Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–11

УДК 514.763

ДВУМЕРНЫЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВЫ ПРОСТРАНСТВА

В.А. Кыров

The Helmholtz planes are defined and their motion groups are given. The quasi-metric tensor that is analogues of metric tensor of the Riemannian spaces is found.

В данной работе определяются гельмгольцевы плоскости и приводятся группы их движений. Находятся метрические функции f гельмгольцевых двумерных пространств, которые в бесконечно малом имеют структуру гельмгольцевых плоскостей. Определяется квазиметрический тензор, который является в некотором смысле аналогом метрического тензора в римановых пространствах. Доказывается теорема о существовании единственной квазиметрической (согласованной) связности с нулевым кручением, относительно которой при параллельном переносе сохраняется метрическая функция f. Устанавливаются свойства тензора кривизны R гельмгольцевых пространств. Вводится секционная гельмгольцева кривизна K и доказывается, что только для локально плоских пространств она является константой, причем равной нулю.

Приступим к определению гельмгольцевых плоскостей.

Г.Г. Михайличенко в монографии [1] проводит полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий, то есть геометрий со следующим свойством. Существует достаточно гладкое многообразие N, в котором можно ввести единую систему координат. Существует плотное подмногообразие N' прямого произведения $N \times N$ некоторого двумерного многообразия N на себя. Существует также достаточно гладкая невырожденная функция $f : N' \to R$, которую будем называть *метрической функцией*, и гладкая функция шести переменных $\varPhi : R^6 \to R$, что для любого кортежа из четырех произвольных точек $< xyzu >$, каждая пара из которого принадлежит множеству N', имеет место функциональное уравнение: $\varPhi(f(xy), f(xz), f(xu), f(yz), f(yu), f(zu)) = 0$.

Этому свойству удовлетворяют некоторые известные, а также и неизвестные геометрии. К известным геометриям с таким свойством принадлежат: плоскость Евклида, псевдоевклидова плоскость, симплектическая плоскость и т.д. Неизвестные геометрии со свойством феноменологической симметрии — это: *плоскость Гельмгольца* Γ^2, метрическая функция $f(xy)$ которой в специальной единой системе координат имеет следующее представление:

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\gamma arctg \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{1}$$

Горно-алтайский государственный университет

где $\gamma > 0$, x^1 и x^2 — координаты точки x, причем функция $arctg$ рассматривается однозначной с областью значений в промежутке $(-\pi/2, \pi/2]$ (этот термин появился из анализа знаменитой работы Гельмгольца «О фактах, лежащих в основании геометрии», где он предлагал изучать геометрию, в которой роль окружности выполняет логарифмическая спираль); *псевдогельмгольцева плоскость* $P\Gamma^2$, метрическая функция f которой в некоторой системе координат имеет вид:

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\beta Ar(c)th\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{2}$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, причем выбирается функция $Arth$, если аргумент по модулю меньше единицы, и выбирается функция $Arcth$, если аргумент по величине больше единицы; *дуальногельмгольцева плоскость* D^2 с метрической функцией f в некоторой системе координат:

$$f(xy) = (x^1 - y^1)^2 \exp\left(2\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right) \tag{3}$$

и, наконец, *симплициальная плоскость* S^2 с метрической функцией $f(ij)$, которая в некоторой системе координат имеет следующее представление:

$$f(xy) = \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}. \tag{4}$$

Объединим в одном выражении метрические функции (1)-(3):

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - \varepsilon(x^2 - y^2)^2] \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{5}$$

где для плоскости Гельмгольца Γ^2 $\varepsilon = -1$, $\alpha = \gamma$ и $\Phi_{-1}(x) = arctgx$; для псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$ $\varepsilon = 1$, $\alpha = \beta$ и $\Phi_1(x) = Ar(c)thx$; для дуальногельмгольцевой плоскости D^2 $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$ и $\Phi_0(x) = x$. Ниже под термином плоскость Гельмгольца, если нет опасности путаницы, будет пониматься одна из этих четырех плоскостей, которую обозначим через F^2.

Теперь введем строгое определение плоскости Гельмгольца F^2. Итак, будем говорить, что множество точек x двумерного многообразия N принадлежат F^2, если существует такая точка y из N, что пара $< xy > \in N'$.

Будем предполагать, что эта плоскость одновременно является подмногообразием многообразия N.

Перейдем теперь к определению группы движений плоскости F^2 и ее подгруппы вращений.

Пусть G — группа преобразований плоскости F^2. Преобразование g назовем *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f, то есть оставляет ее инвариантной: $f \circ (g \times g) = f$

Михайличенко Г.Г. в монографии [1] показал, что по метрической функции f находится трехмерная группа движений G, а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция f с точностью до «масштабной» гладкой функции $\varphi : R \to R$. Решая эту задачу для выше приведенных плоскостей, приходим к группам движений G_{F^2}, которые в выше определенных координатах и специальной системы параметров для плоскостей Γ^2, $P\Gamma^2$, D^2 задаются следующими уравнениями:

$$x^{1\prime} = ax^1 + \varepsilon bx^2 + c, \quad x^{2\prime} = bx^1 + ax^2 + d, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\ \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{b}{a}\right) = 1; \quad (6)$$

для плоскости S^2:

$$x^{1\prime} = ax^1 + c, \quad x^{2\prime} = ax^2 + d, \quad a \neq 0. \quad (7)$$

Очевидно, что эти группы являются подгруппами группы аффинных преобразований. Выделим в группах G_{F^2} подгруппы $\tilde{G}_{F^2}$ по следующему принципу. В G_{F^2} существует такая нормальная подгруппа T, являющаяся группой сдвигов, что фактор-группа G_{F^2}/T изоморфна подгруппе $\tilde{G}_{F^2}$. Тогда G_{F^2} является полупрямым произведением $\tilde{G}_{F^2}$ и T. Эту группу будем называть *группой вращений плоскости* F^2 и обозначать $O(F^2)$. В соответствующей системе координат и параметров эти группы имеют, очевидно, следующие выражения:

$$x^{1\prime} = ax^1 + \varepsilon bx^2, \quad x^{2\prime} = bx^1 + ax^2, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\ \exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \quad (6')$$

и

$$x^{1\prime} = ax^1, \quad x^{2\prime} = ax^2, \ \ a \neq 0. \quad (7')$$

Можно показать, что у группы $O(F^2)$ имеется три независимых двухточечных гладких инварианта ψ_1, ψ_2, ψ_3: $O(F^2) \to (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, от которых удобно перейти к трем инвариантам [2] (необязательно независимым и невырожденным). Эти инварианты в специальной системе координат имеют следующие представления: для плоскостей $F^2 = \Gamma^2$, $P\Gamma^2$, D^2:

$$(x, y)_{F^2} = (x^1y^1 - \varepsilon x^2y^2)\exp\left(\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2}{x^1}\right) + \alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{y^2}{y^1}\right)\right), \quad (8a)$$

$$< x, y >_{F^2} = (x^1y^2 - x^2y^1)\exp\left(\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2}{x^1}\right) + \alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{y^2}{x^1}\right)\right), \quad (8b)$$

$$(x, x)_{F^2} = ((x^1)^2 - \varepsilon(x^2)^2)\exp\ 2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2}{x^1}\right); \quad (8c)$$

для симплициальной плоскости S^2:

$$(x, y)_{S^2} = \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^1y^1}}, \quad (9a)$$

$$< x, y >_{S^2} = \frac{x^1y^2}{x^2y^1}, \quad (9b)$$

$$(x,x)_{S^2} = \frac{x^2}{x^1}, \tag{9c}$$

где, напомним, x^1 и x^2 – координаты точки x.

Пусть V^2 – двумерное вещественное линейное пространство, в котором фиксируем базис e_1, e_2. Относительно этого базиса произвольный вектор ξ имеет координаты (ξ^1, ξ^2). В V^2 определим гельмгольцево квазискалярное произведение (аналог скалярного произведения в римановых пространствах) между векторами ξ и η, которое относительно базиса e_1, e_2 в координатах задается формулой (9a) или (10) и обозначается $(\xi,\eta)_{F^2}$, где уже $F^2 = \Gamma^2, P\Gamma^2, D^2, S^2$. Вторые формулы определяют в V^2 относительно этого же базиса e_1, e_2 площадь между этими векторами, которая обозначается $< \xi, \eta >_{F^2}$. Заметим, что введенное здесь квазискалярное произведение не удовлетворяет всем свойствам обычного скалярного произведения. Так, оно не является линейным и не определено в нуле.

1. Двумерные гельмгольцевы пространства

С данного момента приступим к определению двумерных гельмгольцевых пространств, которые в бесконечно малой окрестности произвольной точки устроены как гельмгольцевы плоскости. Предварительно введем понятие структурных функций, через которые мы выразим метрические функции этих пространств.

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие. Пусть $T(M)$ – касательное расслоение со стандартным слоем V^n и касательным пространством $T_x(M)$ в точке x многообразия M. Пусть $L(M)$ – расслоение линейных реперов u со структурной группой $GL(n,R)$. Слой $L_x(M)$ в $L(M)$ над точкой $x \in M$ состоит из линейных реперов u, отличающихся друг от друга на элементы из $GL(n,R)$, то есть $v = uA$, $A \in GL(n,R)$, $u,v \in L_x(M)$. Очевидно,что в точке $x \in M$ $u = (X_1,...,X_n)$. Каждый линейный репер u из $L(M)$ можно рассмотреть как изоморфизм V^n на $T_x(M)$ [3]. Пусть $(e_1,...,e_n)$ – фиксированный базис в V^n. Тогда $ue_i = X_i$, где $i = 1,...,n$, следовательно, $u\xi = \xi^i X_i \in T_x(M)$, причем $\xi = \xi^i e_i$.

Рассмотрим отображение

$$\omega : L_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n, \tag{10}$$

которое в явном виде задается следующей формулой. Пусть u и v – произвольные реперы из $L_x(M)$. Пусть произвольный вектор $X \in T_x(M)$ в базисе v имеет координаты $X^1,...,X^n$. Тогда положим

$$\omega(u,v,X) = a_i^j X^i e_j. \tag{11}$$

Предположим, что $v = (Y_1,...,Y_n)$ и $u = (X_1,...,X_n)$. Поэтому $u = (X_1^j Y_j,...,X_n^j Y_j)$, причем $i,j = 1,...,n$. В отношении отображения (10) выдвинем еще требование: $a = X^{-1}$, где X — матрица отличия репера u от v. Предполагается, что соответствие (10) является гладким по своим аргументам. Кроме того, будем полагать, что относительно открытого покрытия U_α многообразия M в силу локальной тривиальности расслоения $L(M)$ существует семейство изоморфизмов $\kappa_\alpha : L(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(n, R)$, которые определяют сечения через u и v: $\sigma_\alpha : U_\alpha \to L(M)$ по формулам $\sigma_{1\alpha}(x) = \kappa_{1\alpha}^{-1}(x, e)$ и $\sigma_{2\alpha}(x) = \kappa_{2\alpha}^{-1}(x, e)$ соответственно. Тогда соответствие $x \mapsto \omega$ является необходимое число раз дифференцируемым в произвольной координатной окрестности $U \subset M$. Поэтому элементы матрицы a являются дифференцируемыми функциями в U, которые будем называть *структурными функциями.*

Естественно рассмотреть следующее сужение отображения (10):

$$\omega : L_x(M) \times \{v\} \times T_x(M) \to V^n.$$

Его мы обозначим

$$\omega_v : L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{12}$$

Предположим, что $v = (\partial x^1, ..., \partial x^n)$ – координатный базис в координатной окрестности U произвольной точки многообразия M. Тогда

$$\omega_v(u, \partial x^i) = e_i^* = a_i^j e_j.$$

Очевидно следующее свойство отображения ω_v:

$$u \circ \omega_v(u, \partial x^i) = \partial x^i$$

и в более общем случае

$$u \circ \omega_v(u, X) = X.$$

Лемма 1. *При переходе от системы координат U к системе координат U' структурные функции a преобразуются по закону*

$$a_i^{\prime j} = a_k^j \frac{\partial x^k}{\partial x^{\prime i}}, \tag{13}$$

где a — структурные функции в координатной окрестности U, а a' – структурные функции в координатной окрестности U', причем $i, j, k = 1, ..., n$. ■

Из леммы следует, что функции (11) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Рассмотрим подгруппу Ли G группы $GL(n, R)$ и редукцию общей линейной группы $GL(n, R)$ к подгруппе G. Редуцированное подрасслоение будем обозначать $Q(M, G)$ или просто Q. Рассмотрим сужение отображения (10) на Q_x относительно первого аргумента.

$$\omega : Q_x(M) \times L_x(M) \times T_x(M) \to V^n. \tag{14}$$

Функция (14), так же, как и функция (10), является гладкой. Тогда для фиксированного репера $v \in L_x(M)$

$$\omega_v(u, X) = a_i^j X^i e_j, \tag{15}$$

где u – произвольный репер из Q_x. Заметим, что функции (15) в силу выше доказанной леммы инвариантны относительно произвольной замены координат. Поскольку u — произвольный репер из Q_x, а v – некоторый фиксированный репер из $L_x(M)$, то матрица a представима в таком виде:

$$a = bc \tag{16}$$

или в координатах

$$a^i_j = b^i_k c^k_j,$$

где b – произвольный элемент подгруппы G, а c — некоторая фиксированная матрица из $GL(n, R)$. Пусть U_α — некоторое открытое покрытие многообразия M. В силу локальной тривиальности расслоения $L(M)$ и того, что $Q(M)$ – редуцированное подрасслоение расслоения линейных реперов, существует семейство изоморфизмов $\kappa_\alpha : L(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL(n, R)$, которое индуцирует семейство изоморфизмов $\varkappa_\alpha : Q(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$. Рассмотрим отображения $\sigma_\alpha : U_\alpha \to L(M)$ и $\tau_\alpha : U_\alpha \to Q(M)$, которые определяют сечения: $\sigma_\alpha(x) = \kappa^{-1}_\alpha(x, e)$ через репер $v \in L_x(M)$, в частности, если v – координатный базис, то в качестве сечения $\sigma_\alpha(x)$ удобно взять сечение, задаваемое реперами $\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^n}$, $\tau_{1\alpha}(x) = \varkappa^{-1}_{1\alpha}(x, e)$ через произвольный репер $u \in Q_x(M)$ и $\tau_{2\alpha}(x) = \varkappa^{-1}_{1\alpha}(x, e)$ через некоторый репер $u' \in Q_x(M)$. Тогда a^{-1} – матрица отличия репера $\tau_{1\alpha}(x)$ от репера $\sigma_\alpha(x)$, а c^{-1} – матрица отличия репера $\tau_{2\alpha}(x)$ от репера $\sigma_\alpha(x)$. Заметим, что c – это некоторая специальным образом подобранная матрица. Из выше приводимых рассуждений следует, что функция (14), так же как и функция (10) в координатной окрестности U, является гладкой с гладким соответствием $x \mapsto \omega$. Очевидно, что разложение (16) справедливо и для структурных функций в координатной окрестности U.

Пусть теперь M — гладкое двумерное многообразие. Пусть G — это группа гельмгольцевых вращений $O(F^2)$. Рассмотрим редуцированное подрасслоение $Q(M) = Q(M, O(F^2))$ расслоения линейных реперов $L(M)$. Этому подрасслоению соответствует отображение

$$\omega_v : Q_x(M) \times T_x(M) \to V^2.$$

Поскольку для G-пространства справедливо разложение структурных функций (16), то отображение ω_v в координатах принимает такой вид:

$$\omega_v(u, X) = b^j_k c^k_i X^i e_j, \tag{17}$$

где b – произвольная матрица из $O(F^2)$. Заметим, что выражение (17) при произвольном u задает семейство векторов в V^2, которые определяют одно и то же значение квазискалярного произведения вектора на себя $(\xi, \xi)_{F^2}$ по формуле (8a) или (9c). Так как в (17) X – произвольный вектор из $T_x(M)$, то естественно переносится квазискалярное произведение в касательное пространство $T_x(M)$ по формуле

$$f(X, Y) = (\omega_v(u, X), \omega_v(u, Y))_{F^2}, \tag{18}$$

причем $X, Y \in T_x(M)$. Таким образом, мы получили отображение

$$f : Q_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to R.$$

Это отображение, очевидно, является гладким по своим аргументам и как соответствие $x \mapsto f$. Формула (18) позволяет в $L(M)$ ввести отношение эквивалентности. Классами эквивалентности являются редуцированные подрасслоения $Q(M, O(F^2))$. Функцию (18) можно положить в основу определения подрасслоения $Q(M, O(F^2))$. Эту функцию будем называть метрической функцией *гельмгольцева двумерного пространства.*

Найдем явный вид метрической функции (18) в координатной окрестности U. Пусть линейное отображение ω_v переводит векторы $X, Y \in T_x(M)$ в соответственно следующие векторы

$$\omega_v(u, X) = a_i^j X^i e_j, \quad \omega_v(u, Y) = a_i^j Y^i e_j,$$

где под v теперь понимается координатный базис в U. Следовательно, метрическая функция f принимает такой вид: для собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств:

$$f(X, Y) = g_{ij}^{\varepsilon} X^i Y^j \exp\left(\alpha \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a_k^2 X^k}{a_l^1 X^l}\right) + \alpha \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a_k^2 Y^k}{a_l^1 Y^l}\right)\right); \tag{19}$$

для симплициальных пространств:

$$f(X, Y) = \sqrt{\frac{a_k^2 X^k a_j^2 Y^j}{a_l^1 X^l a_i^1 Y^i}}, \tag{20}$$

$i, j, k, l = 1, 2$, причем

$$g_{ij}^{\varepsilon} = a_i^1 a_j^1 - \varepsilon a_i^2 a_j^2, \tag{21}$$

где $\varepsilon = -1, 1, 0$ и под ε не понимается индекс суммирования. Заметим, что здесь под a уже понимается фиксированная матрица. Можно показать, что символы (21) образуют тензор. Легко установить, что метрическая функция (19) или (20) остается инвариантной при переходе к произвольной другой системе координат.

Дифференциалы координат dx^i образуют контравариантный тензор первого ранга, которому однозначно соответствует вектор в касательном пространстве $T_x(M)$. Положим в (19) и (20) $X^i = Y^i = dx^i$. Тогда будем иметь

$$f = g_{ij}^{\varepsilon} dx^i dx^j exp\left(2\alpha \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a_k^2 dx^k}{a_l^1 dx^l}\right)\right); \tag{19$'$}$$

$$f = \frac{a_j^2 dx^j}{a_i^1 dx^i}, \tag{20$'$}$$

где $i, j, k, l = 1, 2$.

Следует заметить, что если вместо $Q(M, O(F^2))$ взять расслоение ортонормированных реперов $O(M)$ и провести аналогичные рассуждения, то получим римановы пространства [3].

2. Квазиметрическая связность

Заметим, что по построению гельмгольцевы пространства являются пространствами с линейной связностью. Приступим к исследованию связностей в этих пространствах. Докажем существование и единственность квазиметрической связности с нулевым кручением.

Связность в расслоении линейных реперов $L(M)$ называется *квазиметрической или согласованной связностью*, если параллельный перенос слоев из $T(M)$ сохраняет метрическую функцию f гельмгольцева пространства.

Из определения квазиметричекой связности следует равенство нулю ковариантной производной:

$$\nabla_k f(X, X) = 0.$$

Кручение определяется обычным образом. Несложно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Гельмгольцево двумерное многообразие в координатной окрестности U произвольной точки допускает единственную квазиметрическую связность с нулевым кручением, символы Кристоффеля которой задаются выражениями*

$$\Gamma^{\varepsilon l}_{ik} = \frac{1}{2} h^{\varepsilon lk} \left(\frac{\partial h^{\varepsilon}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h^{\varepsilon}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^k} \right) - \alpha h^{\varepsilon lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{22}$$

$$\Gamma^{l}_{ik} = \frac{1}{2} h^{lk} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right) - h^{lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{23}$$

где для квазиметрического тензора имеем выражение

$$h^{\varepsilon}_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j + \alpha (a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i), \quad h_{ij} = a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i, \tag{24}$$

для символов

$$\lambda_{ijk} = a^2_j \frac{\partial a^1_i}{\partial x^k} - a^1_j \frac{\partial a^2_i}{\partial x^k} \tag{25}$$

и, наконец, $h^{ij} h_{jk} = \delta^i_k$, $h^{\varepsilon ij} h^{\varepsilon}_{jk} = \delta^i_k$, $\varepsilon = -1, 1, 0$ и $\alpha = \gamma, \beta, 1$, причем под ε не следует понимать индекс суммирования. ■

Из доказательства теоремы 1 и выражения для ковариантной производной тензора следует, что

$$\nabla_k h^{\varepsilon}_{ij} = 2\alpha q_{ijk}, \quad q_{ijk} = \Gamma^{\varepsilon l}_{ki} \tilde{h}_{jl} + \lambda_{ijk}, \quad \nabla_k h_{ij} = 2\alpha q_{ijk}, \quad q_{ijk} = \Gamma^{l}_{ki} \tilde{h}_{jl} + \lambda_{ijk}.$$

Следует заметить, что для римановых пространств ковариантная производная метрического тензора относительно римановой связности равна также нулю.

Легко показать, что символы h^{ε}_{ij} и h_{ij} преобразуются по тензорному закону, которые будут называться *квазиметрическими тензорами*. Символы λ_{ijk} преобразуются по закону:

$$\lambda'_{ijk} = \lambda_{lmn} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + h_{lm} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i x'^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j},$$

где $i, j, k, l = 1, 2$.

Предположим, что в координатной окрестности U произвольной точки $x \in M$ функции $a^i_j = const$. Тогда мы приходим локально к гельмгольцевой плоскости F^2. Осуществим локально обратимую замену координат $x = a^1_i x^i$, $y = a^2_i x^i$, где по «немому» индексу i ведется суммирование от 1 до 2. Значит, метрические функции (19'), (20') принимают такой вид:

$$f = [dx^2 - \varepsilon dy^2] exp\left(2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{dy}{dx}\right)\right); \tag{19''}$$

$$f = \frac{dy}{dx}. \tag{20''}$$

Сравнивая с (19'), (20'), имеем $a^1_1 = a^2_2 = 1$, $a^1_2 = a^2_1 = 0$. Поэтому квазиметрический тензор гельмгольцевых плоскостей равен:

$$h^\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Секционная гельмгольцева кривизна

В этом параграфе введем понятие секционной гельмгольцевой кривизны $O(F^2)$-пространств, где уже строго под F^2 понимается либо Γ^2, либо $P\Gamma^2$, либо D^2. Заметим, что для симплициальных пространств понятие секционной кривизны не определяется. Сначала определим свойства компонент тензора кривизны гельмгольцевых пространств. С данного момента под $O(F^2)$ будем понимать изоморфный образ группы вращений с конечными уравнениями (6') в общей линейной группе $GL(n, R)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Алгебра Ли $o(F^2)$ группы Ли $O(F^2)$ состоит из матриц*

$$\begin{pmatrix} -\alpha a & \varepsilon a \\ a & -\alpha a \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где, напомним, $\alpha = \gamma, \beta, 1$ и $\varepsilon = -1, 1, 0$ соответственно. ■

Напомним, что связность в расслоении линейных реперов $L(M)$ называется согласованной со структурой, если при параллельном переносе слоев в $T(M)$ сохраняется метрическая функция f гельмгольцева пространства. Тогда форма кривизны [3] связности, согласованной со структурой, является элементом алгебры Ли $o(F^2)$, то есть имеет вид (26). Переходя от формы кривизны к тензору кривизны R [3], устанавливаем его свойства:

1. Антисимметрия по нижним индексам: $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$;

2. При фиксированных индексах k и l в точке x $R^i_{jkl} \in o(F^2)$.

Из этих свойств следуют равенства

$$R^1_{112} = -\alpha R^2_{112}, \quad R^1_{212} = \varepsilon R^1_{112}, \quad R^2_{212} = -\alpha R^2_{112}.$$

Перейдем теперь к выводу выражений для секционной кривизны. Рассмотрим двумерное гельмгольцево многообразие M с касательным пространством

$T_x(M)$. Касательное пространство $T_x(M)$ является также двумерным и поэтому содержит единственную двумерную плоскость, то есть M имеет единственное двумерное направление. Рассмотрим два произвольных линейно независимых вектора $X, Y \in T_x(M)$, которые относительно координатного базиса имеют координаты X^i и Y^i, где $i = 1, 2$. Секционную кривизну K определим следующей формулой:

$$K = \frac{f(R(X,Y)Y,X)}{< X, Y >_{F^2}} \varphi(X,Y), \tag{27}$$

где введено сокращающее обозначение

$$\varphi(X,Y) = \exp\left[\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_i^2 X^i}{a_j^1 X^j}\right) + \alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_i^2 Y^i}{a_j^1 Y^j}\right)\right],$$

причем a_j^i — структурные функции. Из выражений (8.2) для гельмгольцевой площади следует, что в координатах

$$< X, Y >_{F^2} = h_{ij} X^i Y^j \varphi(X,Y).$$

Рассмотрим подмножество $S_x(M)$ прямого произведения $T_x(M) \times T_x(M)$, состоящее из линейно независимых пар векторов $< X, Y >$, то есть этому множеству не принадлежит диагональ из прямого произведения. Пару векторов будем называть линейно независимой, если определитель, составленный из их координат, равен нулю. Очевидно, что в $S_x(M)$ можно естественно ввести гладкую структуру. Следует заметить, что для ненулевых векторов $< X, Y >_{F^2} = 0$ тогда и только тогда, когда $< X, Y > \in T_x(M) \times T_x(M)/S_x(M)$. В таком случае секционную кривизну K можно представить как отображение

$$K : M \times S_x(M) \to R. \tag{28}$$

Пусть векторы $X, Y \in T_x(M)$, причем $< X, Y > \in S_x(M)$, включены в гладкие векторные поля из $T(M)$. Тогда функции $f, <,>_{F^2}, \varphi$ будут гладко зависеть от точек из M и пар векторов из $S_x(M)$. Значит, функция (28) является гладкой.

Выражение (27) можно еще записать в такой форме:

$$K = \frac{f(R(X,Y)Y,X)}{h_{ij} X^i Y^i}. \tag{27$'$}$$

Из выше доказанной леммы следует, что при замене координат в точке x секционная кривизна K остается неизменной.

Выясним теперь, как изменяется секционная кривизна K в зависимости от преобразований векторов в касательном пространстве $T_x(M)$.

Пусть H_x – совокупность диффеоморфизмов касательного пространства $T_x(M)$. Очевидно, что H_x является группой Ли, совпадающей с $GL(T_x(M))$. Элементы h_x группы H_x тогда являются невырожденными матрицами. Будем предполагать, что соответствие $x \mapsto h_x$ является гладким. Группа H_x в касательном пространстве $T_x(M)$ действует так: $h_x : X \mapsto h_x(X)$. Определим действие группы H_x в прямом произведении $T_x(M) \times T_x(M)$ по формуле

$h_x \times h'_x :< X, Y >\mapsto< h_x(X), h'_x(Y) >$. Эту группу мы обозначим $(H \times H)_x$. Очевидно, что пространство $S_x(M)$ является инвариантом группы $(H \times H)_x$. Рассмотрим диагональную подгруппу группы $(H \times H)_x$, которую будем обозначать просто H_0. Пусть элемент $(h \times h)_x$ группы H_0 пару векторов $< X, Y >$ из пространства S_x переводит в пару $< h_x(X), h_x(Y) >$. Выясним, как при этом будет изменяться значение секционной кривизны K. Имеет место следующее утверждение. Если h_x является элементом группы гельмгольцевых вращений $O(F^2)$, где $F^2 = \Gamma^2, P\Gamma^2, D^2$, то справедлива формула

$$K(x, X, Y) = K(x, h_x(X), h_x(Y)). \tag{29}$$

Последнее утверждение приводит к тому, что пространство $S_x(M)$ разбивается на классы $S_x(H_0)$. Эти классы состоят из пар векторов $< X, Y >$, которые отличаются друг от друга на матрицы группы гельмгольцевых вращений $O(F^2)$. Тогда для произвольных пар векторов класса $S_x(H_0)$ имеет место формула (29).

Заметим, что в случае римановых пространств это утверждение справедливо для произвольных преобразований из группы H_0.

Если $K = const$ для всех точек $x \in M$, то пространство называется пространством постоянной кривизны.

От (27') приходим к формуле

$$f(R(X, Y)Y, X) = K h_{ij} X^i Y^i, \tag{30}$$

которая нам ниже понадобится. Справедлива следующая

Теорема 3. *Если секционная гельмгольцева кривизна K в некоторой координатной окрестности U некоторой точки гельмгольцева двумерного пространства не зависит от векторов X и Y, то $K = 0$ в этой окрестности.*

Доказательство. Предположим, что в некоторой окрестности U некоторой точки K не зависит от X и Y. Тогда в (30) правая часть является билинейной формой, а левая часть не является такой. Это возможно только при $K = 0$. Теорема доказана. ■

Из этой теоремы следует, что гельмгольцево пространство постоянной кривизны может иметь только нулевую кривизну.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* Новосибирск, 2001.
2. Кыров В.А. *Векторы некоторых двумерных феноменологически симметричных геометрий* // Наука, культура, образование (Горно-Алтайск). 2000. N.6/7. С.111 - 114.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* М.: Наука, 1981.