соответствующее отображению F (теорема 2 в [5]), совпадает с первым продолжением $Y^{(1)}$ уравнения Y . Действительно, рассмотрим форму объема

$$\Omega = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3 \wedge d\xi_4 \wedge d\xi_5$$

на базе расслоения π . Имеем

$$(\pi_1 \circ F)^*(\Omega) = dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2),$$

а значит, из (15) следует неравенство $(\pi_1 \circ F)^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \neq 0$ для любой точки $\theta' \in Y^{(1)}$.

Из теорем 2 и 3 в [5] следует, что для любого $q = 1, 2, \dots, \infty$ определено продолжение $F^{(q)}: Y^{(q)} \rightarrow J^{q+1} \pi$. Образ отображения $F^{(q-1)}$ состоит из q -джетов функций f , соответствующих плоским системам вида (5). Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти функции на $J^q \pi$, которые равны нулю на $\text{im } F^{(q-1)}$.

Для координатного описания $F^{(q)}$, $q = 1, 2, \dots, \infty$ можно использовать полные производные

$D_{y_j^{(s)}}$ на Y^∞ и D_{ξ_i} на $J^\infty \pi$ [5], а также формулы, их связывающие,

$$(F^\infty)_*(D_{y_j^{(s)}}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}} D_{\xi_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (EX_i)}{\partial y_j^{(s)}} D_{\xi_{i+3}}, \quad j=1,2, \quad s=0,1,\dots,l+1.$$

Из этих формул и неравенства (15) получаем соотношения

$$D_{\xi_i} = \sum_{y=y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2} B_{iy} (F^\infty)_*(D_y), \quad i=1,\dots,5, \quad (18)$$

где (B_{iy}) - матрица функций обратная к матрице определителя (15).

Отображение $F^{(q)}$ определяется действием индуцированного отображения $(F^{(q)})^*$ на координатные функции канонической системы координат многообразия $J^{q+1} \pi$. В свою очередь действие $(F^{(q)})^*$ определяется действием $(F^{(q-1)})^*$ ($F^{(0)} = F$) и формулами (18). Действительно, вложение $(\pi_{q+1,q})^*$ отображает координатные функции на $J^q \pi$ в координатные функции на $J^{q+1} \pi$. Из свойства 1 (теорема 3 в [5]) следует, что на таких функциях действие $(F^{(q)})^*$ совпадает с действием $(F^{(q-1)})^*$. Остальные координатные функции на $J^{q+1} \pi$ соответствуют производным u порядка $q+1$. Они получаются из координатных функций на $J^q \pi$ действием полных производных, если понимать эти функции как функции на $J^\infty \pi$. Соотношения (18) позволяют выводить формулы для действия $(F^{(q)})^*$ на них из формул для $(F^{(q-1)})^*$.

Например, отображение $F^{(1)}$ определяется формулами

$$(F^{(1)})^*(\xi_i) = F^*(\xi_i) = X_i, \quad i=1,2,3, \quad (F^{(1)})^*(\xi_i) = EX_{i-3}, \quad i=4,5;$$

$$(F^{(1)})^*(u) = EX_3; \quad (F^{(1)})^*(u_i) = \frac{M_i}{M_0}, \quad i=1,\dots,5;$$

$$(F^{(1)})^*(u_{ji}) = (F^{(1)})^*(D_{\xi_i} u_j) = \sum_y B_{iy} D_y \left((F^{(1)})^*(u_j) \right), \quad 1 \leq i \leq j \leq 5.$$

Аналогичные формулы пишутся для $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ и т.д.

Из соотношения (18) следует, что если функция g равна нулю на $\text{im } F^{(q-1)}$, то ее полная производная по любой переменной $\xi_1, \dots, \xi_5$ равна нулю на $\text{im } F^{(q)}$. Можно показать, что существует такой конечный набор функций $g_1, \dots, g_s$, что системе $D_\sigma(g_i) = 0, i=1, \dots, s, |\sigma| \geq 0$ удовлетворяют точки $\text{im } F^\infty$ и только они. Это означает, что $\text{im } F^\infty$ есть бесконечное продолжение системы дифференциальных уравнений $g_i = 0, i=1, \dots, s$.

Таким образом мы получаем систему уравнений на правые части l -плоских систем. С ростом l порядок этой системы растет, а соответствующее подмножество в $J^\infty \pi$ (диффеотоп уравнения l -плоских систем) расширяется. Видимо, множество всех бесконечных джетов функций f , задающих плоские системы вида (5) (объединение диффеотопов уравнений l -плоских систем для всех l), не является бесконечным продолжением какой-либо системы уравнений, а имеет более сложную структуру.

4. Заключительное замечание

Выведено уравнение Y на накрытия из пространства джетов в плоские системы. Построено отображение из Y в множество джетов l -плоских систем. Хотя рассмотрен только случай $n=3$, $m=2$, в общем случае построения аналогичны. Как нам видится, возможны два пути продолжения данных исследований. Первый заключается в переписывании уравнений на l -плоские системы в уравнения вида (12), т.е. содержащие дифференциальные формы. Второй путь состоит в

применении методов компьютерной алгебры и системы символьных вычислений MAPLE для последовательного вычисления функций, равных нулю на $\text{im } F^{(q)}$. Каждая такая функция определяет необходимое условие плоскостности, примером которого является уравнение (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph., Rouchon, P.** A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. - 1999. - V. 44, 5. - P. 922-937.
2. **Rouchon P.** Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization // J. Math. Systems Estim. Control. - 1994. - V.4, 2. - P. 1-14.
3. **Hilbert D.** Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen // Math. Ann. - 1912. - V. 73. - P. 95-108. (Also in Gesammelte Abhandlungen, V. III. - Chelsea, New York, 1965. - P. 81-93).
4. **Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др.** Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Факториал, 2005.
5. **Четвериков В.Н.** Субмерсии в категории бесконечно продолженных дифференциальных уравнений // Статья в данном Вестнике.
6. **Четвериков В.Н.** Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. - 2004. - Т. 40. - С. 1665-1674.

JETS OF FLAT CONTROL SYSTEMS

Chetverikov V.N.

Flat systems form the widest class of systems for which control methods are developed. Any flat system can be presented as the image of a smooth map of a jet space. In the paper an equation on such maps is deduced, and to each jet of solution of this equation assign the jet of the function describing a flat system. Every function vanishing on this set of jets, gives a necessary flatness condition.

Key words: flat control systems, jet manifolds, prolongations of maps of differential equations.

Сведения об авторе

Четвериков Владимир Николаевич, 1958 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 47 научных работ, область научных интересов - преобразования уравнений в частных производных, функционально-дифференциальные уравнения, симметрии, законы сохранения, нелинейные динамические системы с управлением, динамическая обратная связь, плоские системы.