

УДК 519.237.24

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА
ДЖЕЙМСА – СТЕЙНА: МЕТОД РАВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ
ПРИ ГЛОБАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ВЕРОЯТНОСТИ НАКРЫТИЯ

И.Н. Володин, И.А. Кареев

Аннотация

В работе [Ahmed S.E., Saleh A.K.MD.E., Volodin A.I., Volodin I.N. Asymptotic expansion of the coverage probability of James–Stein estimators // Theory Probab. Appl. – 2007. – V. 51. – P. 683–695] была получена асимптотическая формула для вероятности накрытия доверительным множеством Джеймса–Стейна, которая одновременно асимптотически точна как для больших, так и малых значений параметра нецентральности τ^2 – суммы квадратов средних значений $p \geq 3$ нормальных распределений, подлежащих доверительной оценке. Как показывают численные иллюстрации, эта формула может быть использована практически во всей области значений τ^2 с ошибкой в вычислении вероятности накрытия порядка одной сотой. В настоящей работе предлагается аналогичная асимптотическая формула, глобальная ошибка которой в вычислении вероятности накрытия значительно меньше в области малых и умеренных значений p . Точность полученных аппроксимаций иллюстрируется на данных статистического моделирования.

Ключевые слова: доверительные множества, положительная модификация оценки Джеймса–Стейна, многомерное нормальное распределение, вероятность накрытия, асимптотические разложения.

Введение

Рассматривается проблема доверительной оценки вектора средних значений $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ p -мерного нормального распределения с независимыми компонентами, имеющими одинаковую дисперсию $\sigma^2 = 1$. Пусть $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$ – вектор выборочных средних значений, вычисляемых по выборкам одинакового объема n из маргинальных распределений. Доверительное множество

$$D_{\bar{X}} = \left\{ \theta : n \sum_1^p (\theta_i - \bar{X}_i)^2 \leq c^2 \right\}$$

имеет заданный доверительный коэффициент $1 - \alpha$, если c^2 определяется через квантиль хи-квадрат распределения с p степенями свободы посредством соотношения $K_p(c^2) = 1 - \alpha$, где $K_p(\cdot)$ – функция распределения хи-квадрат.

Такое доверительное множество обладает свойством минимаксности, но существуют также другие минимаксные множества, которые обладают большей вероятностью накрытия при всех значениях параметра нецентральности $\tau^2 = n \|\theta\|^2$, если $p \geq 3$. Наиболее известное из них – это множество

$$D_{\delta^+} = \left\{ \theta : n \|\theta - \delta^+(\bar{X})\|^2 \leq c^2 \right\},$$

центрированное положительной модификацией оценки Джеймса – Стейна [1]

$$\delta^+(\bar{X}) = \bar{X} \cdot \max \left\{ 0, 1 - \frac{p-2}{n \|\bar{X}\|^2} \right\}$$

(предполагается, что $p > 2$). В последующем эти и аналогичные ему доверительные множества изучались многими авторами. Нас в первую очередь интересуют результаты, связанные с асимптотическими исследованиями вероятности накрытия истинного значения вектора θ (см., например, библиографию в статье [2], а также работу [3], идеи которой во многом используются в наших построениях).

В работе [2] был предложен подход к аппроксимации вероятности накрытия, основанный на комбинации геометрических и аналитических методов. Было установлено, что $Q_p^+(\tau) = P(D_{\delta^+})$ зависит от значений вектора θ через параметр $\tau^2 = n \|\theta\|^2$, является убывающей функцией τ^2 и

$$Q_p^+(\tau) = K_p(w(c, \tau)) + R_p(\tau), \tag{1}$$

где

$$w(c, \tau) = p - 2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} + \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2\tau^2 - (p-2)(\tau^2 - c^2)}$$

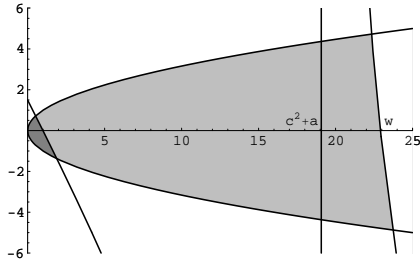
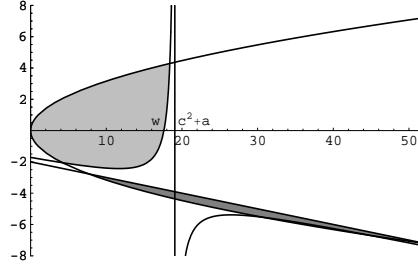
(подкоренное выражение всегда неотрицательно, если $c^2 = K^{-1}(1 - \alpha)$ и $\alpha < 0.5$; более подробное описание области действительных значений $w(c, \tau)$ см. ниже в начале параграфа 2). Второе слагаемое $R_p(\tau)$ представляется в виде двойных интегралов и устанавливается, что $R_p(\tau) = O(\tau^2)$, если $\tau \rightarrow 0$, и $R_p(\tau) = O(\tau^{-2})$, если $\tau \rightarrow \infty$. Замечателен тот факт, что мы имеем для вероятности накрытия общую асимптотическую формулу, охватывающую оба случая асимптотического поведения τ .

В работе [4] были найдены вторые члены в асимптотических разложениях вероятности накрытия при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. Численные иллюстрации для тех же значений p и τ , что и в работе [2], показывают, что при $\tau \gg c$ и $\tau \ll 1$ второй член асимптотики имеет порядок 10^{-4} , но общая картина такова, что добавление второго члена только ухудшает глобальную (при всех значениях τ) аппроксимацию вероятности накрытия, что особенно заметно при малых значениях p . Таким образом, первичную аппроксимацию (1) можно в практическом аспекте трактовать как аппроксимацию порядка $\tau^{\pm 3}$.

В настоящей работе предлагается совершенно другой подход к улучшению аппроксимации $K_p(w(c, \tau))$. Он состоит в замене функции w на $\tilde{w}(c, \tau)$, которая определяется из равенства площадей, определяемых пределами двойных интегралов в остаточном члене $R_p(\tau)$. При этом точность аппроксимаций $O(\tau^{\pm 2})$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ соответственно не изменяется, но, как показывают численные результаты, ошибка в вычислении вероятности накрытия по формуле $K_p(\tilde{w}(c, \tau))$ уменьшается и при $p \leq 15$ становится практически пренебрежимой (меньше 0.005).

По аналогии с исследованиями работы [5] строится доверительная область с постоянной вероятностью накрытия, асимптотически ($\tau \rightarrow 0$ или $\tau \rightarrow \infty$) равной заданному доверительному уровню $1 - \alpha$. Эта доверительная область, как показывают графические иллюстрации, обладает свойством консервативности лишь при значениях $\tau > c$ и практически неприменима в окрестности точки сжатия ($\tau = 0$).

Напомним, что оценки Джеймса – Стейна применяются в том случае, когда истинные значения средних $\theta_1, \dots, \theta_p$ концентрируются около некоторого общего известного значения μ – это так называемые сжимающие оценки. В настоящей статье

Рис. 1. $\tau = 0.4 < c$ Рис. 2. $\tau = 5 > c$

полагается $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Если точка концентрации μ и дисперсия σ^2 отличны от указанных значений, то во всех формулах следует заменить вектор \bar{X} на $(\bar{X} - \mu)/\sigma$. О свойствах сжимающих оценок с большим числом примеров см. в главе 5 монографии [6].

1. Коррекция w методом «выравнивания площадей»

В этом параграфе мы приведем ряд результатов из работы [2], упростив некоторые обозначения и представив их в удобной для асимптотического анализа форме. Основная идея аппроксимации вероятности накрытия, предложенная в [2], состояла в записи $Q_p^+(\tau)$, $\tau \geq 0$, как вероятности некоторой области в \mathbb{R}_+^2 , вычисляемой по распределению с плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu)} (x - y^2)^{\nu-1} e^{-x/2},$$

которая отлична от нуля лишь при $y^2 < x$ и значении $\nu = (p-1)/2$.

Если $\tau < c$, то эта область ограничена параболой $y^2 = x$ и правой ветвью гиперболы

$$y = h(x) = \frac{(x-a)^2 - c^2\tau^2 + x(\tau^2 - c^2)}{2\tau(c^2 + a - x)} = \frac{1}{2\tau} \left(a - x - \tau^2 + \frac{a(\tau^2 - c^2)}{c^2 + a - x} \right),$$

где $a = p-2$ (см. рис. 1). В случае $\tau > c$ к области, ограниченной параболой $y^2 = x$ и левой ветвью гиперболы $y = h(x)$, присоединяется полоска, расположенная между нижней ветвью параболы $y^2 = x$ и прямой $y = (a - \tau^2 - x)/2\tau$ (см. рис. 2).

Точка w (в работе [2] $w = w_2$) на оси OX есть нуль функции h , то есть $h(w) = 0$. Пусть $v_{1,2}$ – соответствующие корни уравнений $h(x) = \pm\sqrt{x}$ (абсциссы пересечений соответствующих ветвей гиперболы $h(\cdot)$ с параболой $y^2 = x$), а $x_{1,2}$ – корни уравнения $-\sqrt{x} = (a - \tau^2 - x)/2\tau$. Тогда при $\tau < c$ (см. Предложение 2 [2]) $Q_p^+(\tau) = K_p(w) + R_p(\tau)$, где

$$R_p(\tau) = \int_w^{v_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy - \int_{v_1}^w dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy. \quad (2)$$

Если $\tau > c$, то вероятность накрытия $Q_p^+(\tau) = K_p(w) + R_p(\tau) + J_p(\tau)$ (см. Предложение 4 [2]), где

$$R_p(\tau) = \int_w^{v_1} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy - \int_{v_2}^w dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy, \quad (3)$$

$$J_p(\tau) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{(a-\tau^2-x)/2\tau} f(x, y) dy,$$

и, как показано при доказательстве Теоремы [2], при $\tau \rightarrow \infty$

$$J_p(\tau) = O(\tau^{p-2} \exp\{-\tau^2/2\}).$$

Таким образом, аппроксимация $K_p(w)$ состоит в замене области, которая определяет вероятность накрытия и которая расположена между параболой $y^2 = x$ и кривой $h(x)$, на более простую область: кривая $h(x)$ заменяется прямой $x = w$. Разность интегралов в записи остаточного члена $R_p(\tau)$ (см. формулы (2) и (3)) представляет собой разность вероятностей двух областей, одна из которых (D_1) расположена над осью OX и ограничена кривыми $y^2 = x$, $y = h(x)$, $x = w$, а другая (D_2) расположена под осью OX и ограничивается теми же кривыми.

Предлагается в аппроксимации $K_p(w)$ заменить w на точку \tilde{w} , которая определяется из условия равенства площадей областей D_1 и D_2 , то есть решением уравнения

$$\int_{\tilde{w}}^{v_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} dy = \int_{v_1}^{\tilde{w}} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} dy, \tag{4}$$

если $\tau < c$, и уравнения

$$\int_{\tilde{w}}^{v_1} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} dy = \int_{v_2}^{\tilde{w}} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} dy, \tag{5}$$

когда $\tau > c$.

Лемма 1. Уравнения (4) и (5) имеют общий корень

$$\tilde{w} = \tilde{w}(c, \tau) = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} (v_1^{3/2} + v_2^{3/2}) + \int_{v_1}^{v_2} h(x) dx \right) \right]^{2/3}, \tag{6}$$

где

$$\int_{v_1}^{v_2} h(x) dx = \frac{1}{2\tau} \left[(a - \tau^2)(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) - a(\tau^2 - c^2) \ln \frac{c^2 + a - v_2}{c^2 + a - v_1} \right] \tag{7}$$

и $a = p - 2$.

Доказательство. Доказательство леммы осуществляется простым вычислением интегралов в уравнениях (4) и (5) с последующим решением уравнений относительно \tilde{w} . □

То, что новая аппроксимация $K_p(\tilde{w})$ имеет ту же асимптотическую точность, что и аппроксимация $K_p(w)$, устанавливает

Теорема 1. Если $\tau \rightarrow 0$, то $\tilde{w}(c, \tau) = w(c, \tau) + O(\tau^2)$, и $\tilde{w}(c, \tau) = w(c, \tau) + O(\tau^{-2})$, когда $\tau \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обращаясь к лемме 2.1 [4] для w , v_1 и v_2 как функций от τ , получаем следующие асимптотические разложения. Если $\tau \rightarrow 0$, то

$$w(c, \tau) = a + c^2/2 + c(c^2/4 + a)^{1/2} + O(\tau^2), \quad v_{1,2} = w \mp \lambda_{1,1} \tau + \lambda_{1,2} \tau^2 + O(\tau^3), \quad (8)$$

и при $\tau \rightarrow \infty$

$$w(c, \tau) = c^2 + O(\tau^{-2}), \quad v_{1,2} = w \pm \lambda_{2,1} \varepsilon + \lambda_{2,2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (9)$$

где $\varepsilon = \tau^{-1}$ и

$$\lambda_{1,1} = \lambda_{1,1}(w) = \frac{2(w-a) - c^2}{2\sqrt{w}(c^2 + a - w)}, \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(w) = \frac{w-a}{4w\sqrt{w}(c^2 + a - w)^2},$$

$$\lambda_{2,1} = \lambda_{2,1}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}(c^2 + a - w)}, \quad \lambda_{2,2} = \lambda_{2,2}(w) = \frac{(2w+1)(c^2 + a - w) + 2w}{8w\sqrt{w}(c^2 + a - w)^2}.$$

Первое слагаемое в скобках формулы (6) имеет одинаковый асимптотический вид, как при $\tau \rightarrow 0$, так и $\tau \rightarrow \infty$:

$$\frac{2}{3} (v_1^{3/2} + v_2^{3/2}) = \frac{4}{3} w^{3/2} + O(\tau^{\pm 2}).$$

Для доказательства этого достаточно воспользоваться разложениями для v_1 и v_2 , представленных формулами (8) и (9). Что же касается интеграла в (6), то для установления его порядка $O(\tau^{\pm 2})$ стремления к нулю при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ потребуются использовать соответствующие асимптотики $w(c, \tau)$ в (8) и (9).

Так, использование только асимптотик (8) и (9) для v_1 и v_2 в правой части (7) при $\tau \rightarrow 0$ дает

$$\int_{v_1}^{v_2} h(x) dx = \lambda_{1,1} \left(a - w - \frac{ac^2}{c^2 + a - w} \right) + O(\tau^2),$$

и подстановка асимптотики $w(c, \tau)$ показывает, что выражение, стоящее в скобках, имеет порядок $O(\tau^2)$.

Аналогично, при $\tau \rightarrow \infty$

$$\int_{v_1}^{v_2} h(x) dx = \lambda_{2,1} \left(1 - \frac{a}{c^2 + a - w} \right) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

если учесть, что $w(c, \tau) = c^2 + O(\varepsilon^2)$. \square

Табл. 1 показывает преимущество новой аппроксимации для ряда значений p и τ . В столбце Q приводятся значения вероятности $Q_p(\tau)$ накрытия доверительной областью Джеймса–Стейна, вычисленные методом статистического моделирования по 10^6 выборкам из p -мерного нормального распределения. В соседних столбцах приводятся разности $\Delta \tilde{w}$ и Δw между Q_p и соответствующими аппроксимациями. Максимальная абсолютная ошибка $\Delta \tilde{w}$ возрастает с ростом p , но всегда меньше Δw , если $p \leq 20$, и не превосходит практически допустимой величины 0.005 в отклонениях от номинала (см. взятые в рамку числа в табл. 1).

2. Доверительная область с асимптотически постоянной вероятностью накрытия

В статье [5] предложен метод построения доверительной области D для вектора средних значений, основанный на аппроксимации $Q^+_p(\tau) \sim K_p(w(c, \tau))$ при $\tau \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$. В отличие от доверительной области D_{δ^+} Джеймса – Стейна, D обладала асимптотически постоянной (равной заданному доверительному уровню $1 - \alpha$) вероятностью $P_w = P_w(\tau)$ накрытия истинного значения параметрической точки при $\tau \rightarrow 0$. Область D сохраняла аналогичное свойство и при $\tau \rightarrow \infty$, причем вероятность накрытия незначительно отклонялась от номинала $1 - \alpha$ при всех промежуточных значениях τ .

Преобразование D_{δ^+} к области с асимптотически постоянной вероятностью накрытия было основано на том, что $w(c, \tau)$ есть возрастающая функция переменной c , если подкоренное выражение в ее записи неотрицательно. Область действительных значений $w(c, \tau)$ (следовательно, и $\tilde{w}(c, \tau)$) определяется неравенством

$$c^2 \geq c_0 = \tau^2 \frac{4q - \tau^2}{2\sqrt{2\tau^2q + q^2} + 2q + \tau^2}.$$

Заметим, что из $c_0 < \tau^2$ и $c_0 \sim \tau^2$ при $\tau \rightarrow 0$ следует, что комплексные значения функции $w(c, \tau)$ расположены в области малых значений τ и c .

К сожалению, неизвестно, обладает ли аналогичным свойством монотонности аппроксимация, основанная на $\tilde{w}(c, \tau)$. Поскольку приведенные выше табличные данные говорят о меньших ошибках новой аппроксимации, то следует, хотя бы численно, исследовать поведение вероятности накрытия в аналогичной модификации доверительной области D_{δ^+} .

Напомним, что основу доверительной области D_{δ^+} составляет опорная функция

$$T^2 = T^2(\theta, \delta^+) = n \sum_{i=1}^p (\theta_i - \delta^+_i)^2$$

векторного параметра θ и векторной статистики $\delta^+(\bar{X})$. Введем подобласть $D_{\tilde{w}} = \{\theta : \tilde{w}(T, \tau) \leq c^2, T^2 \geq c_0\} + \{T^2 < c_0\}$ параметрического пространства \mathbb{R}^p . Из теоремы 1 немедленно следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $c^2 = K_p^{-1}(1 - \alpha)$. Тогда для вероятности $P_{\tilde{w}} = P_{\tilde{w}}(\tau)$ накрытия истинного значения параметра θ областью $D_{\tilde{w}}$ справедливы асимптотические равенства: $P_{\tilde{w}}(\tau) = 1 - \alpha + O(\tau^2)$, если $\tau \rightarrow 0$, и $P_{\tilde{w}}(\tau) = 1 - \alpha + O(\tau^{-2})$, если $\tau \rightarrow \infty$.

Ниже приводятся графики (см. рис. 3), иллюстрирующие поведение вероятностей $P_{\tilde{w}}(\tau)$ (жирная линия) и $P_w(\tau)$ (пунктирная линия) накрытия истинных значений вектора средних для $p = 3, 5, 10, 20$, которые приводят к следующим неутешительным выводам.

Постоянство вероятности накрытия или хотя бы консерватизм доверительной области гарантируются в окрестности точки сжатия $\tau = 0$ только для аппроксимации, основанной на w . Вероятность накрытия областью $D_{\tilde{w}}$ в этой окрестности ведет себя как убывающая функция параметра τ , и при $\tau > 5$ «недобор» номинального значения становится столь большим, что практическое использование $D_{\tilde{w}}$ становится весьма проблематичным.

Понятно, что только в окрестности $\tau = 0$ истинных значений параметров использование доверительных областей D и $D_{\tilde{w}}$ может привести к сколь-либо ощутимому сокращению их размеров (см. [5]). Следовательно, доверительная область $D_{\tilde{w}}$

Табл. 1

p	3			5			10		
	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw
0.0	.9788	-.0000	+.0000	.9945	+.0000	+.0000	.9996	+.0000	+.0000
0.5	.9786	-.0001	+.0002	.9943	-.0001	+.0000	.9996	-.0000	-.0000
1.0	.9778	-.0003	+.0008	.9938	-.0003	+.0001	.9996	-.0000	-.0000
1.5	.9765	-.0005	+.0016	.9930	-.0008	+.0003	.9995	-.0001	-.0000
2.0	.9745	-.0008	+.0021	.9917	-.0013	+.0006	.9993	-.0002	+.0000
2.5	.9716	-.0009	+.0019	.9899	-.0019	+.0008	.9991	-.0003	+.0000
3.0	.9585	-.0051	-.0086	.9873	-.0023	+.0007	.9987	-.0005	+.0001
3.5	.9555	-.0043	-.0092	.9756	-.0026	-.0083	.9982	-.0008	+.0001
4.0	.9540	-.0034	-.0087	.9706	-.0019	-.0103	.9973	-.0011	+.0001
4.5	.9531	-.0028	-.0079	.9669	-.0016	-.0112	.9927	+.0014	-.0034
5.0	.9525	-.0023	-.0070	.9640	-.0014	-.0114	.9899	+.0028	-.0048
5.5	.9520	-.0019	-.0062	.9618	-.0012	-.0111	.9866	+.0034	-.0064
6.0	.9517	-.0016	-.0055	.9600	-.0011	-.0106	.9833	+.0035	-.0078
6.5	.9514	-.0014	-.0049	.9586	-.0009	-.0099	.9802	+.0035	-.0089
7.0	.9512	-.0012	-.0044	.9575	-.0008	-.0092	.9774	+.0034	-.0096
7.5	.9511	-.0010	-.0039	.9566	-.0007	-.0086	.9748	+.0032	-.0100
8.0	.9509	-.0009	-.0035	.9558	-.0006	-.0079	.9725	+.0030	-.0102
8.5	.9508	-.0008	-.0032	.9552	-.0006	-.0073	.9705	+.0028	-.0102
9.0	.9507	-.0007	-.0029	.9546	-.0005	-.0067	.9687	+.0026	-.0100
10.0	.9506	-.0006	-.0024	.9538	-.0004	-.0058	.9657	+.0023	-.0094
15.0	.9503	-.0003	-.0011	.9517	-.0002	-.0029	.9576	+.0012	-.0059
20.0	.9501	-.0001	-.0007	.9510	-.0001	-.0017	.9544	+.0007	-.0038
30.0	.9501	-.0001	-.0003	.9504	-.0000	-.0008	.9520	+.0003	-.0018

p	15			20			50		
	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw	Q	$\Delta\tilde{w}$	Δw
0.0	1.000	-.0000	+.0000	1.000	-.0000	+.0000	1.000	+.0000	+.0000
1.0	1.000	-.0000	-.0000	1.000	-.0000	-.0000	1.000	-.0000	-.0000
2.0	.9999	-.0000	-.0000	1.000	-.0000	-.0000	1.000	-.0000	-.0000
3.0	.9999	-.0001	-.0000	1.000	-.0000	-.0000	1.000	-.0000	-.0000
4.0	.9997	-.0002	+.0000	1.000	-.0000	+.0000	1.000	-.0000	-.0000
5.0	.9979	+.0006	-.0011	.9999	-.0001	+.0000	1.000	-.0000	-.0000
6.0	.9955	+.0036	-.0024	.9990	+.0014	-.0006	1.000	-.0000	-.0000
7.0	.9913	+.0050	-.0047	.9975	+.0037	-.0015	1.000	-.0000	-.0000
7.5	.9889	+.0053	-.0058	.9963	+.0045	-.0022	1.000	-.0000	+.0000
8.0	.9865	+.0054	-.0068	.9947	+.0052	-.0031	1.000	-.0000	+.0000
9.0	.9819	+.0053	-.0082	.9911	+.0060	-.0049	1.000	+.0001	-.0000
9.5	.9798	+.0051	-.0086	.9892	+.0061	-.0057	1.000	+.0003	-.0000
10.0	.9778	+.0049	-.0089	.9873	+.0062	-.0064	1.000	+.0005	-.0000
11.0	.9742	+.0045	-.0091	.9836	+.0061	-.0075	.9999	+.0013	-.0001
12.0	.9712	+.0041	-.0089	.9801	+.0058	-.0081	.9996	+.0023	-.0003
14.0	.9665	+.0033	-.0081	.9743	+.0051	-.0083	.9983	+.0044	-.0012
16.0	.9631	+.0027	-.0071	.9697	+.0044	-.0078	.9956	+.0060	-.0027
18.0	.9606	+.0023	-.0061	.9663	+.0037	-.0070	.9922	+.0070	-.0042
20.0	.9588	+.0019	-.0052	.9636	+.0032	-.0063	.9885	+.0073	-.0052
22.0	.9573	+.0016	-.0045	.9615	+.0027	-.0055	.9848	+.0073	-.0059
25.0	.9558	+.0013	-.0037	.9591	+.0022	-.0046	.9798	+.0069	-.0061
26.0	.9554	+.0012	-.0034	.9585	+.0021	-.0043	.9782	+.0067	-.0061
28.0	.9546	+.0010	-.0030	.9574	+.0018	-.0038	.9754	+.0063	-.0060
30.0	.9541	+.0009	-.0027	.9565	+.0016	-.0034	.9729	+.0058	-.0057

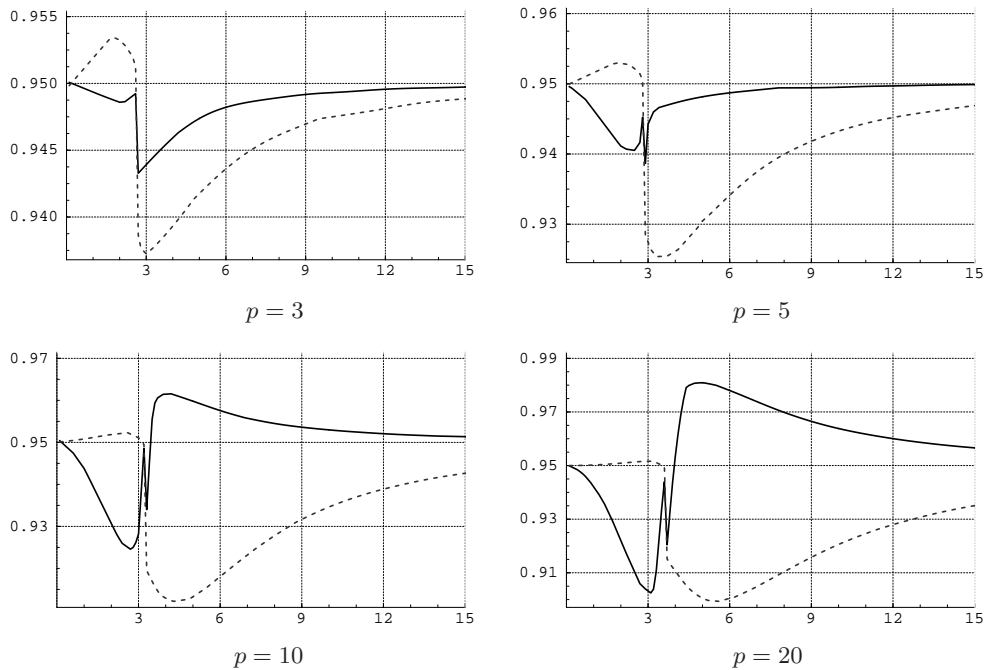


Рис. 3. Графики вероятностей накрытия для области $D_{\tilde{w}}$ при $\alpha = 0.05$, $n = 1$

не может быть рекомендована к практическому применению. Практически незначимое преимущество использования области $D_{\tilde{w}}$ состоит в том, что вероятность накрытия $P_{\tilde{w}}$ имеет меньшую вариацию при всех значениях τ и принимает значения больше номинала при $\tau > c$ ($D_{\tilde{w}}$ является более консервативной при больших значениях τ , в то время как D обладает вероятностью накрытия, меньшей номинала). Отметим также, что максимальное значение $|1 - \alpha - Q_p(\tau)|$ довольно сильно зависит от значений p для обеих аппроксимаций и увеличивается с ростом p .

Итак, рекомендовать к использованию доверительную область D можно лишь при уверенности, что истинные значения параметрического вектора θ близки к точки сжатия. Если имеются априорные сведения, что истинные значения параметров достаточно далеки от точки сжатия, то лучше использовать доверительную область Джеймса – Стейна $D_{\delta+}$ – она более проста и не менее консервативна в этой области значений параметров, как и $D_{\tilde{w}}$.

Возможно, однако, использование «гибридной» области

$$D_{\tilde{w}} = \{\theta : \tilde{w}(T, \tau) \leq c^2, T^2 \geq c_0\} + \{T^2 < c_0\},$$

где

$$\tilde{w}(c, \tau) = \begin{cases} w(c, \tau), & \text{если } \tau \leq c; \\ \tilde{w}(c, \tau), & \text{если } \tau > c. \end{cases}$$

Как показывают графические иллюстрации (см. рис. 4), область $\tilde{w}(c, \tau)$ обладает вероятностью накрытия, которая практически незначимо отличается от номинального доверительного уровня 0.95.

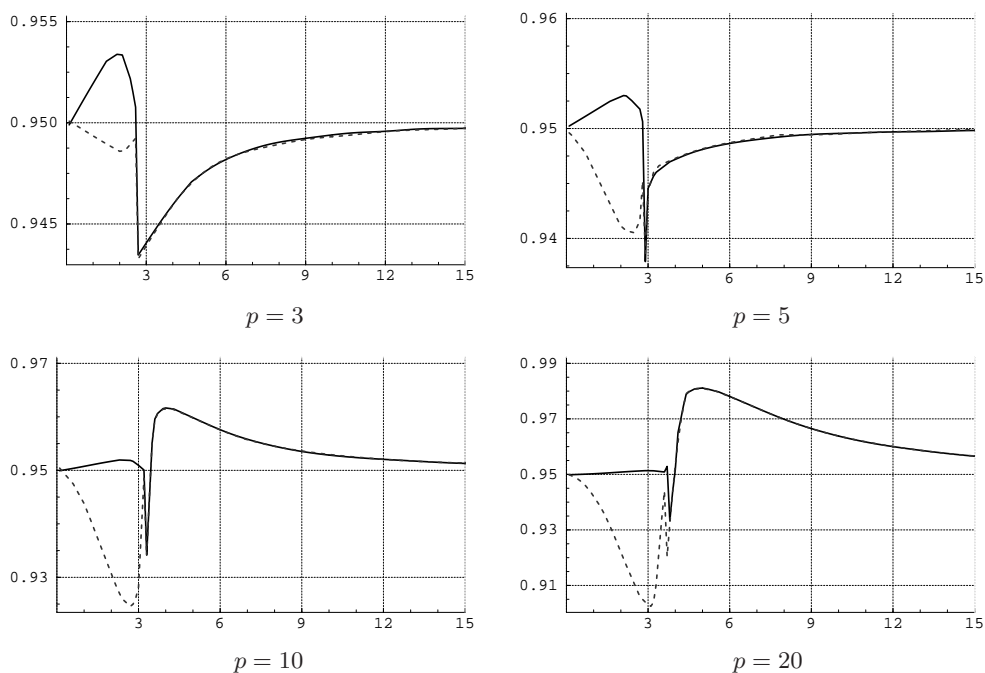


Рис. 4. Графики вероятностей накрытия для области $D_{\bar{w}}$ при $\alpha = 0.05$, $n = 1$

Summary

I.N. Volodin, I.A. Kareev. James–Stein Confidence Sets: Equal Area Approach in the Global Approximation for the Coverage Probability.

In paper [Ahmed S.E., Saleh A.K.MD.E., Volodin A.I., Volodin I.N. Asymptotic expansion of the coverage probability of James–Stein estimators // Theory Probab. Appl. – 2007. – V. 51. – P. 683–695] an asymptotic expansion of the coverage probabilities for the James–Stein confidence sets was constructed, which is accurate both for large and small values of the noncentrality parameter τ^2 – the sum of the squares of the means of $p \geq 3$ normal distributions. As numerical illustrations show, the expansion might be used almost in the entire area of the values of τ^2 with the error of the order 10^{-2} . In the present article a similar asymptotic expansion is suggested, whose global error is significantly less in the area of small and moderate values of p . The accuracy of the obtained results is shown by the Monte-Carlo statistical simulations.

Key words: confidence sets, positive-part James–Stein estimator, multivariate normal distribution, coverage probability, asymptotic expansion.

Литература

1. *Stein C.* Confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution // J. Roy. Statist. Soc., Ser. B. – 1962. – V. 24. – P. 265–296.
2. *Ahmed S.E., Saleh A.K.MD.E., Volodin A.I., Volodin I.N.* Asymptotic expansion of the coverage probability of James–Stein estimators // Theory Probab. Appl. – 2007. – V. 51. – P. 683–695.
3. *Hwang J.T., Casella G.* Minimax confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. – 1982. – V. 10. – P. 868–881.

4. *Ahmed S.E., Volodin A.I., Volodin I.N.* High order approximation for the coverage probability by a confident set centered at the positive-part James–Stein estimator // *Statist. Probab. Lett.* – 2009. – V. 79. – P. 1823–1828.
5. *Budsaba K., Kareev I.A., Volodin A.I., Volodin I.N.* Confidence sets with the asymptotically constant coverage probability based on the positive part James–Stein estimator. – To be appeared.
6. *Lehmann E.L., Casella G.* *Theory of Point Estimation.* – N. Y.: Springer-Verlag, 1998 – 589 p.

Поступила в редакцию
17.01.10

Володин Игорь Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского государственного университета.

E-mail: *Igor.Volodin@ksu.ru*

Кареев Искандер Амирович – студент факультета вычислительной математики и механики Казанского государственного университета.

E-mail: *drill87@gmail.com*