Вестн. Ом. ун-та. 2010. № 4. С. 42–44.

УДК 510

Е.В. Ушакова
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

ДИСКРЕТНО-ВЫПУКЛАЯ МАТРИЧНАЯ ИГРА

Вводится понятие дискретно-выпуклой матричной игры. Описывается процесс трансформации дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной выпуклой игры на квадрате. Этот процесс позволяет использовать Основную теорему теории непрерывных выпуклых игр для нахождения оптимальных стратегий исходной дискретно-выпуклой матричной игры. Доказывается совпадение цены дискретно-выпуклой матричной игры и цены соответствующей непрерывной выпуклой игры.

Ключевые слова: дискретная игра, выпуклая игра, оптимальные стратегии игроков, дискретно-выпуклая игра.

Введение

В данной работе даётся понятие дискретно-выпуклой матричной игры. Это понятие является естественным дискретным аналогом непрерывной выпуклой игры на квадрате. Более того, устанавливается связь между дискретно-выпуклой матричной игрой и непрерывными выпуклыми играми на квадрате. А именно, описывается процесс трансформации произвольной дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной выпуклой игры на квадрате. Основная теорема о непрерывных выпуклых играх на квадрате находит своё отражение для дискретно-выпуклых матричных игр.

В работе устанавливается совпадение цен дискретно-выпуклой матричной игры и соответствующей непрерывной выпуклой игры на квадрате.

Известный способ нахождения оптимальных стратегий игроков в непрерывной выпуклой игре на квадрате позволяет дать способ определения оптимальных стратегий в исходной дискретно-выпуклой матричной игре. В качестве следствия доказывается, что произвольная дискретно-выпуклая матричная игра эквивалентна дискретно-выпуклой матричной игре с матрицей размера m×2. Это позволяет находить её решение графическим методом.

В разделе 1 даются необходимые определения, описывается процесс трансформации дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной выпуклой игры на квадрате. Раздел 2 содержит Основную теорему теории дискретно-выпуклых матричных игр и её доказательство.

1. Определение дискретно-выпуклой игры и трансформация её до непрерывной выпуклой игры на квадрате

Определение 1. Набор вещественных чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ называется *дискретно-выпуклым*, если кусочно-линейная функция f, для ко-

которой вершинами звеньев служат точки графика: $f(x_i)=a_i$ для $i=1,\dots,k$ при некотором выборе точек $0=x_1<x_2<\dots<x_k=1$ является выпуклой.

Легко видеть, что определение не зависит от выбора точек $0=x_1<x_2<\dots<x_k=1$. Аналитически данное свойство означает, что для любого $0<\lambda<1$, для любых $1\le i<j\le n$ выполнены неравенства:

$$f((1-\lambda)x_i+\lambda x_j)\le(1-\lambda)f(x_i)+\lambda f(x_j).$$

Определение 2. Матричная игра с матрицей платежей (выигрышей первого игрока) $A=(a_{ij})$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ называется *дискретно-выпуклой*, если любая её строка $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}$ $(i=1,\dots,m)$ является дискретно-выпуклой.

Опишем процесс трансформации произвольной дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной выпуклой игры на квадрате. Для этого мы преобразуем матрицу $A=(a_{ij})$ в единичный квадрат $K=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. Определим на К функцию выигрышей первого игрока $H(x,y)$ таким образом, что $H(x,y)$ будет при любом фиксированном *y* выпуклой по *x*, то есть $H(x,y)$ будет являться функцией выигрышей непрерывной выпуклой игры на квадрате. При этом удобно считать, что строки матрицы $A=(a_{ij})$ пронумерованы снизу вверх. Нижнее ребро квадрата соответствует первой строке матрицы $A=(a_{ij})$, верхнее ребро – последней строке. Рёбра, соответствующие остальным строкам, располагаются по квадрату с одинаковым интервалом $\delta=\frac{1}{(m-1)}$. На каждом таком ребре определяем функцию $H(x,y)$ (y фиксировано) как кусочно-линейную функцию, отвечающую строке матрицы $A=(a_{ij})$:

$$H(x_1,\delta\cdot(j-1))=a_{j1},\ \dots,$$
$$H(x_n,\delta\cdot(j-1))=a_{jn},\ j=1,\dots,m.$$

Если $x_i\le x\le x_{i+1}$, то, полагая $\lambda=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$, определяем

$$H(x,\delta\cdot(j-1))=(1-\lambda)a_{ji}+\lambda a_{ji+1},$$
$$j=1,\dots,m.$$

Таким образом, мы задаём *m* кусочно-линейных выпуклых по условию функций $H(x_1,\delta\cdot(j-1))$, определённых на интервале $0\le x\le 1$, $j=1,\dots,m$.

Лемма 1. Пусть заданы функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ в интервале $0\le x\le 1$, которые непрерывны и выпуклы по x. Тогда функция $g(x,\mu)=\mu f_1(x)+(1-\mu)f_2(x)$ непрерывна и выпукла по x на квадрате $K=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

Доказательство. Непрерывность функции $g(x,\mu)$ очевидна. Докажем её выпуклость. По условию, для любых $0\le a<x<b\le 1$ при $\lambda=\frac{x-a}{b-a}$ выполнены неравенства:

$$f_1(x)\le(1-\lambda)f_1(a)+\lambda f_1(b),$$
$$f_2(x)\le(1-\lambda)f_2(a)+\lambda f_2(b).$$

Умножим первое из неравенств на μ, второе – на $(1-\mu)$, считая, что $0\le\mu\le 1$, и сложим полученные выражения. Получим требуемое неравенство:

$$\begin{aligned}g(x,\mu)&\le\mu(1-\lambda)f_1(a)+\mu\lambda f_1(b)+\\&+(1-\mu)(1-\lambda)f_2(a)+(1-\mu)\lambda f_2(b)=\\&=(1-\lambda)[\mu f_1(a)+(1-\mu)f_2(a)]+\\&+\lambda[\mu f_1(b)+(1-\mu)f_2(b)]=\\&=(1-\lambda)g(a,\mu)+\lambda g(b,\mu).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Считая, что $\delta(j-1)\le\mu\le\delta j$, мы строим по Лемме 1 для каждой пары функций $f_1(x)=H(x,\delta(j-1))$, $f_2(x)=H(x,\delta j)$, $j=1,\dots,m-1$, выпуклые по x функции и значения $H(x,\mu)$, объединяя области значений которых, получаем выпуклую по x функцию $H(x,\mu)$ на $K=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

Далее мы сопоставляем исходной дискретно-выпуклой матричной игре с матрицей $A=(a_{ij})$ непрерывную выпуклую игру на квадрате $K=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ с платёжной функцией $H(x,y)$.

Непрерывные выпуклые игры на квадрате допускают эффективное нахождение оптимальных стратегий игроков (см. например [1], [2]).

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока вычисляется функция $\max\limits_y H(x,y)=h(x)$, а затем вычисляется $\min\limits_x h(x)=C$, что является ценой игры. Существует оптимальная чистая стратегия первого игрока x_{opt}, для которой $\max\limits_y H(x_{opt},y)=C$. Оптимальной стратегией второго игрока служит вероятностная смесь двух чистых стратегий x_{opt1} и x_{opt2}, которые берутся с вероятностями p и $1-p$ соответственно.

2. Основная теорема теории дискретно-выпуклых матричных игр.

Теорема (Основная теорема теории дискретно-выпуклых игр). Цена дискретно-выпуклой матричной игры с матрицей $A=(a_{ij})$ равна цене соответствующей непрерывной выпуклой игры на квадрате $K=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ с платёжной функцией $H(x,y)$, построенной в разделе 1. Первый игрок имеет либо оптимальную чистую стратегию x_{opt}, либо смесь двух чистых стратегий x_{opt1} и x_{opt2}, которые берутся с вероятностями p и $1-p$ соответственно. В частности, дискретно-выпуклая матричная игра эквивалентна игре с подматрицей матрицы $A=(a_{ij})$ размера m×2. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока, сводящаяся к вычислению p и $1-p$, может быть найдена графическим методом.

Доказательство. Очевидно, что максимальное и минимальное значения произвольной кусочно-линейной функции на конечном замкнутом интервале достигаются в одной из вершин звеньев. При любом фиксированном y функция $H(x,y)$ по построению также кусочно-линейна, поэтому её экстремальные точки соответствуют тем рёбрам K, которые отвечают строкам матрицы $A=(a_{ij})$. Иначе говоря,

$$h(x)=\max_y H(x,y)=\max_j H(x,\delta(j-1)),$$

$j=1,\dots,m$.

Функция $h(x)$ выпукла и кусочно-линейна. Её минимум достигается либо в точке $x_{opt}=x_i$, и тогда первый игрок имеет оптимальную чистую стратегию x_{opt}, либо в точке пересечения двух функций вида $H(x,\delta(j-1))$, $H(x,\delta(l-1))$, и тогда оптимальной для первого игрока будет смешанная стратегия, отвечающая выбору стратегий j и l с некоторыми вероятностями p и $1-p$ соответственно. И в том и в другом случае мы видим, что цена игры непрерывной выпуклой игры совпадает с ценой игры исходной дискретно-выпуклой игры.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Печёрский С. Л., Беляева А. А.* Теория игр для экономистов. Вводный курс. Редакция европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. 236 с.

[2] *Воробьёв Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. М., 1985. 272 с.