

УДК 512.55

ДИЗЬЮНКТНО ПОЛНЫЕ $C_\infty(Q)$ -МОДУЛИ

В. И. Чилин, Ж. А. Каримов

Для регулярного дизъюнктно полного $C_\infty(Q)$ -модуля X вводится понятие паспорта $\Gamma(X)$, состоящего из однозначно определенных разбиения единицы булевой алгебры, отвечающей стоуновскому компакт Q , и набора попарно различных кардинальных чисел. Доказывается, что $C_\infty(Q)$ -модули X и Y являются изоморфными тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.

Ключевые слова: $C_\infty(Q)$ -базис Гамеля, однородный модуль, σ -конечномерный модуль.

1. Введение

При решении задачи «внутреннего» описания класса C^* -алгебр, близких по своей алгебраической и порядковой структуре к алгебрам фон Неймана, в работе [9] И. Капланским было выделено семейство AW^* -алгебр, ставших предметом многочисленных исследований, относящихся к теории операторных алгебр (см. обзор [8]). Одним из важных результатов, полученных в этом направлении, стала реализация произвольной AW^* -алгебры M типа I в виде $*$ -алгебры всех линейных ограниченных операторов, действующих в специальном банаховом модуле над центром $Z(M)$ алгебры M [10]. Банахова $Z(M)$ -значная норма в этом модуле порождалась скалярным произведением со значениями в коммутативной AW^* -алгебре $Z(M)$. Впоследствии, такие модули стали называться модулями Капланского — Гильберта (МКГ). Детальное изложение свойств МКГ дано, например, в [6, 7.4]. Центральным местом в теории МКГ является представление таких модулей в виде прямой суммы однородных МКГ (см. [6, 7.4.7], [11]).

В связи с развитием теории некоммутативного интегрирования важное место среди операторных алгебр стали занимать $*$ -алгебры $LS(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, либо AW^* -алгебре M . В случае алгебр фон Неймана M , центр $Z(LS(M))$ в алгебре $LS(M)$ отождествляется с алгеброй $L^0 := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех классов равных почти всюду измеримых комплексных функций, заданных на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной локально конечной мерой μ [7, 2.1, 2.2]. Если же M — AW^* -алгебра, то $Z(LS(M))$ есть расширенная f -алгебра $C_\infty(Q)$, отвечающая стоуновскому компакт Q для булевой алгебры центральных проекторов из M [8]. Естественно возникает вопрос о возможности реализации $*$ -алгебр $LS(M)$ в виде $*$ -алгебры линейных L^0 -ограниченных ($C_\infty(Q)$ -ограниченных) операторов, действующих в соответствующем МКГ над L^0 либо $C_\infty(Q)$. Для решения этой задачи необходимо построение теории МКГ над $C_\infty(Q)$, подобно тому, как это было сделано И. Капланским в [11] для модулей над коммутативными AW^* -алгебрами. Частично, для МКГ над L^0 , эта задача решена в [3], где дано разложение МКГ над L^0 в прямую сумму однородных МКГ.

Каждый МКГ над L^0 обладает свойством регулярности и дизъюнктивной полноты (определения см. ниже в разделе 2). В связи с этим, естественно рассматривать общий класс регулярных дизъюнктивно полных модулей над $C_\infty(Q)$ для стоуновских компактов Q , отвечающим полным булевым алгебрам $\mathcal{B}$, и для этого класса модулей устанавливать структурную теорему о возможности их разложения в прямую сумму однородных модулей. Настоящая работа посвящена решению этой задачи. Следует отметить, что в случае, когда булева алгебра $\mathcal{B}$ не является мультинормируемой, понятие γ -однородности $C_\infty(Q)$ -модуля требует модификации, подобно той, что сделана в [6, 7.4.7] при введении строго γ -однородных МКГ над коммутативными AW^* -алгебрами. В настоящей работе доказывается, что для мульти- σ -конечных булевых алгебр $\mathcal{B}$, т. е. тех алгебр, которые изоморфны прямому произведению булевых алгебр счетного типа, понятия γ -однородности и строгой γ -однородности $C_\infty(Q)$ -модуля совпадают. В частности, это верно и для мультинормируемых булевых алгебр.

Центральным в работе является понятие паспорта для точного регулярного дизъюнктивно полного $C_\infty(Q)$ -модуля X . Паспорт $\Gamma(X)$ для X состоит из однозначно определенных разбиения единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и набора попарно различных кардиналов. Доказывается, что равенство паспортов $\Gamma(X)$ и $\Gamma(Y)$ есть необходимое и достаточное условие для изоморфизма $C_\infty(Q)$ -модулей X и Y .

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Для каждого ненулевого $e \in \mathcal{B}$ положим $\mathcal{B}_e = \{q \in \mathcal{B} : q \leq e\}$. Относительно частичного порядка, индуцированного из $\mathcal{B}$, множество $\mathcal{B}_e$ является булевой алгеброй с нулем $\mathbf{0}$ и единицей e .

Говорят, что $D \subset \mathcal{B}$ минорантное подмножество для $E \subset \mathcal{B}$, если для каждого ненулевого $e \in E$ существует такое $\mathbf{0} \neq q \in D$, что $q \leq e$. Нам понадобится следующее важное свойство полных булевых алгебр.

Теорема 2.1 [6, 1.1.6]. Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра, $\mathbf{0} \neq e \in \mathcal{B}$ и D — минорантное подмножество для $\mathcal{B}_e$. Тогда существует такое дизъюнктивное подмножество $D_1 \subset D$, что $\sup D_1 = e$.

Говорят, что булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип (или $\mathcal{B}$ — σ -конечна), если любое семейство ненулевых попарно дизъюнктивных элементов из $\mathcal{B}$ не более чем счетно. Если на булевой алгебре $\mathcal{B}$ существует строго положительная конечная мера, то $\mathcal{B}$ обязательно имеет счетный тип [2, гл. I, § 6].

Полную булеву алгебру $\mathcal{B}$ будем называть *мульти- σ -конечной*, если в $\mathcal{B}$ имеется такое разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы $\mathbf{1}$, что булева алгебра $\mathcal{B}_{e_i}$ имеет счетный тип, для всех $i \in I$. Примером мульти- σ -конечной булевой алгебры служит любая мультинормируемая булева алгебра, т. е. такая полная булева алгебра $\mathcal{B}$, которая допускает разделяющее семейство конечных вполне аддитивных мер [6, 1.2.10].

Пусть Q — стоуновский компакт, соответствующий полной булевой алгебре $\mathcal{B}$. Обозначим через $C_\infty(Q)$ множество всех непрерывных функций $\alpha : Q \rightarrow [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. При естественном определении алгебраических операций и частичного порядка в $C_\infty(Q)$ оно становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел и расширенной порядково полной векторной решеткой. Функция $\mathbf{1}_Q$, тождественно равная единице на Q , служит единицей алгебры $C_\infty(Q)$ и порядковой единицей в векторной решетке $C_\infty(Q)$ [6, 1.4.2].

Множество всех идемпотентов из $C_\infty(Q)$ является полной булевой алгеброй относительно частичного порядка, индуцируемого из $C_\infty(Q)$, которая изоморфна исходной

булевой алгебре $\mathcal{B}$. В дальнейшем эти две булевы алгебры отождествляются. При этом отождествлении единица $\mathbf{1}$ из $\mathcal{B}$ совпадает с функцией $\mathbf{1}_Q$, а нуль $\mathbf{0}$ из $\mathcal{B}$ с функцией, тождественно равной нулю. Алгебру $C_\infty(Q)$ будем обозначать через $L^0_{\mathbf{R}}(\mathcal{B})$, а ее комплексификацию через $L^0_{\mathbf{C}}(\mathcal{B})$. В случае, когда булева алгебра $\mathcal{B}$ и поле скаляров фиксированы, алгебры $L^0_{\mathbf{R}}(\mathcal{B})$ и $L^0_{\mathbf{C}}(\mathcal{B})$ будем обозначать через L^0 , либо через $L^0(\mathcal{B})$.

Пусть X — левый унитарный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль с алгебраическими операциями $x + y$ и αx , $x, y \in X$, $\alpha \in L^0(\mathcal{B})$. Поскольку алгебра $L^0(\mathcal{B})$ коммутативна, то левый $L^0(\mathcal{B})$ -модуль X становится правым $L^0(\mathcal{B})$ -модулем, если положить $x\alpha := \alpha x$, $x \in X$, $\alpha \in L^0(\mathcal{B})$. В дальнейшем $L^0(\mathcal{B})$ -бимодуль X будем называть просто $L^0(\mathcal{B})$ -модулем.

$L^0(\mathcal{B})$ -модуль называется точным, если для любого ненулевого $\alpha \in L^0(\mathcal{B})$ существует такое $x \in X$, что $\alpha x \neq 0$. Ясно, что для точного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X множество eX есть точный $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модуль для любого $0 \neq e \in \mathcal{B}$, при этом, eX является $L^0(\mathcal{B})$ -подмодулем в X .

L^0 -модуль X назовем регулярным, если из условия $ex = 0$ для всех $e \in A \subset \mathcal{B}$, где $x \in X$, следует, что $(\sup A)x = 0$. В этом случае, для каждого $x \in X$ определен идемпотент $s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \mathcal{B} : ex = 0\}$, который называется носителем элемента x . Если X — регулярный L^0 -модуль, то, очевидно, eX также является регулярным eL^0 -модулем для любого ненулевого $e \in \mathcal{B}$. Легко видеть, что носители элементов из регулярного L^0 -модуля X обладают следующими свойствами: $s(x)x = x$, $s(\alpha x) = s(\alpha)s(x)$, $s(x + y) \leq s(x) \vee s(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in L^0$.

Пусть X — регулярный L^0 -модуль и $Y \subset X$. Идемпотент $s(Y) = \sup\{s(y) : y \in Y\}$ будем называть носителем подмножества Y . Ясно, что регулярный L^0 -модуль X является точным тогда и только тогда, когда $s(X) = \mathbf{1}$.

Будем говорить, что регулярный L^0 -модуль X является дизъюнктно полным (d -полный), если для любого набора $\{x_i\}_{i \in I} \subset X$ и любого разбиения $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ существует такое $x \in X$, что $e_i x = e_i x_i$ для всех $i \in I$. В этом случае, элемент x называется перемешиванием набора $\{x_i\}_{i \in I}$ относительно разбиения единицы $\{e_i\}_{i \in I}$ и обозначается через $\text{mix}_{i \in I}(e_i x_i)$. Перемешивание $\text{mix}_{i \in I}(e_i x_i)$ определено однозначно, поскольку из равенств $e_i x = e_i x_i = e_i y$, $x, y \in X$, $i \in I$, следует, что $e_i(x - y) = 0$ для всех $i \in I$, откуда, в силу регулярности L^0 -модуля X , вытекает равенство $x = y$.

Множество всех перемешиваний $\text{mix}_{i \in I}(e_i x_i)$, где $\{x_i\}_{i \in I} \subset E \subset X$, а $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы в $\mathcal{B}$ называется циклической оболочкой подмножества E в X и обозначается через $\text{mix}(E)$. Если $E = \text{mix}(E)$, то E называется циклическим множеством в X (ср. [5, 1.1.2]). Таким образом, регулярный L^0 -модуль X является d -полным L^0 -модулем в том и только в том случае, когда X — циклическое множество.

Утверждение 2.2. Если X — d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, то eX также есть d -полный $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модуль для любого ненулевого $e \in \mathcal{B}$.

◁ Как уже отмечалось, eX является регулярным $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модулем в случае, когда X — регулярный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль. Далее, если $\{x_i\}_{i \in I} \subset eX$ и $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы $e\mathcal{B}$, то $\{\{e_i\}_{i \in I}, \mathbf{1} - e\}$ есть разбиение единицы $\mathbf{1}$ булевой алгебры $\mathcal{B}_e$. Взяв набор $\{\{x_i\}_{i \in I}, 0\} \subset X$ и используя d -полноту L^0 -модуля X , выберем $x \in X$ так, чтобы $(\mathbf{1} - e)x = 0$ и $e_i x = x_i$ для всех $i \in I$. Для $y = ex \in eX$ имеем, что $e_i y = x_i$ при всех $i \in I$. ▷

Нам понадобятся следующие легко проверяемые свойства циклических оболочек множеств.

Утверждение 2.3. Пусть X — d -полный L^0 -модуль, E — непустое подмножество из X , $\alpha \in L^0$. Тогда

- (i) $\text{mix}(\text{mix}(E)) = \text{mix}(E)$;
- (ii) $\text{mix}(\alpha E) = \alpha \text{mix}(E)$;
- (iii) Если Y — L^0 -подмодуль в X , то $\text{mix}(Y)$ — d -полный L^0 -подмодуль в X ;
- (iv) Если U — изоморфизм из L^0 -модуля X на L^0 -модуль Z , то Z является d -полным L^0 -модулем и $\text{mix}(U(E)) = U(\text{mix}(E))$.

Отметим также следующее полезное

Утверждение 2.4. (i) В любом точном d -полном L^0 -модуле X существует такой элемент x , что $s(x) = \mathbf{1}$;

(ii) Если Y — d -полный L^0 -подмодуль в регулярном L^0 -модуле X и для любого $0 \neq e \in \mathcal{B}$ существует такой ненулевой идемпотент $g_e \leq e$, что $g_e Y = g_e X$, то $Y = X$.

$\triangleleft$ (i). Поскольку $\mathbf{1} = s(X) = \sup\{s(x) : x \in X\}$, то для любого ненулевого $g \in \mathcal{B}$ существует такое $x_g \in X$, что $p_g = g s(x_g) \neq 0$, и если $y_g = p_g x_g$, то $s(y_g) = p_g \leq g$. В силу теоремы 2.1, найдется такой набор $\{e_i\}_{i \in I}$ попарно дизъюнктивных элементов из $\mathcal{B}$, что $\sup_{i \in I} e_i = \mathbf{1}$ и $e_i = s(y_i)$ для некоторого $y_i \in X$. Поскольку X — d -полный L^0 -модуль, то имеется такой элемент $x \in X$, для которого $e_i x = e_i y_i$, в частности, $e_i = s(e_i y_i) = s(e_i x) \leq s(x)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $s(x) = \mathbf{1}$.

(ii) Используя теорему 2.1, выберем такой набор $\{e_i\}_{i \in I}$ попарно дизъюнктивных элементов из $\mathcal{B}$, что $\sup_{i \in I} e_i = \mathbf{1}$ и $e_i Y = e_i X$ для каждого $i \in I$. Если $x \in X$, то $e_i x \in e_i X = e_i Y \subset Y$. Так как Y — d -полный L^0 -модуль, то существует такое $y \in Y$, что $e_i y = e_i x$ для всех $i \in I$, и поэтому $x = y \in Y$. $\triangleright$

Далее нам понадобится разложение точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля в виде прямого произведения точных d -полных $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модулей, где $0 \neq e \in \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра, X — точный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы в $\mathcal{B}$, $e_i \neq 0$ для любого $i \in I$. Рассмотрим прямое произведение

$$\prod_{i \in I} e_i X = \left\{ \{y_i\}_{i \in I} : y_i \in e_i X \right\}$$

$L^0(\mathcal{B})$ -подмодулей $e_i X$ в X , $i \in I$, с покомпонентными алгебраическими операциями и определим отображение $U : X \rightarrow \prod_{i \in I} e_i X$, полагая $U(x) = \{e_i x\}_{i \in I}$. Обычным образом устанавливается следующее

Утверждение 2.5. (i) $\prod_{i \in I} e_i X$ есть точный L^0 -модуль.

(ii) Если X — d -полный L^0 -модуль, то $\prod_{i \in I} e_i X$ также является d -полным L^0 -модулем и U есть изоморфизм из X на $\prod_{i \in I} e_i X$.

3. Однородные L^0 -модули

L^0 -линейной оболочкой непустого множества Y из L^0 -модуля X называется L^0 -подмодуль в X вида

$$\text{Lin}(Y, L^0) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i : \alpha_i \in L^0, y_i \in Y, i = 1, \dots, n, n \in \mathbf{N} \right\},$$

где $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Если X — d -полный L^0 -модуль, то в силу утверждения 2.3 (iii) $\text{mix}(\text{Lin}(Y, L^0))$ есть d -полный L^0 -подмодуль в X .

Система $\{x_i\}_{i \in I}$ из L^0 -модуля X называется L^0 -линейно независимой, если для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i \in I}$, $n \in \mathbf{N}$, равенство $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k} = 0$ влечет равенства

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. L^0 -линейно независимая система $\{x_i\}_{i \in I}$ из d -полного L^0 -модуля X называется L^0 -базисом Гамеля, если $\text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0)) = X$.

Из теоремы 2.1 вытекает следующее

Утверждение 3.1. Для L^0 -линейно независимой системы $\{x_i\}_{i \in I}$ в d -полном L^0 -модуле X следующие условия эквивалентны:

- (i) $\{x_i\}_{i \in I}$ — L^0 -базис Гамеля;
- (ii) Для любых $x \in X$, $0 \neq e \in \mathcal{B}$ существует такой ненулевой идемпотент $g \leq e$, что $gx \in g \text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0)$.

Отметим, что L^0 -линейная оболочка конечных L^0 -линейно независимых систем всегда является циклическим множеством, т. е. верно следующее

Утверждение 3.2. Если $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ — L^0 -линейно независимое подмножество в d -полном L^0 -модуле X , то $\text{mix}(\text{Lin}(A, L^0)) = \text{Lin}(A, L^0)$.

◁ Пусть $x \in \text{mix}(\text{Lin}(A, L^0))$, $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы и $\{y_i\}_{i \in I} \subset \text{Lin}(A, L^0)$ такие, что $e_i x = e_i y_i$ для всех $i \in I$. Так как $e_i x \in \text{Lin}(A, L^0)$, то $e_i x = \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(i)} x_j$ для некоторых $\alpha_j^{(i)} \in L^0$, $j = 1, \dots, k$. Выберем такое $\beta_j \in L^0$, что $e_i \beta_j = e_i \alpha_j^{(i)}$ для всех $i \in I$, где $j \in \{1, \dots, k\}$. Ясно, что $e_i x = e_i \left(\sum_{j=1}^k \beta_j x_j \right)$ при каждом $i \in I$, что влечет равенство $x = \sum_{j=1}^k \beta_j x_j \in \text{Lin}(A, L^0)$. ▷

Пусть γ — некоторый кардинал. Точный d -полный L^0 -модуль X назовем γ -однородным, если в X имеется L^0 -базис Гамеля $\{x_i\}_{i \in I}$ с $\text{card } I = \gamma$. Будем говорить, что L^0 -модуль X однороден, если он является γ -однородным L^0 -модулем для некоторого кардинала γ . Если X — γ -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, $0 \neq e \in \mathcal{B}$, то, очевидно, eX также γ -однородный $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модуль.

Естественно ожидать, что однородный L^0 -модуль не может быть одновременно γ -однородным и λ -однородным при $\gamma \neq \lambda$. Ситуация здесь аналогична тому же положению, что при классификации модулей Капланского — Гильберта (МКГ) над коммутативными AW^* -алгебрами $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ с булевой алгеброй проекторов $\mathcal{B}$. Для произвольной полной булевой алгебры $\mathcal{B}$ не удается доказать равенство $\lambda = \gamma$ при предположении, что X является одновременно γ -однородным и λ -однородным. В связи с этим, в [6, 7.4.6] дается понятие строгой γ -однородности МКГ X , с помощью которого, затем, и устанавливается описание произвольных МКГ. В то же время, для мульти- σ -конечных булевых алгебр $\mathcal{B}$ в [11] доказывается равенство $\lambda = \gamma$ для $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ — МКГ, являющихся одновременно γ -однородными и λ -однородными. Фактически это означает, что в этом случае понятия строгой γ -однородности и γ -однородности совпадают.

Следуя [6, 7.4.7], ниже дается понятие строгого γ -однородного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля, что позволяет дать представление произвольного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля в виде прямого произведения строго γ -однородных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей.

Пусть X — точный d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, $0 \neq e \in \mathcal{B}$. Через $\kappa(e) = \kappa_X(e)$ обозначим наименьший кардинал γ такой, что $L^0(\mathcal{B}_e)$ -модуль eX является γ -однородным. Если X — однороден, то $\kappa(e)$ определен для всех ненулевых $e \in \mathcal{B}$.

Будем говорить, что $L^0(\mathcal{B})$ -модуль X строго γ -однороден (ср. [6, 7.4.6]), если X — однороден и $\gamma = \kappa(e)$ для всех ненулевых $e \in \mathcal{B}$. Будем говорить также, что L^0 -модуль X строго однороден, если он строго γ -однороден для некоторого кардинала γ .

Ясно, что любой строго γ -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль является γ -однородным $L^0(\mathcal{B})$ -модулем. Ниже мы установим, что эти два понятия совпадают в случае мульти- σ -конечных булевых алгебр $\mathcal{B}$. Сначала покажем, что для $n \in \mathbf{N}$ всякий n -однородный

$L^0(\mathcal{B})$ -модуль является строго n -однородным. Следующая лемма является L^0 -вариантом известного факта из линейной алгебры и доказывается аналогичным образом (см., например, [4, гл. 2, § 9]).

Лемма 3.3. Пусть X — произвольный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, $0 \neq e \in \mathcal{B}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ и $\{y_j\}_{j=1}^k \subset eX$. Если $\{y_j\}_{j=1}^k \subset \text{Lin}(\{ex_i\}_{i=1}^n, eL^0(\mathcal{B}))$ и элементы $y_1, \dots, y_k$ — $eL^0(\mathcal{B})$ -линейно независимы, то $k \leq n$.

Из леммы 3.3 непосредственно вытекает

Теорема 3.4. (i) Если $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^k$ — L^0 -базисы Гамеля в $L^0(\mathcal{B})$ -модуле, то $n = k$;
(ii) Каждый n -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль является строго n -однородным $L^0(\mathcal{B})$ -модулем.

Следующая теорема является вариантом теоремы 3.4 для бесконечных кардиналов, в случае, когда булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип.

Теорема 3.4. Если λ и γ — бесконечные кардиналы, $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра счетного типа и X — d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, являющийся одновременно λ -однородным и γ -однородным, то $\gamma = \lambda$.

◁ Пусть $\{x_i\}_{i \in I}, \{y_j\}_{j \in J}$ — два $L^0(\mathcal{B})$ -базиса Гамеля в X , т. е.

$$\text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B}))) = X = \text{mix}(\text{Lin}(\{y_j\}_{j \in J}, L^0(\mathcal{B})))$$

и $\text{card } I = \lambda, \text{card } J = \gamma$. Зафиксируем $j_0 \in J$. Поскольку $y_{j_0} \in \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B})))$ и булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, то найдутся такие счетное разбиение $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и набор $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B}))$, что $e_n y_{j_0} = e_n a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Используя включение $a_n \in \text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B}))$, выберем такие $x_{i_k(j_0, n)}$ и $\alpha_{i_k(j_0, n)} \in L^0(\mathcal{B})$, $k = 1, \dots, m(n)$, что $a_n = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_{i_k(j_0, n)} x_{i_k(j_0, n)}$. Положим $I(j_0) = \{i_k(j_0, n) : k = 1, \dots, m(n), n \in \mathbb{N}\}$ и $I(J) = \bigcup_{j \in J} I(j)$. Ясно, что множество $I(j_0)$ — не более чем счетно и $I(J) \subset I$. При этом, $y_j \in \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I(j)}, L^0(\mathcal{B})))$ для каждого $j \in J$.

Покажем, что $I(J) = I$. Предположим, что существует $i_0 \in I \setminus I(J)$. Поскольку $x_{i_0} \in \text{mix}(\text{Lin}(\{y_j\}_{j \in J}, L^0(\mathcal{B})))$ и булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, то существует такое разбиение единицы $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и набор $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Lin}(\{y_j\}_{j \in J}, L^0(\mathcal{B}))$, что $g_k x_{i_0} = g_k b_k = g_k \sum_{s=1}^{p(k)} \beta_{j_s(i_0, k)} y_{j_s(i_0, k)}$ для некоторых $\beta_{j_s(i_0, k)} \in L^0$, $y_{j_s(i_0, k)} \in \{y_j\}_{j \in J}$, $s = 1, \dots, p(k)$, при этом, $y_{j_s(i_0, k)} \in \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I(j_s(i_0, k))}, L^0(\mathcal{B}))) \subset \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I(J)}, L^0(\mathcal{B})))$. Следовательно, $g_k b_k \in \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I(J)}, L^0(\mathcal{B})))$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и поэтому $x_{i_0} \in \text{mix}(\text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I(J)}, L^0(\mathcal{B})))$ (см. утверждение 2.3 (i)). В частности, существует такое $0 \neq e \in \mathcal{B}$, что $0 \neq ex_{i_0} = \sum_{t=1}^l e \delta_{i_t} x_{i_t}$, где $i_t \in I(J)$, $\delta_{i_t} \in L^0(\mathcal{B})$, $t = 1, \dots, l$, что противоречит $L^0(\mathcal{B})$ -линейной независимости набора $\{x_i\}_{i \in I}$. Таким образом, $I = I(J)$.

Так как γ — бесконечный кардинал, то $\text{card } I(j) \leq \aleph_0 \leq \gamma$ для всех $j \in J$, где $\aleph_0$ — счетный кардинал. Из теоремы 24 ([1, гл. 3, § 6]) следует, что $\lambda = \text{card } I = \text{card } I(J) = \text{card} \left(\bigcup_{j \in J} I(j) \right) \leq \text{card } J = \gamma$.

Аналогично показывается, что $\text{card } J \leq \text{card } I$, и потому $\text{card } I = \text{card } J$, т. е. $\lambda = \gamma$. ▷

Из теоремы 3.5, примененной к $eL^0(\mathcal{B})$ -модулю eX , вытекает

Следствие 3.6. Пусть λ и γ — бесконечные кардиналы и X — d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, являющийся одновременно λ -однородным и γ -однородным. Если в $\mathcal{B}$ существует такой ненулевой элемент e , что булева алгебра $\mathcal{B}_e$ имеет счетный тип, то $\lambda = \gamma$.

Следствие 3.7. Если $\mathcal{B}$ — мульти- σ -конечная булева алгебра, γ — бесконечный кардинал и X — γ -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, то модуль X является строго γ -однородным.

◁ Поскольку $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль eX является γ -однородным, где $0 \neq e \in \mathcal{B}$, то для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует $eL^0(\mathcal{B})$ -независимый набор в eX , содержащий n элементов. Согласно лемме 3.3, $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль eX не является n -однородным для любого $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $0 \neq e \in \mathcal{B}$ и булева алгебра $e\mathcal{B}$ имеет счетный тип. Если eX — λ -однородный $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль для некоторого бесконечного кардинала λ , то, используя теорему 3.5, получим, что $\lambda = \gamma$, т. е. $\kappa_X(e) = \gamma$.

Пусть теперь e — произвольный ненулевой элемент из $\mathcal{B}$. Поскольку булева алгебра $\mathcal{B}$ — мульти- σ -конечная, то существует такое $0 \neq g \in \mathcal{B}$, что $g \leq e$ и булева алгебра $g\mathcal{B}$ имеет счетный тип. Следовательно, $\gamma = \kappa_X(g) \leq \kappa_X(e) \leq \gamma$, т. е. $\kappa_X(e) = \gamma$. ▷

Приведем примеры γ -однородных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей для произвольного кардинала γ . Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра, I — некоторое множество индексов и $\text{card } I = \gamma$. Прямое произведение

$$Y = \prod_{i \in I} L^0(\mathcal{B}) = \left\{ \hat{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i \in I} : \alpha_i \in L^0(\mathcal{B}), i \in I \right\}$$

с покомпонентными алгебраическими операциями есть точный d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль.

Для каждого $j \in I$ рассмотрим элемент $\hat{g}_j = \{g_i^{(j)}\}_{i \in I}$ из Y , где $g_i^{(j)} = 0$ при $i \neq j$ и $g_i^{(i)} = \mathbf{1}$, $i \in I$. Ясно, что система $\{\hat{g}_j\}_{j \in I} - L^0(\mathcal{B})$ -линейно независима, и поэтому $L^0(\mathcal{B})$ -подмодуль $X = \text{mix}(\text{Lin}(\{\hat{g}_j\}_{j \in I}, L^0(\mathcal{B})))$ в Y является γ -однородным $L^0(\mathcal{B})$ -модулем.

Следующая теорема устанавливает изоморфизм γ -однородных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей.

Теорема 3.8. Если X и Y — γ -однородные $L^0(\mathcal{B})$ -модули, то X и Y — изоморфны.

◁ Пусть $\{x_i\}_{i \in I} - L^0(\mathcal{B})$ -базис Гамеля в X , $\{y_i\}_{i \in I} - L^0$ -базис Гамеля в Y , $\text{card } I = \gamma$, $X_0 = \text{Lin}(\{x_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B}))$, $Y_0 = \text{Lin}(\{y_i\}_{i \in I}, L^0(\mathcal{B}))$. Любое $x \in X_0$, $y \in Y_0$ однозначно представимо в виде $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k}$, $y = \sum_{l=1}^m \beta_l y_{i_l}$ для некоторых $\alpha_k, \beta_l \in L^0(\mathcal{B})$, $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$, $n, m \in \mathbf{N}$. Отображение $U_0 : X_0 \rightarrow Y_0$, определяемое равенством $U_0(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{i_k}$ есть L^0 -линейная биекция из X_0 на Y_0 .

Для каждого $a \in X$ существуют такие набор $\{a_j\}_{j \in J} \subset X_0$ и разбиение единицы $\{e_j\}_{j \in J}$ в $\mathcal{B}$, что $e_j a = e_j a_j$ для всех $j \in J$. Согласно d -полноте $L^0(\mathcal{B})$ -модуля Y , найдется единственное $b \in Y$, для которого $e_j b = e_j U_0(a_j)$ для всех $j \in J$. Положив $U(a) = b$, получим L^0 -линейную биекцию из X на Y . ▷

Из теорем 3.4 и 3.8 вытекает

Следствие 3.9. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует единственный с точностью до изоморфизма строго n -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, который изоморфен $(L^0(\mathcal{B}))^n$.

Следующее утверждение дает возможность «склеивать» γ -однородные (строго γ -однородные) $L^0(\mathcal{B})$ -модули.

Утверждение 3.10. Пусть X — d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, $\{e_i\}_{i \in I}$ — набор попарно дизъюнктивных ненулевых элементов из $\mathcal{B}$ и $e = \sup_{i \in I} e_i$. Если $e_i X$ — γ -однородный (соответственно, строго γ -однородный) $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $i \in I$, то $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль eX также является γ -однородным (соответственно, строго γ -однородным).

◁ Пусть $\{x_j^{(i)}\}_{j \in J} - L^0$ -базис Гамеля в $e_i X$, $\text{card } J = \gamma$. Положим $x_j = \text{mix}_{i \in I}(e_i x_j^{(i)})$, $j \in J$, где перемешивание берется в d -полном eL^0 -модуле eX . Набор $\{x_j\}_{j \in J}$ является $eL^0(\mathcal{B})$ -линейно независимым в eX и $eX = \text{mix}(\text{Lin}(\{x_j\}_{j \in J}, eL^0))$, т. е. eL^0 -модуль eX является γ -однородным.

Предположим теперь, что $e_i X$ — строго γ -однородный $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $i \in I$. Согласно доказанному выше, $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль X является γ -однородным. Если $0 \neq q \in \mathcal{B}_e$, то из равенства $e = \sup_{i \in I} e_i$ следует, что существует такое $i_0 \in I$, что

$p = qe_{i_0} \neq 0$. Так как $e_{i_0}L^0(\mathcal{B})$ -модуль $e_{i_0}X$ строго γ -однороден, то $\kappa(p) = \gamma$. Поэтому из неравенств $p \leq q \leq e$ следует, что $\gamma = \kappa(p) \leq \kappa(q) \leq \kappa(e) \leq \gamma$, т. е. $\kappa(q) = \gamma$. $\triangleright$

4. Классификация точных d -полных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей

Основной целью этого параграфа является представление любого точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля в виде прямого произведения строго однородных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей.

Теорема 4.1. *Для любого точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X существует такой ненулевой идемпотент $e \in \mathcal{B}$, что eX есть строго однородный $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль.*

$\triangleleft$ Поскольку X — точный d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, то существует такое $x_0 \in X$, что $s(x_0) = \mathbf{1}$ (утверждение 2.4 (i)). Если $X = \text{mix}(\{x_0\})$, то X — строго 1-однородный модуль, и теорема 4.1 доказана.

Предположим, что $X \neq \text{mix}(\{x_0\})$ и рассмотрим семейство

$$\mathcal{E} = \{A \subset X : A - L^0\text{-линейно независимое множество, } x_0 \in A\}$$

с частичным порядком по включению. Согласно лемме Цорна, в $\mathcal{E}$ существует максимальный элемент D . Если D — L^0 -базис Гамеля в X , то X — $(\text{card } D)$ -однородный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль.

Если $X \neq \text{mix}(\text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B})))$, то найдется ненулевое $e \in \mathcal{B}$, для которого выполняется следующее условие:

(1) Если $0 \neq g \in \mathcal{B}_e$, то $g \text{mix}(\text{Lin}(D, L^0)) \neq gX$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех тех $0 \neq e \in \mathcal{B}$, для которых верно свойство (1) и положим $e_0 = \sup \mathcal{P}$. Покажем, что случай $e_0 = \mathbf{1}$ невозможен. Если $e_0 = \mathbf{1}$, то для каждого ненулевого $p \in \mathcal{B}$ верно неравенство $pX \neq p \text{mix}(\text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B})))$. В этом случае, для любого $0 \neq p \in \mathcal{B}$ найдется такой ненулевой идемпотент $q \leq p$, что для любого $0 \neq g \in \mathcal{B}_q$ существует $0 \neq x_g \in gX$, обладающее следующими свойствами: $s(x_g) = g$ и $rx_g \notin \text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))$ для всех $0 \neq r \in \mathcal{B}_g$.

Используя теорему 2.1, выберем разбиение $\{g_j\}_{j \in J}$ идемпотента q и набор $\{x_{g_j}\}_{j \in J}$ из qX , для которых $x_{g_j} \in g_jX$, $s(x_{g_j}) = g_j$, $rx_{g_j} \notin \text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))$ при всех $0 \neq r \in \mathcal{B}_{g_i}$. Поскольку qX — d -полный $qL^0(\mathcal{B})$ -модуль, то существует такое $x \in qX$, что $g_jx = x_{g_j}$, в частности, $s(x) = q$, при этом, $rx \notin \text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))$ для всех $0 \neq r \in \mathcal{B}_q$.

Снова используя теорему 2.1, выберем разбиение $\{q_l\}_{l \in L}$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и набор $\{x_l\}_{l \in L}$ из X , для которых $s(x_l) = q_l$ и $rx_l \notin \text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))$ при всех $0 \neq r \in \mathcal{B}_{q_l}$. В силу d -полноты $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X существует такое $\hat{x} \in X$, что $q_l\hat{x} = x_l$ для всех $l \in L$. Ясно, что $s(\hat{x}) = \mathbf{1}$ и $r\hat{x} \notin \text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))$ для любого $0 \neq r \in \mathcal{B}$. Это означает, что семейство $D \cup \{\hat{x}\}$ — $L^0(\mathcal{B})$ -линейно независимо, что противоречит максимальнойности набора D . Следовательно, случай $e_0 = \mathbf{1}$ невозможен, т. е. $e = \mathbf{1} - e_0 \neq 0$. Согласно построению идемпотента e_0 , каждое $0 \neq r \in \mathcal{B}_e$ не обладает свойством (1), т. е. найдется такой ненулевой идемпотент $p_r \leq r$, что $p_r \text{mix}(\text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B}))) = p_rX$. Из утверждения 2.4 (ii) следует, что $eX = \text{mix}(\text{Lin}(eD, L^0(\mathcal{B}))) = e \text{mix}(\text{Lin}(D, L^0(\mathcal{B})))$, т. е. eX есть γ -однородный $eL^0(\mathcal{B})$ -модуль для $\gamma = \text{card}(eD)$.

Пусть γ_e есть наименьший кардинал во множестве кардиналов $\{\kappa(p) : 0 \neq p \leq e\}$, т. е. $\gamma_e = \kappa(p)$ для некоторого ненулевого $p \leq e$. Из выбора идемпотента p следует, что $\gamma_e = \kappa(p) = \kappa(q)$ для всех $0 \neq q \in \mathcal{B}_p$. Это означает, что $pL^0(\mathcal{B})$ -модуль pX является строго γ_e -однородным. $\triangleright$

Следующая теорема дает разложение точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля в прямое произведение строго однородных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей.

Теорема 4.2. Для каждого точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X существуют такие набор попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{e_i\}_{i \in I}$ и набор попарно различных кардиналов $\{\gamma_i\}_{i \in I}$, что $\sup_{i \in I} e_i = \mathbf{1}$ и $e_i X$ есть строго γ_i -однородный $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $i \in I$. При этом, $L^0(\mathcal{B})$ -модули X и $\prod_{i \in I} e_i X$ являются изоморфными, а наборы $\{e_i\}_{i \in I}$ и $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ определяются однозначно.

◁ Согласно теореме 4.1 для каждого ненулевого идемпотента $e \in \mathcal{B}$ существует такой ненулевой идемпотент $g \leq e$, что gX есть строго γ_g -однородный gL^0 -модуль. Используя теорему 2.1, выберем такой набор $\{q_j\}_{j \in J}$ попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов, что $\sup_{j \in J} q_j = \mathbf{1}$ и $q_j X$ есть строго λ_j -однородный $q_j L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $j \in J$. Разделим множество кардинальных чисел $A = \{\lambda_j\}_{j \in J}$ на непересекающиеся подмножества A_i , каждое из которых содержит все равные между собой кардинальные числа из A , и обозначим элемент из A_i через γ_i . Согласно утверждению 3.10, для $e_i = \sup\{q_j : \lambda_j \in A_i\}$ имеем, что $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль $e_i X$ является строго γ_i -однородным. Кроме того, в силу утверждения 2.5 (ii), $L^0(\mathcal{B})$ -модули X и $\prod_{i \in I} e_i X$ являются изоморфными.

Предположим, что имеются другие наборы попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{p_j\}_{j \in J}$ и попарно различных кардинальных чисел $\{\mu_j\}_{j \in J}$, для которых $\sup_{j \in J} p_j = \mathbf{1}$ и $p_j X$ есть строго μ_j -однородный $p_j L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $j \in J$. Если имеется два различных индекса $i_1, i_2 \in I$, для которых $e_{i_1} p_j \neq 0$ и $e_{i_2} p_j \neq 0$, то

$$\mu_j = \kappa(p_j) = \kappa(e_{i_1} p_j) = \kappa(e_{i_1}) = \gamma_{i_1} \neq \gamma_{i_2} = \kappa(e_{i_2}) = \kappa(e_{i_2} p_j) = \mu_j.$$

Следовательно, $e_i p_j = 0$ для всех $i \in I$, кроме одного индекса, который мы обозначим через $i(j)$. Ясно, что $p_j \leq e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. Если $p_j \neq e_{i(j)}$, то найдется такой индекс $j_1 \neq j$, $j_1 \in J$, что $e_{i(j)} p_{j_1} \neq 0$. Следовательно, $\mu_j = \gamma_{i(j)} = \mu_{j_1}$, что неверно. Таким образом, $p_j = e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. Аналогично, для каждого $i \in I$ существует единственный индекс $j(i)$ такой, что $e_i = p_{j(i)}$ и $\gamma_i = \mu_{j(i)}$. ▷

Разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и набор кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ из теоремы 4.2 будем называть паспортом для точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X и обозначать через $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i \in I(X)}$.

Теорема 4.3. Точные d -полные $L^0(\mathcal{B})$ -модули X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.

◁ Пусть $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i \in I(X)} = \Gamma(X) = \Gamma(Y) = \{(e_i(Y), \gamma_i(Y))\}_{i \in I(Y)}$, т. е. $I(X) = I(Y) := I$, $e_i(X) = e_i(Y) := e_i$ и $\gamma_i(X) = \gamma_i(Y) := \gamma_i$ для всех $i \in I$. Согласно теореме 4.2 существует изоморфизм U из $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X на $L^0(\mathcal{B})$ -модуль $\prod_{i \in I} e_i X$ и изоморфизм V из $L^0(\mathcal{B})$ -модуля Y на $L^0(\mathcal{B})$ -модуль $\prod_{i \in I} e_i Y$, где $U(x) = \{e_i x\}_{i \in I}$, $V(y) = \{e_i y\}_{i \in I}$, при этом $e_i X$ (соответственно, $e_i Y$) — строго γ_i -однородный $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $i \in I$. В силу теоремы 3.8, существует изоморфизм U_i из $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуля $e_i X$ на $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль $e_i Y$. Задавая отображение $\Phi : X \rightarrow Y$, с помощью равенства $\Phi(x) = V^{-1}(\{U_i(e_i x)\}_{i \in I})$, получим, что Φ есть изоморфизм из X на Y .

Обратно, если Ψ — изоморфизм из X на Y и $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i \in I(X)}$ — паспорт для точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля X , то, положив $Y_i = U(e_i(X)X) = e_i(X)U(X) = e_i(X)Y$ получим, что $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i \in I}$ является паспортом для точного d -полного $L^0(\mathcal{B})$ -модуля Y . ▷

Дадим приложение теоремы 4.2 к описанию точных конечномерных и σ -конечномерных d -полных модулей.

Точный d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль X назовем конечномерным (σ -конечномерным), если существуют такие разбиение $\{e_i\}_{i=1}^\gamma$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и набор $\{n_i\}_{i=1}^\gamma$ нату-

ральных чисел, $\gamma \in \mathbf{N}$ (соответственно, $\gamma = \infty$), что $n_i < n_{i+1}$ и $e_i X$ есть n_i -однородный $e_i L^0(\mathcal{B})$ -модуль для всех $i = 1, \dots, \gamma - 1$ (соответственно, $i = 1, 2, \dots$). Другими словами, конечномерный (σ -конечномерный) $L^0(\mathcal{B})$ -модуль есть точный d -полный $L^0(\mathcal{B})$ -модуль X , паспорт которого имеет вид $\Gamma(X) = \{(e_i(X), n_i(X))\}_{i=1}^\gamma$, где $n_i(X) \in \mathbf{N}$.

Из теоремы 4.2 и следствия 3.9 вытекает следующее описание всех конечномерных и σ -конечномерных $L^0(\mathcal{B})$ -модулей.

Теорема 4.4. Если X — конечномерный (σ -конечномерный) $L^0(\mathcal{B})$ -модуль, то существуют такие однозначно определенные разбиение $\{e_i\}_{i=1}^\gamma$ единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$ и строго возрастающий набор $\{n_i\}_{i=1}^\gamma$ натуральных чисел, $\gamma \in \mathbf{N}$ (соответственно, $\gamma = \infty$), для которых $L^0(\mathcal{B})$ -модуль X — изоморфен $L^0(\mathcal{B})$ -модулю $\prod_{i=1}^\gamma e_i(L^0(\mathcal{B}))^{n_i}$.

Литература

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию.—М.: Наука, 1977.—368 с.
2. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—319 с.
3. Каримов Ж. А. Модули Капланского — Гильберта над алгеброй измеримых функций // Узб. мат. журн.—2010.—№ 4.—С. 74—81.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1975.—432 с.
5. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
6. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—620 с.
7. Муратов М. А., Чилин В. И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Тр. ин-та математики НАН Украины.—2007.—Т. 69.—307 с.
8. Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики: Новейшие направления.—М.: ВИНТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99—128.
9. Kaplansky J. Projections in Banach algebras // Ann. Math.—1951.—Vol. 53.—P. 235—249.
10. Kaplansky J. Algebras of type I // Ann. Math.—1952.—Vol. 56.—P. 450—472.
11. Kaplansky J. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—Vol. 75, № 4.—P. 839—858.

Статья поступила 27 ноября 2012 г.

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz;

Каримов Жасурбек Алишерович
Национальный университет Узбекистана
ассистент кафедры математического анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: karimovja@mail.ru

LATERALLY COMPLETE $C_\infty(Q)$ -MODULES

Chilin V. I., Karimov J. A.

Let X be a regular laterally complete $C_\infty(Q)$ -module and $\mathcal{B}$ be a Boolean algebra whose Stone space is Q . We introduce the passport $\Gamma(X)$ for X consisting of uniquely defined partition of unity in $\mathcal{B}$ and set of pairwise different cardinal numbers. It is proved that $C_\infty(Q)$ -modules X and Y are isomorphic if and only if $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$.

Key words: Hamel $C_\infty(Q)$ -basis, homogeneous module, σ -finite dimensional module.